BAUER, Sebastian & OLDENBURG, Reinhard & WECHINGER, Wolf
Karlsruhe, Augsburg, Karlsruhe

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Schulbüchern im Spannungsfeld zwischen intellektuell redlicher Vereinfachung und Verfälschung

1. Einleitung

Das Integral ist eines der komplexesten mathematischen Konzepte, die im Schulunterricht behandelt werden. Die Fachmathematik hat mehrere nicht äquivalente Integralbegriffe entwickelt; historisch bzw. nach Komplexität sortiert sind das z.B. Regel- oder Cauchy-Integral, Riemann-Integral und Lebesgue-Integral. Das in der Schule übliche Riemann-Integral lässt sich auf zwei Arten darstellen: Entweder als Grenzwert von Produktsummen, bei denen jeweils eine Zerlegung des Integrationsintervalls an beliebigen Zwischenstellen ausgewertet wird, oder nach Darboux als Supremum der Unter- und Infimum der Obersummen, wenn diese gleich sind. In beiden Fällen handelt es sich nicht um einen einfachen Folgen- oder Funktionsgrenzwert; nicht nur deshalb kann daher die volle Komplexität des Integralbegriffs in der gymnasialen Oberstufe nicht dargestellt werden, sondern macht eine didaktische Reduktion erforderlich. Bereits 1977 hat Arnold Kirsch im Zusammenhang mit der Integralrechnung darauf hingewiesen, dass diese Reduktion jedoch nicht zu fachlichen Fehlern führen darf, sondern "intellektuell ehrlich" erfolgen muss (Kirsch 1977, S. 87ff); man könnte kurz sagen: Fachliche Korrektheit ist zwar kein hinreichendes, aber doch ein notwendiges Kriterium für erfolgreiches Lernen.

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die allgemeine Hochschulreife stellen besonders die Interpretation des Integrals als Rekonstruktion eines Bestandes aus einer Änderungsrate in den Vordergrund. Dieser Zugang, der beispielsweise von Dankwerts und Vogel (2006) ausführlich ausgearbeitet wurde, löst inzwischen in vielen Bildungsplänen den vorher üblichen Zugang über die Flächeninhaltsbestimmung ab. Die Wahl des Zugangs zum Integralbegriff beeinflusst nicht nur die dabei entwickelten Vorstellungen und Definitionen, sondern auch den Prozess und die Mittel einer fortschreitenden innermathematischen Präzisierung, Formalisierung und Begründung. Die vorliegende Arbeit stellt daher die Frage, wie sich die Einführung des Integrals über den Rekonstruktionsgedanken auf die Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (HDI) auswirkt, und stellt die Erkenntnisse einer Schulbuchanalyse zusammen.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

2. Einführung des Integrals über Rekonstruktion

Folgt man den Vorgaben der allgemeinen Bildungsstandards, so soll die Integralrechnung durch die Rekonstruktion eines Bestandes aus einer Änderungsrate eingeführt werden. In der vorausgehenden Differentialrechnung werden in den meisten Schulbüchern die Begriffe "lokale Änderungsrate" und "Ableitung" synonym behandelt; insbesondere festigt sich das Wissen, dass man durch Ableiten von einem Bestand zur lokalen Änderungsrate gelangt. Bei einer Einführung der Integralrechnung über die Rekonstruktion eines Bestandes stellt sich das Umkehrproblem, das offensichtlich über das Auffinden einer Stammfunktion gelöst wird: Dieser Zugang führt daher inhaltlich auf die Definition des Integrals als Stammfunktionsintegral $\int_a^b f(x)dx \coloneqq F(b) - F(a)$. Dadurch erscheint eine wesentliche Aussage des HDI als trivial - so bemerkt schon von Blum und Kirsch (1979, S. 16). Auch aufgrund vielfältiger Kritik am Stammfunktionsintegral (Danckwerts & Vogel 2006, S. 95) wird dieser Weg von keinem aktuellen Schulbuch gewählt, obwohl er im Zugang über Rekonstruktion auf der Hand liegt.

