Martin RATHGEB, Siegen

## Wie wird Arithmetik zu Algebra? Didaktische Aspekte der Brownschen Arithmetik

Im Folgenden möchte ich die *Anwendung mathematikdidaktischer Konzepte* innerhalb meines mathematikphilosophischen Dissertationsprojektes vorstellen und darauf hinweisen, dass George Spencer-Browns „Laws of Form" m.E. als *Lektüre in Lehrveranstaltungen* zur Schulalgebra an der Hochschule verwendet werden kann. Zunächst geht es mir um *zentrale Aspekte der Primärquelle*.

### 1. Zentrale Aspekte der „Laws of Form"

In diesem Beitrag wird der *Übergang zwischen Arithmetik und Algebra* beobachtet, der in George Spencer-Browns mathematischem Essay „Laws of Form" (LoF) erfolgt; genauer: Es geht um den Übergang von einer *Arithmetik als Kalkül* zu einer *Arithmetik als Theorie über diesen Kalkül*. Der Umschwung von der *Innenansicht* zur *Außenansicht* bzgl. einer formalen Arithmetik wiederholt sich für die Algebra. – Browns Algebra inkl. ihrer Arithmetik ist allerdings nicht die der Schulmathematik, sondern eine *Sonderform Boolescher Algebren*, also eine Variante der klassischen Aussagenlogik. Zudem geht obige Spezifikation innerhalb der Arithmetik sowie der Algebra und weiter die Unterscheidung zwischen der Algebra und der (Meta-)Theorie zur Arithmetik über die schulische Perspektive auf Mathematik hinaus. – Bemerkenswert an der Entstehung von LoF ist m.E., dass der Autor die Booleschen Algebren zunächst *arithmetisieren* musste; die Niederschrift folgt dann allerdings wieder dem üblichen Vorgehen, wonach die Arithmetik *algebraisiert* wird. – Weiter ist LoF ein Beitrag zum Themenfeld adäquater *Grundlegung der Mathematik*; LoF liefert insbesondere eine *Rechtfertigung der Logik* durch ihre Rekonstruktion als korrekter Zeichengebrauch; genauer: als bestimmter Teil des Umgangs mit *Unterscheidungen* und *Bezeichnungen* in der Lebenswelt.

In LoF Kap. 1 sind die im Titel „Laws of Form" genannten *Gesetze* zu finden; sie bilden zusammen mit dem Unterscheidungskonzept den systematischen Anfang des Buches. Ich passe ihre Formulierung an die nachfolgend aus technischen Gründen verwendete Notation (mittels eckiger Klammern) ihrer in Kap. 2 gegebenen Formalisierung zu zwei *Formen* an:

1. *Gesetz des Nennens*: Wieder-Nennen ist Nennen.
   *Form der Kondensation*: [][]=[]

2. *Gesetz des Klammerns*: Wieder-Klammern ist nicht Klammern.
   *Form der Aufhebung*: [[]]=

Gemäß Vereinbarung des Autors mit dem Leser gelten die Gesetze und Formen im Hinblick auf folgendes Sprachspiel: Im Diskursuniversum wird lediglich über zwei *Zustände* gesprochen – den *markierten* und den *unmarkierten*; auf den ersten verweist die Anwesenheit, auf den zweiten die Abwesenheit von []: Es kann also [] als „Nennen" des markierten Zustands und [][] als „Wieder-Nennen" gelesen werden. – Weiter wird [] als *Kondensation* von *deskriptivem* und *injunktivem* Zeichengebrauch vereinbart, insofern *die* Klammern als *Name* für den markierten Zustand gelten (Sichtweise von [] als Operand) und *das* Klammern mittig abwesender Klammern als *Injunktion* gilt, die auf den markierten Zustand als auf *den anderen* bzgl. des mittig angezeigten unmarkierten Zustands hinweist (Sichtweise von [] als Operator). – Das liefert im Gesetz des Klammerns, in der Form der Aufhebung und in der üblichen Abgrenzung der Syntax von der Semantik je eine weitere *Kondensation*.

## 2. Anwendung mathematikdidaktischer Konzepte

In diesem Abschnitt zeige ich, wie das Rechnen in dieser *Arithmetik ohne Zahlen* entwickelt und von Arithmetik zu Algebra übergegangen wird.

