

LENSING, Felix
Berlin

Friedrich Drenckhahns Überlegungen zur disziplinären Identität der Mathematikdidaktik

Vor mehr als einem halben Jahrhundert hat Friedrich Drenckhahn in einer Reihe von Aufsätzen dafür argumentiert, dass es eine der Kernaufgaben der mathematikdidaktischen Forschung darstellt, den „mathematischen Unterrichtsstoff“ mit der „jeweiligen entwicklungsbedingten Auffassungsfähigkeit des Schülers“ (Drenckhahn, 1952, S. 348) zu koordinieren.

Dabei hat Drenckhahn, und das macht seine Überlegungen auch heute noch aktuell und anschlussfähig, sehr klar gesehen, dass diese doppelte Anpassungsleistung nur dann gelingen kann, wenn man sich sowohl von einer *rein fachmathematischen* als auch von einer *rein psychologischen* Forschungseinstellung löst: Der Berufsmathematiker, „für den Mathematik nur der nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten hergeleitete und in wissenschaftliche Systematik gepresste Stoff ist“ (ebd.), übersieht, dass „Mathematik *unterrichtet* werden soll“ (ebd.). Der Psychologe, „der den Unterrichtsstoff als das Ergebnis einer Integration und Transformation kindgemäßer Auffassungsweisen ins Mathematische sieht“ (ebd.), verliert aus dem Blick, dass „*Mathematik unterrichtet* werden soll“ (ebd.).

Wer jedoch eine *dezidiert mathematikdidaktische* Forschungseinstellung einnimmt und „in voller Würdigung [...] der psychologischen Gegebenheiten des Lernenden einer sachlichen Normierung der Unterrichtsgestaltung zustimmt, wird die Lehre von der Lehre [= die Didaktik] zunächst als eine Funktion des Stofflich-Gegenständlichen erkennen“ (Drenckhahn, 1978, S. 7). Die *fachwissenschaftliche* Darstellung dieses ‚Stofflich-Gegenständlichen‘, so Drenckhahn weiter, darf jedoch nicht verabsolutiert werden, sondern muss als „Endglied einer Entwicklung von Architekturen [aufgefasst werden], die das mathematische Denken ersonnen hat“ (Drenckhahn, 1965, S. 4): „Jedes Gebiet der Schulmathematik verträgt Darstellungen in verschiedenen logischen Höhenlagen. Je nach der Abgezogenheit und Allgemeinheit der Begriffe wie Tragfähigkeit der Herleitungsweisen entstehen dabei Mathematiken verschiedener Höhenlage“ (Drenckhahn, 1978, S. 4). Die Leitfrage lautet hierbei: „Welche möglichen Stufen der Mathematik ergeben sich sachnotwendig dem menschlichen Tun und Denken?“ (Drenckhahn, 1978, S. 9) Und indem die Mathematikdidaktik dieser Frage nachgeht, indem sie gewissermaßen die „Mathematik im Werden“ (Drenckhahn, 1965, S. 4) untersucht und auf diese Weise „Mathematiken verschieden hoher Erkenntnislage“ (Drenckhahn, 1952, S. 349) rekonstruiert, stellt sie in Rechnung,

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

dass es auf allen Stufen der mathematischen Bildung *Mathematik* ist, die unterrichtet wird.

Bei der Ausarbeitung dieser Mathematiken handelt es sich jedoch noch keineswegs „um den unterrichtsfertigen Stoff, sondern um ihn in der Darstellung in verschiedenen Höhen seiner Gegenstandslogik, [und zwar] unabhängig vom Unterrichtsdenken“ (ebd.). Weil die Mathematiken unterschiedlicher Höhenlagen *zu unterrichten* sind, muss diese „stoffliche Unterlage“ (ebd.) nach Drenckhahn in einem weiteren Schritt an die entwicklungsbedingten Voraussetzungen der Lernenden angepasst werden. Dieses Forschungsfeld bezeichnet Drenckhahn auch als *Methodik des mathematischen Unterrichts*, die er von der genetisch angelegten *Didaktik des mathematischen Stoffes* wie folgt abgrenzt:

