PRÄSENT, David; EBNER, Stefan; GMOSER, Leanka
& FISCHER, Michael
Graz (Österreich)

Takeaways aus einem Teamwettbewerb: Drei erfahrungsbasierte Thesen zum Design mathematischer Problemlöseaufgaben für die Unterstufe

An der Universität Graz finden jährlich drei Mathematik-Teamwettbewerbe im Problemlösen statt. Wir präsentieren qualitative Analyseeindrücke der Antworten (Zahlenwerte; offenes Format) von 86 Teams in einem dieser Wettbewerbe sowie Rückschlüsse für ein altersgerechtes Design von Aufgaben. Aus unseren Beobachtungen lassen sich *drei Thesen* ableiten:

Raumvorstellungs- und Zählhandlungen sind überproportional schwieriger, was aus der geringen Lösungsquote entsprechender Aufgaben hervorgeht und im Abgleich mit z.B. Maresch (2021) bzw. Herzog, Ehlert & Fritz (2017) nicht überrascht. Die Kombinatorikaufgaben suggerieren insbesondere unsystematisches Vorgehen und nicht hinterfragte Schnellschüsse.

Formale oder mehrschrittige Lösungserwartungen sind erhebliche Hindernisse. Die analysierten Antworten liefern Hinweise darauf, dass bevorzugt intuitiv-logisch anstatt mit Gleichungen bzw. Termen gearbeitet wurde. Im Vergleich mit z.B. Geretschläger & Donner (2022) liegt bei derartigen Aufgaben die Abwägung gegenüber einem Multiple-Choice-Format nahe.

Attraktive (Schein-)Lösungswege werden tatsächlich verfolgt. Sichtbar war das an den Erfolgen bei den Aufgaben mit geringem Handlungsspielraum. Umgekehrt hatten Semantik- bzw. Interpretationsfallen eine merkliche negative Wirkung. Trotz offenem Antwortformat finden wir Parallelen zur Analyse von MC-Distraktoren von Lerchenberger & Donner (2024).

Literatur

Geretschläger, R. & Donner, L. (2022). Writing and choosing problems for a popular high school mathematics competition. *ZDM Mathematics Education 54*(5), 971–982.

Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse: Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*(2), 263-289.

Lerchenberger, E. & Donner, L. (2024). It Is (Not) as Easy as It Seems: The Role of Distractors in Specific Tasks in the Mathematical Kangaroo. In Geretschläger, R. (Hrsg.), *Engaging Young Students in Mathematics through Competitions — World Perspectives and Practices: Volume III – Keeping Competition Mathematics Engaging in Pandemic Times* (S. 105-120). World Scientific.

Maresch, G. (2021). Räumliches Denken. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG) 40*(1), 23-36.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Takeaways aus einem Teamwettbewerb

Drei erfahrungsbasierte Thesen zum Design mathematischer Problemlöseaufgaben für die Unterstufe

David Präsent
Stefan Ebner
Leanka Gmoser
Michael Fischer

Untersuchungsrahmen

- Untersucht wurde einer von drei Teamwettbewerben an der Uni Graz (hier mit gemischten m/w-Zweierteams)
- 19+1 progressiv schwierigere Problemlöseaufgaben mit ganzzahligen Lösungen im offenen Antwortformat
- 42 bzw. 44 der schulintern besten Vorrunden-Teams der 5. bzw. 6. Schulstufe im Bundesland Steiermark (Österreich)
- Untersuchung der Antwortblätter auf Auffälligkeiten und Muster bei den (Falsch-)Antworten

Forschungsfrage

Welche qualitativen Rückschlüsse für ein erfolgreiches und altersgerechtes Design mathematischer Wettbewerbsaufgaben können aus der explorativen Auswertung der (Falsch-)Antworten in einem Teamwettbewerb für die 5. und 6. Schulstufe gezogen werden?

Leser:innen-Auftrag: versuchen Sie anhand der **Leitfragen** eine ad-hoc-Analyse der Aufgaben 6, 12, 14 und 15! → Auflösung:

Aufgabe 6 (29 richtig, 56 falsch, 1 k.A.)

Der große Würfel rechts daneben ist aus 4x4x4 kleinen Würfeln zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen gefärbt. Bei wie vielen kleinen Würfeln sind genau 2 Flächen angemalt?

Welche Falschantwort wurde am häufigsten gewählt?