Ein *Präliminarium*: In Schul- und LoF-Mathematik läuft manches parallel, manches antiparallel; beachtet man solche Zusammenhänge, so kann man über beide Mathematikformen lernen. Bspw. wird in ersterer üblicherweise die Arithmetik algebraisiert (vgl. Malle 1993 Kap. 6); in letzterer dagegen erfolgt zwar die Formalisierung der Algebra im Rückblick auf die Arithmetik, doch ist diese im Hinblick auf die Algebra konzipiert. In LoF ist also das Gleichheitszeichen sogleich als *Vergleichszeichen* konzipiert: In Kap. 2 zeigen die beiden Formen *Äquivalenzen* an und verweisen die Terme einer Gleichung auf denselben Wert. In Kap. 3 wird für jegliche Terme *vereinbart*, dass der *Wert* eines Terms der Wert *des* einfachen Terms ist, der durch *Vereinfachung* erreicht wird, wobei die *einfachen Terme* [] und „" sind (dabei ist „" die Explikation der Abwesenheit von []), also die rechten Seiten der Formen, mit markiertem bzw. unmarkiertem Zustand als Wert. Ist das *Resultat* der Vereinfachung eines gegebenen Terms invariant bzgl. des konkreten *Prozesses*? Ist also der Wert eines Terms wohldefiniert? Wie vereinfacht man auf erlaubte Weise? – Die Beantwortung der Fragen erfolgt in umgekehrter Reihenfolge.

Die *LoF-Arithmetik*: Jeder *Term* der Arithmetik ist ein einfacher Term oder eine Zusammensetzung solcher. *Rechnen* heißt in LoF, Terme gemäß den erlaubten Umformungen zu ändern, wobei als Umformungen folgende *Schritte* erlaubt sind: [][]→[] sowie [[]]→„" als vereinfachende und []→[][] sowie „"→[[]] als verkomplizierende; diese vier Schritte werden in Kap. 3

aus den *Äquivalenzen* von Kap. 2 genommen, die dafür in beide Richtungen als *Zuweisungen* gelesen werden (vgl. Rathgeb 2011). Mittels dieser elementaren Umformungen wird in Kap. 3 [[][]][]=[] gezeigt, alle weiteren arithmetischen Äquivalenzen werden in Kap. 4 von außen bzw. als Gegenstand der (Meta-)Theorie behandelt. Erprobt der Leser dagegen selbst die Konsequenzen der erlaubten Transformationen, so stellt er bspw. fest, dass die Terme [][], [[]][], [[]][][] allesamt auf [] vereinfacht werden können, der letzte etwa so [[]][][]→[] []→[] oder so [[]][][]→[[]][]→[]. Kann man das Resultat bereits am Term bzw. an dessen Aufbau erkennen, ohne einen Vereinfachungsprozess explizit zu durchlaufen? – In LoF ist von *Mustern* die Rede, womit direkt auf „Theoreme“ (LoF, 12) und auf „Konsequenzen“ (LoF, 25) verwiesen wird und damit indirekt auf Muster in Termen und in Argumentationen.

