Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

# Das Hüpfen auf der Zahlenlinie als Evidenzbasis für vertragsgemäßes Rechnen

Es wird über eine Weiterentwicklung eines Hüpfspiels berichtet, das an verschiedenen Stellen in der Mathematikdidaktik genannt wird, um Lernenden das Rechnen mit Ganzen Zahlen zu veranschaulichen. Wir dagegen haben dieses zu einer Mikrowelt für Lernende in Klasse 6 weiterentwickelt, deren Struktur die mathematische Theorie repräsentiert: Die Bewegungen sowie die Veränderung von Bewegungs- und Blickrichtung repräsentieren die Anwendung verschiedener Funktionen (unterschiedlicher Stellenzahl) in der additiven Abelschen Gruppe der Ganzen Zahlen.

Spätestens bei der Einführung des Begriffs der Ganzen Zahlen und dem Umgang mit ihnen stellt sich im Mathematikunterricht das Problem, mit den Lernenden den ontologischen Status mathematischer Objekte und den Beziehungen zwischen und den Umgang mit ihnen zu verhandeln sowie der Frage nachzugehen, was man sich unter der Wahrheitsfindung einer mathematischen Aussage vorstellen kann. Ein direkter Zugang zur axiomatischen Sichtweise der Mathematik - wie er in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts versucht wurde - hat sich nicht bewährt. Denn danach wurde versäumt, den Lernenden ein geeignetes Metaphernsystem zur Verfügung zu stellen, in dem sie sich diesen Zugang prinzipiell zurechtlegen könnten.

Bei dem von uns konzipierten Vorgehen (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2012) wird deshalb ein Schwerpunkt darauf gelegt, den Lernenden eine Metaphernwelt des regelgerechten Verhaltens in einer Mikrowelt bewusst zu machen: Die Bedeutung der Worte zur Bezeichnung der jeweiligen Gegenstände, der mit ihnen auszuführenden Tätigkeiten und der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen wird durch das Regelsystem der Mikrowelt festgelegt.

Ausgangspunkt unserer Einführung ist die Analyse des "vernünftigen" Verhaltens einer Bank beim Umgang mit Soll und Haben sowie mit Einzahlungen und Auszahlungen. Das bei Lernenden in Klasse 6 darüber vorhandene intuitive Wissen bildet die Evidenzbasis, auf Grund deren sie beurteilen sollen, ob sich gemachte Vorschläge für ein rigide zu handhabendes Vertragswerk mit einer "Mathebank" zum Umgang mit Soll und Haben bewähren. Dabei wird auch eine Vereinfachung des Vertragswerkes dadurch erreicht, dass Auszahlen als eine geeignete Kombination von Einzahlen und Gegenzahlbildung angesehen wird. Dieses wird der Prototyp von Definitionen. Dann wird ein solches Vertragswerk (für Abelsche Gruppen) als verabredet angesehen, und es werden Konsequenzen aus ihm gezogen, was nichts anderes ist als das Beweisen von Rechenregeln (Sätzen in der Theorie). Durch Abschneiden des Bankkontextes von diesem formal präzise notierten Vertragswerk entsteht das Vertragswerk zum Umgang mit Zahlen. Die ursprüngliche Evidenzbasis für die Sinnhaftigkeit des Vorgehens erhält den Status eines Modells (i. S. der mathematischen Logik) für dieses Vertragswerk.

Als zweites Modell wird das von uns weiter entwickelte Hüpfspiel eingesetzt. Dazu muss diese Modellwelt neben einem ausgezeichneten Gegenstand auch eine Interpretation der zweistelligen Rechenfunktion(svariable) sowie der einstelligen Inversenfunktion(svariable) bereitstellen: Die Objekte werden durch Positionen auf der Zahlenlinie repräsentiert; die zweistellige Rechenfunktion durch Hüpfen einer Spielfigur auf dieser; die einstellige Inversenfunktion durch die Festlegung der Hüpfrichtung. Darüber hinaus ist ein Nachweis zu führen, dass die durch eine Definition eingeführte zweite Rechenfunktion bei deren konsequenter Anwendung auch der intuitiv vorhandenen Vorstellung von der Umkehrung der ersten Rechenfunktion entspricht. Außerdem müssen die Bezeichnungen im Hüpfspiel so gewählt werden, dass alle in der mathematischen Termdarstellung denkbaren Kombinationen der Funktionen ohne "Nachbessern" oder nur fast perfektes Anwenden der Verabredungen funktionieren. Insbesondere sollte eine leicht vermittelbare Isomorphie zwischen der Mikrowelt und der zu erarbeitenden mathematischen Theorie herrschen, die sich auch in der Korrespondenz der zur Beschreibung notwendigen Bezeichnungssysteme niederschlägt.