„Die Grenze [vom Didaktischen i. e. S.] zum *Methodischen* ist durch die Feststellung gegeben, daß die Methodik nicht auf den mathematischen Stoff, sondern den mathematischen *Unterricht* geht. Sie ist psychologisch orientiert und erhält ihre Marschrichtung durch die Pädagogik. Ihre Aufgabe ist, das in der Didaktik der Mathematik [i. e. S. d. W.] von seinem Ursprung bis zur wissenschaftlichen Systematisierung in Stufen bereitgestellte Gegenständliche unter dem Gesichtspunkt des Psychologischen, nämlich der jeweiligen altersmäßig gebundenen geistig-seelischen Auffassungsfähigkeit und Entwicklungstendenz des Jugendlichen, wie des Pädagogischen, nämlich des Zieles des Unterrichts der jeweiligen Schule und des jeweiligen Alters, auszuwählen, und sodann Wege aufzuzeigen, die von Station zu Station zu dem betreffenden Erkenntnisziel führen“ (Drenckhahn, 1978, S. 8).

Drenckhahn macht sich hier also für die These eines *Primats* der Didaktik im Verhältnis zur Methodik stark. Zwar kann die Mathematikdidaktik bei einer *rationalen* Rekonstruktion der ‚Mathematiken verschiedener Höhenlagen‘ nicht stehen bleiben, sondern sie muss sich, in Fragen der Unterrichtsgestaltung, auch den *empirischen* Erkenntnissen der Psychologie öffnen. „Jedoch darf das unterrichtsmethodische Denken auf keinen Fall der Psychologie so weit Raum geben, daß diese [...] von sich aus die Stoffstruktur zu gestalten versucht“ (ebd.). Denn: „Geschieht es doch, so zeigt sich bald, daß hinsichtlich des Mathematischen nicht immer alles in Ordnung ist“ (ebd.).

Zur Aktualität der Drenckhahn’schen Überlegungen

Aus diesen Überlegungen lässt sich nun eine *dreistufige Forschungsprogramm* gewinnen: Die Mathematikdidaktik beginnt 1) mit einer genetischen Epistemologie, das heißt, mit einer rationalen Rekonstruktion der Stufenfolge der mathematischen Erkenntnisweisen; und sie schreitet dann fort

und arbeitet, auf der Grundlage des stufenbezogenen Stils der Erkenntnis, 2) stoffliche Darstellungen der (Schul-)Mathematik in der jeweiligen Höhe- lage aus, um sich dann, als Methodik des mathematischen Unterrichts, schließlich 3) den unterrichtlichen Gestaltungsfragen zuzuwenden.

Was ist nun zu dieser Programmatik aus heutiger Sicht zu sagen? Ist sie auch für die Mathematikdidaktik der Gegenwart noch immer von Relevanz?

Mit Blick auf die *unterrichtlichen Gestaltungsfragen* wird man zunächst kri- tisch festhalten müssen, dass Drenckhahn die Komplexität des Mathematik- unterrichts wohl unterschätzt hat. Schon die theoretische Beschreibung eines mathematischen Lehr-Lernprozesses kann, da er die psychische und soziale Sphäre des Mathematikunterrichts übergreift, von einem psychologischen Standpunkt aus nicht in adäquater Weise gelingen. Eine *Methodik des ma- thematischen Unterrichts*, die sich mit der Gestaltung derartiger Prozesse be- fasst, kann daher nicht ‚psychologisch orientiert‘ sein, sondern muss einen theoretischen Standpunkt einnehmen, der die *Beziehungen* zwischen der psychischen und der sozialen Sphäre in den Blick zu nehmen vermag. Ich habe an anderer Stelle dafür argumentiert, dass die Luhmann’sche Sys- temtheorie einen solchen Standpunkt bereitstellen könnte (Lensing, 2021).