Stattdessen wird auf das Flächeninhaltsproblem übergeleitet, eine sehr durchdachte Umsetzung dieses Weges findet man bei Körner et al. (2019). Dort beginnt man mit dem in Abb. 1 gezeigten Beispiel; es legt im ersten Bereich für den zu rekonstruierenden Bestand ein Produkt nahe, macht damit die Interpretation als Flächeninhalt plausibel und erlaubt im weiteren Verlauf die Anwendung der Flächeninhaltsformel für Dreiecke. Die Flächeninhaltsinterpretation wird im weiteren Verlauf ausgebaut und auch zum Beweis des HDI verwendet. Dieses Vorgehen hat jedoch auch didaktische Nachteile: Der "Bestand" ist der zurückgelegte Weg, gemessen in der Einheit m - daher wird auch der Flächeninhalt in dieser ungewöhnlichen Einheit gemessen. Des Weiteren ist die gegebene Änderungsrate in Abb. 1 wie auch in vielen anderen Schulbüchern unstetig, um eine einfache Rekonstruktion des Bestandes mit Produkten zu ermöglichen; bis dahin wurden aber kaum unstetige Funktionen betrachtet und der Zwischenwertsatz von Darboux schließt aus, dass es sich bei diesen Änderungsraten um Ableitungen handelt.

Unabhängig von den je nach Schulbuch unterschiedlichen Formulierungen führt in aller Regel die graphische Argumentation vom Rekonstruktions- zum Flächeninhaltsproblem. Es wird häufig unbegründet erklärt, dass für alle behandelten Funktionen der orientierte Flächeninhalt dem rekonstruierten Bestand entspricht; folgerichtig schließen sich in den meisten Büchern elementare Flächenberechnungen an. Dabei wird das Integral teils als (präexistenter) orientierter Flächeninhalt, teils als übereinstimmender Grenzwert von Ober- und Untersummen definiert, bei der die Identifikation mit dem orientierten Flächeninhalt mehr oder weniger explizit gegeben ist.

Der höchste Fallturm der Welt ist 126 m hoch. Die Passagiere werden in 40 Sekunden mit einer Geschwindigkeit von 3,15 m/s nach oben befördert, bevor nach 8 Sekunden der freie Fall mit einer Geschwindigkeit von bis zu 140 km/h beginnt.

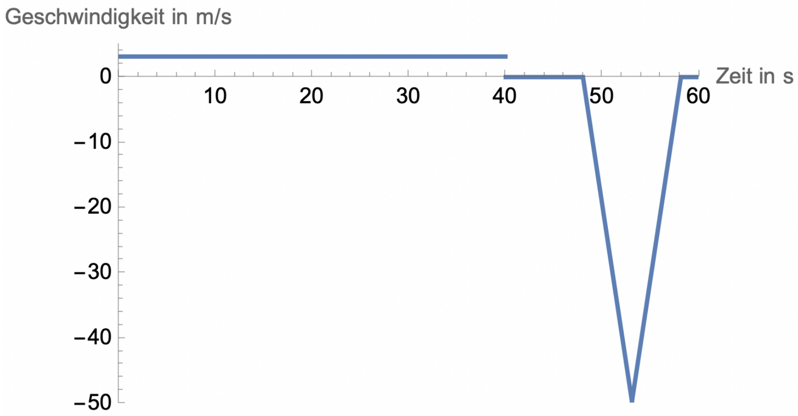

Abb. 1: Das Einstiegsproblem im Stil von Neue Wege (Körner, et al. 2019)