Aufgabe 12 (77 richtig, 8 falsch, 1 k.A.)

Willi, Xaver, Yvonne und Zita machen wieder ein Wettrennen. Willi war Erster oder Dritter. Xaver ist diesmal besser platziert als beim letzten Rennen, für den Sieg hat es aber nicht gereicht. Zita kam dieses Mal hinter Xaver ins Ziel. Yvonne war langsamer als Willi. An wievielter Stelle kam Willi ins Ziel?

Weshalb wurde diese Frage von ca. 90% gelöst?

Aufgabe 14 (10 richtig, 70 falsch, 6 k.A.)

Anton, Bea, Cian, Dora und Emil treffen sich im Park zum Fußballspielen. Es soll ein Match 2 gegen 2 gespielt werden und ein Kind ist Schiedsrichter. Emil hält immer zu Bea, deshalb darf er nicht der Schiedsrichter sein. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, so ein Match zu spielen?

Welche sprachlichen Stolpersteine hat die Aufgabe?

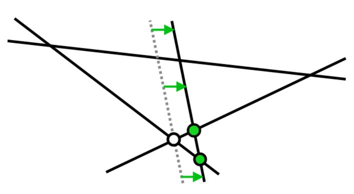
Aufgabe 15 (? richtig, ? falsch, 1 k.A.)

In Verkehrtland schreiben die Leute + wenn sie multiplizieren und • wenn sie addieren. Sie schreiben – wenn sie dividieren und : wenn sie subtrahieren. Deshalb ist dort z.B. 4 + 2 = 8. Zusätzlich vertauschen sie immer die Einerziffer mit der Zehnerziffer. Ihr findet in Verkehrtland die Rechnung: 27 : 45 =? Wie lautet das Rechenergebnis in Verkehrtland?

Was ist die Lösung? Wie viele hatten die Aufgabe richtig?

Analyse A13 (37 richtig, 47 falsch, 2 k.A.)

Hier seht ihr 4 Geraden, die einander in 4 Punkten schneiden. Die Geraden dürfen nicht übereinander liegen. Wie viele Schnittpunkte sind beim Zeichnen von 4 Geraden maximal möglich?



15 Teams haben „5“ geantwortet. Möglicher Grund: gedankliches verschieben einer Geraden und der falsche „aus-1-mach-2“-Gedanke. 14 Falschantworten „4“ suggerieren ein Überlesen bzw. Missverstehen von *„maximal“*.

Analyse A16 (27 richtig, 44 falsch, 15 k.A.)

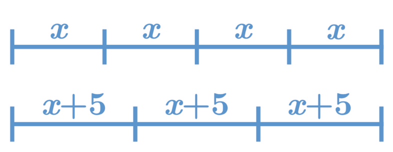
Lucy, Lea und Lorenz kaufen am Markt Orangen und Äpfel ein, insgesamt 30 Stück. Am Heimweg isst Lucy 2 Orangen und einen Apfel, Lea isst eine Orange und 3 Äpfel und Lorenz 2 Orangen. Zu Hause haben sie nun doppelt so viele Orangen wie Äpfel übrig. Wie viele Orangen haben sie am Markt eingekauft?

Das Aufstellen von z.B. 30–9=(2a)+a für die Apfelanzahl zu Hause, das Lösen auf a=7, das Umlegen auf 14 Orangen (zu Hause) und Rückrechnen auf 19 Orangen am Markt bietet unzählige Fehlerquellen beim Rechnen und Lesen. 15 Teams haben gar keine Antwort abgegeben.

Analyse A18 (10 richtig, 56 falsch, 20 k.A.)

Die Hälfte eines Stabes wird in 4 gleich lange Stücke zerlegt und die andere Hälfte wird in 3 gleich lange Stücke zerlegt. Die längeren Teile sind 5 cm länger als die kürzeren. Wie viele cm lang ist der ganze Stab?

Die unten skizzierte Lösung ist mit Vorerfahrung naheliegend, erfordert aber viele Teilschritte. Die Falschantworten lassen vermuten, dass viele Teams ohne Skizze gearbeitet und den Aufgabentext direkt in nicht weiter hinterfragte Rechnungen verwandelt haben. 20 leere Antwortfelder zeigen, dass vielen der Transfer „Text zu Gleichung/Rechnung“ nicht gelingen wollte.