Was jedoch die beiden ersten Schritte der Programmatik anbelangt, so haben sie, wie mir scheint, auch heute noch nichts von ihrer Aktualität verloren. Insbesondere ist es, seit den frühen Arbeiten Drenckhahns, m. W. nur noch selten gelungen, die *rationalen* und *empirischen* Anteile der mathematikdi- daktischen Forschungsaufgabe so trennscharf herauszuarbeiten, wie Drenck- hahn es getan hat. Drenckhahn hat nämlich sehr deutlich gesehen, dass es für die Arbeit an einer genetischen Epistemologie einer ganz anderen For- schungseinstellung bedarf als im Fall einer Historie oder Entwicklungspsy- chologie der Mathematik. Die Leitfrage der *genetischen Epistemologie* ‚Welche möglichen Stufen der Mathematik ergeben sich sachnotwendig dem menschlichen Tun und Denken?‘ (s. o.) darf weder mit der *geschichtswis- senschaftlichen* Frage ‚Welche Stufen der Mathematik haben sich tatsäch- lich in der Entwicklung der Menschheit gezeigt?‘ (Drenckhahn, 1978, S. 9) noch mit der *entwicklungspsychologischen* Frage ‚Welche Stufen der Ma- thematik durchläuft der einzelne Mensch typischerweise in seiner kognitiven Entwicklung?‘ verwechselt werden. Wenn man sich in epistemologischer und also rationaler Forschungseinstellung an die Geschichte der Mathematik wendet, so interessieren die Stufen der Mathematik, die man dort antrifft, nicht als ‚Tatsachen der geschichtlichen Entwicklung‘ (Drenckhahn, 1978, S. 10), sondern sie interessieren nur insofern, als sie ‚Gewähr für eine eini- germaßen vollständige Registrierung der sich notwendig ergebenden Mög- lichkeiten leisten [...], wobei aus der zeitlichen Abfolge nur vorsichtige

Schlüsse gezogen werden dürfen (ebd.). Und ebenso erblickt die genetische Epistemologie auch in den ‚Tatsachen der kognitiven Entwicklung‘, also in den Stufen der Mathematik, welche sich im faktischen Gang aufweisen lassen, den die mathematische Entwicklung von Menschen unter bestimmten kulturellen Umständen typischerweise nimmt, nur verwirklichte Entwicklungsmöglichkeiten. Die genetische Epistemologie interessiert sich also weder für die soziale noch für die psychische *Wirklichkeit* der mathematischen Entwicklung, sondern sie zielt, wenn sie sich diesen Wirklichkeiten zuwendet, auf die Freilegung der *Bedingungen ihrer Möglichkeit*. Sie will nicht *erklären*, wie sich die mathematische Erkenntnisentwicklung in der Menschheitsgeschichte faktisch vollzogen hat und auch nicht, wie sie sich in diesem oder jenem Einzelmenschen faktisch vollzieht, sondern sie will *aufklären*, wie mathematische Erkenntnis überhaupt möglich ist und welche Bildungsstufen sie dabei notwendigerweise durchlaufen muss.

Diese Forschungsaufgabe gesehen und zu präziser Bestimmung gebracht zu haben, ist m. E. ein großes Verdienst Drenckhahns. Und wenn es, in den letzten 70 Jahren auch durchaus immer wieder mathematikdidaktische Forschungsbemühungen gegeben hat, die in diese Richtung zeigen. Man denke hier etwa an Van Hieles Stufen des geometrischen Denkens (van Hiele, 1999), an David Tall's ‚three worlds of mathematics‘ (Tall, 2004) oder an die Arbeiten von Burscheid und Struve (Burscheid & Struve, 2020). So ist die systematische Ausarbeitung einer solchen Stufentheorie der mathematischen Erkenntnis meines Wissens doch bis heute ein Desiderat geblieben.

Literatur

- Burscheid, H. J., & Struve, H. (2020). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Springer Spektrum.
- Drenckhahn, F. (1952/1978). Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 5(1), 205 – 211. Reprinted in: H.-G. Steiner (Ed.) (1978): *Didaktik der Mathematik* (S. 3 – 18). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Drenckhahn, F. (1952). Von der Anpassung des mathematischen Unterrichtsstoffes an die geistige Auffassungsfähigkeit des Schülers. *Die Sammlung*, 7(1), 348–358.
- Drenckhahn, F. (1956). Strukturstufen der Schulmathematik in Anpassung an alterstypische Auffassungsweisen. *Pädagogische Blätter*, 7(1), 237–244.
- Drenckhahn, F. (1965). Mathematische Strukturen im Elementarunterricht. *Die deutsche Schule*. 57, 1965, 1–22.
- Lensing, F. (2021). *Das Begreifen begreifen: Auf dem Weg zu einer funktionalistischen Mathematikdidaktik*. Springer VS.
- Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the learning of mathematics*, 23(3), 29-33.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, 5(6), 310-316.