3. Der HDI

Die Aussage des HDI kann in zwei Teile zerlegt werden: Teil 1: Ist $I_a(x) \coloneqq \int_a^x f(x)dx$ die Integralfunktion einer stetigen Funktion f, dann ist I_a differenzierbar und es gilt $I_a' = f$. Teil 2: Ist f integrierbar und F eine Stammfunktion von f, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Fachlich beweist man den ersten Teil mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung oder einer direkten Abschätzung des Integrals durch Infimum bzw. Supremum auf dem jeweiligen Teilintervall. Der zweite Teil ergibt sich dann (für stetige Integranden) aus $\int_a^b f(x)dx = I_a(b) - I_a(a)$ und dem in Schulbüchern unbewiesen Umstand, dass aus $F' = 0$ folgt, dass F konstant ist. Der zweite Teil kann aber auch direkt bewiesen werden, was aber in aktuellen Büchern nie geschieht. Ausgehend von der Identifikation von Ableitung und lokaler Änderungsrate liegt eigentlich der zweite Teil des HDI näher als der erste, dennoch steuern alle untersuchten Bücher zunächst den ersten Teil an. Dessen Motivation erfolgt sehr unterschiedlich: a) Experimentell entdeckend: An Graphen von Flächeninhaltsfunktionen wird entdeckt, dass die die Ausgangsfunktion die Ableitung davon zu sein scheint. b) Physikalisch argumentierend: Beziehung von Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg. c) Geometrisch dynamisch: Es wird beobachtet, dass die Flächeninhaltsfunktion gewissermaßen am Rand wächst, wenn die Grenze verschoben wird. (Dies liegt insofern nahe, als bei der Betrachtung von Änderungsraten vielfach die Ableitung von πr^2 diskutiert wird.)

Zur Begründung des HDI werden Differenzen der Integralfunktion (bzw. Flächeninhaltsfunktion) betrachtet und abgeschätzt. Mit der notwendigen

Voraussetzung der Stetigkeit des Integranden gehen die Bücher recht unterschiedlich um: Einige verschweigen sie, was kritisch ist, da kurz vorher Stufenfunktionen betrachtet worden sind; einige rekurrieren auf einen anschaulichen Stetigkeitsbegriff; ein Buch verlangt gar die Differenzierbarkeit des Integranden. Typisch ist das folgende Vorgehen: Für $h > 0$ wird die Differenz $I_a(x+h) - I_a(x)$ mit dem Flächeninhalt zwischen x und $x+h$ veranschaulicht und unter der Voraussetzung, dass f monoton wachsend ist, gegen $f(x) \cdot h$ nach unten und $f(x+h) \cdot h$ nach oben abgeschätzt. Nach Division durch h und einer Erwähnung des Grenzübergangs $h \to 0$ mit $f(x+h) \to f(x)$ wird die Beweisskizze abgeschlossen. Die zusätzliche Voraussetzung der Monotonie ist ein didaktischer Kniff, um die Abschätzung des Integrals zu erleichtern, also statt $h \cdot \min_{t \in [x,x+h]} f(t) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \cdot \max_{t \in [x,x+h]} f(t)$ schreiben zu können $h \cdot f(x) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \cdot f(x+h)$. Ob dies eine wesentliche Vereinfachung ist, sei dahingestellt, es stellt aber eine Einschränkung an die Klasse der integrierbaren Funktionen dar. Im Sinne einer intellektuellen Redlichkeit wäre es wünschenswert, die Vereinfachung explizit zu erwähnen; insbesondere dann, wenn der HDI nicht nur für monotone Funktionen formuliert wird.

4. Fazit

Der durch die KMK geförderte Weg über das Rekonstruktionsproblem ist nicht ohne Schwierigkeiten: Oft gibt es verschiedene Erklärungen und Definitionen dessen, was das Integral ist (Bestand, orientierter Flächeninhalt, Grenzwert einer Produktsumme); dies lässt den Begriff unscharf. Auch Fragen der Existenz werden kaum thematisiert. Zirkelschlüsse und andere fachliche Fehler lassen darauf schließen, dass die von Kirsch geforderte "intellektuelle Ehrlichkeit" aktuell nicht erreicht wird.

Literatur

Blum, W., Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysis Unterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25*, 6-24.

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Dankwerts, R, & Vogel (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-St., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*, 87–101.

Körner, H. et al. (2019). *Mathematik Neue Wege. Qualifikationsphase eA*. Westermann.