$4x = 3(x+5)$
$\rightarrow x = 15$ cm
$\rightarrow L = 8x = 120$ cm

Takeaways und Kommentare

Auffällig war die geringe Lösungsquote aller Raumgeometrie-Aufgaben (4, 6, 11) und der Kombinatorik-/Zähl-Aufgaben (4, 6, 13, 14). Im Literaturabgleich ist das jedoch nicht überraschend – vgl. z.B. [1,2,5]. Der Faktor Geschlecht ist im m/w-Mixed-Format neutralisiert.

Ein dem Wettbewerb nachfolgender Fragebogen identifiziert den Zeitrahmen als bedeutsamen Faktor. Eine Korrelation mit dem Aspekt Semantik und Scheinlösungen ist möglich (Fehler beim Lesen oder bei der Lösungsreflexion aufgrund von Zeitdruck) – vgl. z.B. [3].

Teils erweist sich die Unkenntnis naheliegender Strategien bzw. Methoden als Primärhindernis. Andernorts sind Schlampigkeiten bei sonst erkennbar gutem Verständnis des Lösungswegs sichtbar. Die Abwägung „offenes vs. Multiple-Choice-Format“ ist angebracht – vgl. z.B. [4].

Die Beobachtungen motivieren **3 Thesen**, die beim Wettbewerbs-Aufgabenentwurf für die 5./6. Schulstufe berücksichtigt werden sollten:

These 1: Bestimmte mathematische Handlungen sind überproportional schwieriger

Räumliches Vorstellungsvermögen: Aufgaben mit räumlicher Vorstellungskraft als Lösungsvoraussetzung schnitten merklich schlechter ab. → siehe A6 (sowie A4 u. A11)
Systematisches Zählen und Kombinatorik: Mehrere Abzählaufgaben suggerieren unsystematische Vorgehensweisen und Schnellschüsse. → siehe A6, A13 (und A14)

These 2: Formale und mehrschrittige Lösungserwartungen sind erhebliche Hindernisse

Gleichungen & Terme: Es gibt Hinweise, dass bevorzugt intuitiv-logisch gearbeitet wurde, als Gleichungen/Terme aufzustellen. → siehe Aufgaben Nr. 16 und 18
Mehrschritt-Strategien: Viele Teilschritte bieten viele Fehlerquellen für die Ausarbeitung/Überprüfung/Reflexion. → siehe z.B. Aufgaben Nr. 16 und 18 (und A19)

These 3: Attraktive (Schein-)Lösungswege werden tatsächlich verfolgt

„Reinfaller“: Aufgaben, die kleinste Unaufmerksamkeiten beim Lesen bzw. Überlegen bestrafen, blieben unter den Erwartungen. → siehe A6, A13, A14 und A15
Richtigkeits-Attraktoren: die Aufgaben mit geringem Handlungsspielraum schnitten überdurchschnittlich gut ab. → siehe A12 (und Nr. 1-3)
Semantik- und Interpretationsfallen: ungünstige Formulierungen (Redundanz, Synonyme etc.) bringen die Schüler:innen auf Fehlinterpretationen → siehe A14 (u.a.)

[1] Maresch, G. (2021). *Räumliches Denken*. Informationsblätter der Geometrie (IBDG) . 1/2021, 40. 23-36. doi: https://doi.org/10.25598/ibdg/2021-1-7
[2] Stuhlpfarrer, D. (2023). *Raumvorstellung und Mathematikleistung am Ende der Sekundarstufe I.* Dissertation. Universität Graz.
[3] Lerchenberger, Evita & Donner, Lukas Markus. (2024). *It Is (Not) as Easy as It Seems: The Role of Distractors in Specific Tasks in the Mathematical Kangaroo.* doi: https://doi.org/10.1142/9789811279294_0006. In: Geretschläger, R. (Editor) (2024). *Engaging Young Students in Mathematics through Competitions — World Perspectives and Practices: Volume III – Keeping Competition Mathematics Engaging in Pandemic Times.* World Scientific.
[4] Geretschläger, R., Donner, L. (2022). *Writing and choosing problems for a popular high school mathematics competition.* ZDM – Mathematics Education (2022) 54:971-982. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01351-9
[5] Herzog, M., Fritz, A. & Ehlert, A. (2017). *Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse: Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte.* Journal für Mathematik-Didaktik (2017) 38:263-289. doi: https://doi.org/10.1007/s13138-017-0118-8

Bildungsdirektion Steiermark