Eine *Didaktik-Optik*: Lisa Hefendehl-Hebeker weist in ihrem Aufsatz „Wege zur Formelsprache“ die „Einführung in den verständigen Gebrauch der Formelsprache [als] eine didaktische Herausforderung“ (S. 66) aus und zudem auf sich wiederholende Stufen hin; dabei ist die fünfte Stufe der ersten prinzipiell gleich, sie liegt allerdings auf höherer Ebene (vgl. S. 68f.). Diese Stufenfolge wird für die Beschäftigung mit dem harmonischen Dreieck in der Schulmathematik vorgeführt, sie ist m.E. aber auch geeignet, um den von Spencer-Brown in LoF Kap. 4 konzipierten Weg durch eine (Meta-)Theorie der formalen Arithmetik zu beschreiben. – Auf Stufe 1 „Muster erkennen“ wird aus Sicht des Lernenden ein Muster vermutet; in der LoF-Arithmetik bspw.: Ein LoF-Term, in welchem neben dem Restterm ein einzelnes Klammernpaar steht, lässt sich auf das Klammernpaar vereinfachen (vgl. obige Frage); ein Pendant aus der Schularithmetik ist bspw.: Das Produkt einer bel. Zahl mit Null ist Null. – Auf Stufe 2 „Inhärente Strukturen erfassen“ wird „strukturierte Arithmetik“ betrieben, d.h. ein prototypisches Beispiel betrachtet: Vereinfacht man [[[][]]][][] derart, dass die Umformung jeweils möglichst weit links erfolgt, so erhält man [[[][]]][][]→[[[]]][][]→[][][]→[][]→[]. Zwar kann der Term auch anders vereinfacht werden, doch kann das [] rechts außen bis zuletzt stehen bleiben. Diese Äquivalenz von Termen des genannten Musters mit [] ist in Theorem 2 zunächst in Worten beschrieben, d.i. „verbale Algebra“ (S. 68). – Die Formulierung der Aussage, die noch vor Beweisbeginn mittels bezeichnender Buchstaben(-kombinationen) erfolgt, und der Beweis selbst, der hauptsächlich mittels Fallunterscheidung geführt wird, liegen bereits auf Stufe 3 „Symbolisches Beschreiben – Darstellen und Begründen“. – Theorem 3, das die Wohldefiniertheit des Werts für jeden Term behauptet und Theorem 2 als Lemma benutzt, kann zwar auf Ebene 2 formuliert werden, doch liegt sein Beweis auf Ebene 4 „Symbolisches Explorieren –

Formeln manipulieren und interpretieren“: Spencer-Brown gewinnt aus weiteren Vereinbarungen mit dem Leser ein Verfahren der Wertbestimmung, das von jedem konkreten Vereinfachungsprozess mittels Schrittfolgen unabhängig ist. – Auf Ebene 5 „Neue Muster erkennen – der kreative Blick“ kann man bspw. die beiden Formen aus Kap. 2 mittels Buchstaben systematisch modifizieren und die entstehenden Termgleichungen mittels Fallunterscheidung auf ihre Gültigkeit hin untersuchen: [a][a]=[a], [[a]]=a, [[a]a]=„“, aa=a, [[a]b]a=a u.ä.; Spencer-Brown selbst geht anders vor: Er zeigt zunächst, dass der *Wert* eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Terme der LoF-Arithmetik induziert; genauer: Die Reflexivität und Transitivität des als symmetrisch konzipierten Gleichheitszeichens werden explizit bewiesen; er zeigt weiter zwei Äquivalenzen zwischen vier Termmustern. Im Anschluss (Kap. 5) wechselt er seine Perspektive und betrachtet nicht mehr die LoF-Arithmetik von außen, sondern definiert vor dem erkundeten arithmetischen Grund die formale LoF-Algebra. Muster algebraischer Terme werden in Kap. 6 unter einer Innenperspektive behandelt, in Kap. 7 unter einer Außenperspektive.

## 3. „Laws of Form“ als Lektüre in Lehrveranstaltungen

Ich halte *LoF als Lektüre* in einer bzw. für eine Veranstaltung zur Schulalgebra an der Hochschule für geeignet, insofern verschiedene Thematiken „in a nutshell“ auftreten: das Wechselverhältnis zwischen Arithmetik und Algebra sowie zwischen präformalen, formalen und postformalen Bereichen innerhalb von Arithmetik und von Algebra; verschiedene Variablenaspekte; verschiedene Beweistypen (inhaltlich, formal, experimentell); Formeln als Notationsformen für „Muster“; etc. Damit kann LoF zur *konstruktiven Irritation* eingesetzt werden, insofern den Lehrämtlern dort in verfremdeter Form und damit als neue Herausforderung begegnet, was ihnen in der Schulmathematik vertraut geworden, sie aber zukünftig den SuS als neuen Lernstoff zu lehren haben.

## Literatur


Hefendehl-Hebeker, L. (2008): Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: Unikate 33/2008, 66–71.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Spencer-Brown, G. (1997): Laws of Form – Gesetze der Form. Übersetzung: Thomas Wolf. Lübeck: Bohmeier Verlag. (erstveröffentlicht 1969 in Englisch)

Rathgeb, M. (2011): Zeichen defizient verstehen. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., Rathgeb, M.: Mathematik Verstehen – Philosophische und Didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 27–46.