Die bisher uns aus der Mathematikdidaktik bekannten Hüpfspiele genügen diesen Anforderunen nicht:

Im Schulbuch *mathe live* (Kliemann et al., 2009, S. 9) ist die Bezeichnung der Positionen auf der Hüpflinie nicht geeignet, denn beim Zusammenschalten von Vorzeichen und Rechenzeichen in algebraischen Ausdrücken hilft dieses Hüpfspiel den Lernenden gerade nicht weiter; die Inversenbildung wird nicht thematisiert; ausgeführt werden nur die beiden zweistelligen Rechenfunktionen; die Einbettung des "Vorzeichens +" in die Hüpfwelt funktioniert nicht so, wie aus mathematischer Sicht benötigt.

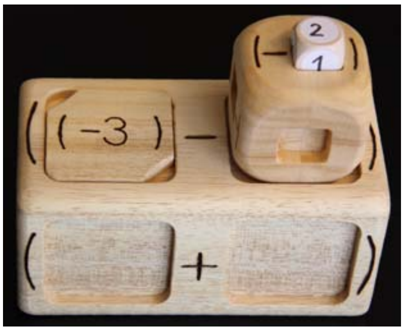
Im Schulbuch *Neue Wege Mathematik* (Lergenmüller & Schmidt, 2001, S. 131) sind die Bezeichnungen für die Positionen auf der Hüpflinie mit den gestellten mathematischen Anforderungen kompatibel (dagegen taucht im rechten Tafelbild plötzlich ein posites Vorzeichen auf!); auch gibt es für die ein- und zweistelligen Funktionen passende Interpretationen (als Anweisungen im Spiel), aber beim Hintereinanderschalten von zwei gleichen Rechenfunktionen ist nicht problematisiert, wie diese zweite ausgeführt werden soll: gar nicht (weil man schon passend steht) oder Drehung um 360°. Deshalb haben wir die Ausführung einer Hüpfbewegung immer mit der Drehung der Spielfigur in eine neutrale Position abgeschlossen.

Bei den von Barzel et al. (2007) gemachten Vorschlägen gibt es als neue Idee die Einführung von Würfeln, mit denen in einem Wettbewerb auszuführende Rechnungen erwürfelt werden, aber die Ausführung im Detail enthält aus mathematischer Sicht gravierende Mängel: Auch hier wird beim Hintereinanderschalten von zwei gleichen Rechenfunktionen nicht problematisiert, wie diese zweite ausgeführt werden soll; die Notation von Spielzügen entspricht in der Syntax nicht der der mathematischen Formelsprache; der Inversenbildung entspricht kein Spielzug; die Ausgestaltung des Würfelns eines Rechenzeichens unterstützt überhaupt nicht, dass diese Funktionen zweistellig sind.

Für die von uns konzipierte Mikrowelt *Hüpfen auf der Zahlenlinie* übernehmen wir von Barzel et al. (2007) die Idee eines Wettkampfes mit Erwürfeln von Rechentermen. Aber wir setzen drei Würfel ein, um in der Mikrowelt das Einsetzen der Funktionsterme zu repräsentieren: den Rechenzeichenwürfel mit zwei Leerstellen, den Bewegungsrichtungswürfel mit einer Leerstelle und den Zahlenwürfel. Wir führen im Folgenden den Umgang mit der von uns konzipierten Mikrowelt vor:

Wir nehmen an, dass die Spielfigur auf *(–3)* in einer neutralen Position steht. Nun wird mit den drei Würfeln eine auszuführende Würfelkonstellation erzeugt. Nehmen wir an, dass der Rechenzeichenwürfel so rollt, dass ein Minuszeichen oben liegt. Dann wird in seine linke Leerstelle - entsprechend der Position der Spielfigur - die Holzscheibe mit der Aufschrift *(–3)* gelegt. Nehmen wir an, dass nach dem anschließenden Würfeln mit dem Bewegungsrichtungswürfel dieser so liegt, dass dass die Aufschrift *(–   )* oben liegt; nehmen wir an, dass nach dem Würfeln mit dem Zahlenwürfel die Aufschrift *2* oben liegt. Dann wird zunächst der Zahlenwürfel passend in die Leerstelle des Bewegungswürfels gelegt und dann beide zusammen in die rechte Leerstelle des Rechenzeichenwürfels.

Jetzt wird diese Konstellation *((–3) – (–2))* in eine Abfolge von Bewegungen umgesetzt:

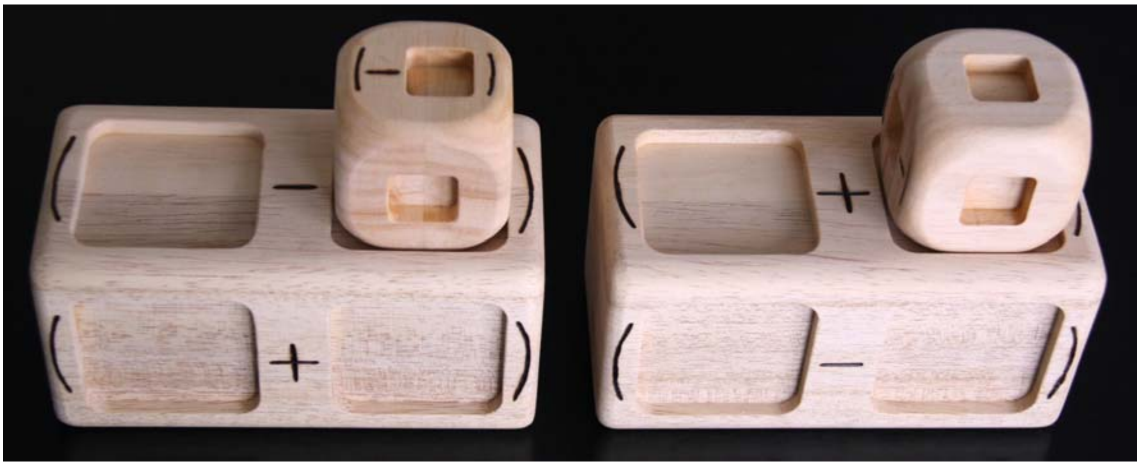


Drehe das Gesicht der Spielfigur, die auf der Position *(–3)* steht, aus der neutralen Position so, dass sie nach links schaut; bewege die Spielfigur rückwärts zu ihrer Blickrichtung, und zwar um 2 Positionen; die Spielfigur steht dann auf der Position *(–1)*; drehe das Gesicht der Spielfigur wieder in die neutrale Position.

Nach einiger Spielerfahrung kann man den Lernenden folgende Frage stellen: Gibt es zu der ausgeführten Würfelkonstellation eine andere, die bei gleicher Ausgangsposition dasselbe Ergebnis liefert?

Die Lernenden entdecken, dass der Bewegungsablauf "Spielfigur nach links schauen lassen und dann rückwärts gehen" wirkungsgleich ersetzt werden kann durch "Spielfigur nach rechts schauen lassen und dann vorwärts gehen". Sie entdecken, dass man für diese Einsicht weder die Information über die Startposition noch die des Zahlenwürfels benötigt.

Auf die Frage, wie man diese Einsicht mit Würfeln legen könnte, schlagen sie vor, die linke Leerstelle im Rechenzeichenwürfel und die Leerstelle im Bewegungsrichtungswürfel jeweils leer zu lassen und beide Würfelkonstellationen nebeneinander zu legen. Das folgende Foto symbolisiert deutlich die Darstellung unter Verwendung von Variablen.



Man kann mit den Lernenden diese Einsicht in zwei Richtungen ausdeuten: Auf der Ebene der *Wirkung von Bewegungen* haben wir einen Satz erarbeitet; auf der Ebene des *Vertragsgemäßen Rechnens* haben wir eingesehen, dass wir im Vertragswerk nicht die Wirkungsweise von *zwei* Rechenfunktionen verankern müssen, sondern dass wir durch eine Definition die zweite durch geeignetes Einsetzen der Inversenfunktion in die Rechenfunktion erzeugen können.

## Literatur


Barzel, B., Eschweiler, M. & Malle, G. (2007): Mathe-Welt, Lernwerkstatt Negative Zahlen, mathematik lehren, Heft 142. Seelze: Friedrich.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2012): Vertragsgemäßes Rechnen, 2. überarbeitete Auflage. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kliemann, S. et al. (2009): mathe live: Mathematik für Sekundarstufe I, Klasse 6. Stuttgart: Klett.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hrsg.) (2001): Mathematik – Neue Wege 7, Arbeitsbuch für Gymnasien. Braunschweig: Westermann.