

Ervin DEÁK, Budapest

Über gewisse begriffliche Probleme der Messung von Punktmengen in der Ebene (Flächeninhalt)

1. Die bekannte – und auch in die Schulmathematik integrierte – *Archimedische Kreismessung* ist ein aus praktischer Sicht geniales, *sehr spezielles*, konkretes Messverfahren zur Berechnung der Kreisfläche (und der Kreisperipherie): (a) Es werden *regelmäßige* – einbeschriebene und umbeschriebene – Vielecke benutzt, (b) die Seitenanzahl wird in jedem Schritt *verdoppelt*, (c) die Folge der Seitenanzahlen *beginnt mit 6*. *Praktischer Vorteil*: Sehr einfache (und schöne!) Rekursionsformeln (die sich auch ganz leicht programmieren lassen).

2. Die berühmte *Archimedische Parabelquadratur* (Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments)¹ ist eine nicht minder genial gewählte, ebenfalls sehr spezielle Exhaustionsmethode mit dem praktischen Vorteil, dass die Rekursion auf eine leicht summierbare konvergente geometrische Reihe (mit dem Quotienten $1/4$) führt.

3. Beide Verfahren weisen aber dieselben theoretischen Mängel auf: (I) Es fehlt ein „allgemeiner“ Flächeninhaltsbegriff.² (II) Die Vielfalt der möglichen Messmethoden bleibt unberücksichtigt; es fehlen die nötigen Existenz- und Äquivalenzgarantien.

4. Diese begrifflichen Fehler treten auch z. B. bei den beiden wichtigsten modernen, allgemeinen Messmethoden auf: Beim *Jordanschen Inhalt* (J-Inhalt) und beim *Riemannschem bestimmten Integral* (R-Integral).³

¹ Gemeint ist die rein geometrische Version (die andere beruht auf einem statischen Modell).

² In der griechischen Mathematik gab es überhaupt keinen fundierten Begriff des zahlenmäßigen Flächeninhalts (das wäre auch unmöglich gewesen); im Hintergrund der praktischen Exhaustionsverfahren standen – statt einer begrifflichen Basis – bloß verschwommene Vorstellungen. Die heutige Schulmathematik weist eine starke Analogie zu dieser historischen Situation auf.

³ Beim J-Inhalt haben wir die Vielfalt der Wahl eines Ausgangs-Quadratgitters und dessen sukzessiven Verfeinerung; beim R-Integral geht es uns nicht nur um die Vielfalt der Verfeinerungssequenzen über das Integrationsintervall (was immerhin in präzisen *Definitionen* des R-Integrals – wenn auch sonst nicht – berücksichtigt wird), sondern auch die – niemals auch nur erwähnte – Tatsache, dass (im Wesentlichen) ein und dieselbe ebene Figur F zu ganz verschiedenen Funktionen als Ordinatenmenge gehören kann, wenn man das Koordinatensystem in der Ebene in Bezug auf diese Figur verschiedenartig platziert (Figur 3 in [2], 37); das sollte man bei der *Berechnung* des Flächeninhalts von F und ganz besonders dann, wenn der Flächeninhalt über das R-Integral *definiert* wird, nicht außer Acht lassen.

5. Was wir brauchen: (1) Eine – klar, einfach und eindeutig definierte – Klasse F von ebenen „Figuren“ (Punktmengen); (2) eine Klasse M von *Messmethoden*; (3) eine Klasse V von konkreten *Messverfahren* (Realisierungen der Methoden aus M); (4) eine Garantie dafür, dass an jeder Figur aus F sämtliche Verfahren aus V „konvergent“ und gleichwertig sind.

6. Um diese Probleme formulieren zu können, brauchen wir eine gewisse Verfeinerung des üblichen Begriffs „Intervallschachtelung“.

DEFINITIONEN. (1) Eine *Intervallpackung* (IP) $[a_n | b_n]_{n=0}^{\infty}$ in \mathbb{R} ist eine der Mengeninklusion nach monoton abnehmende unendliche Folge von abgeschlossenen Zahlenintervallen $[a_n; b_n]$. (2) Eine IP in \mathbb{R} nennen wir *eng*, wenn die Folge der Längen $b_n - a_n$ der Intervalle eine Nullfolge ist. (3) Eine enge IP nennen wir *Intervallschachtelung* (IS).

7. Der Kern des begrifflichen Inhalts der hier behandelten Messbarkeitsprobleme. Jene Messverfahren, die zu üblichen Messmethoden (wie z. B. der J-Inhalt und das R-Integral) gehören, erzeugen selbstverständlich IP-en; die Frage ist nur, ob so eine IP eng ist bzw. ob mit der Engtheit einer solchen IP die Engtheit aller anderen IP-en (die zu derselben Messmethode oder zu einer Klasse von Messmethoden gehören) einhergeht. (In diesem Fall haben alle diese IS-en den gleichen Kern; das ist das Maß der betreffenden Punktmenge in Bezug auf die betreffenden Messmethoden).

8. Die nötigen Garantien können wir im Allgemeinen als Kombinationen von Existenz-Garantien und Äquivalenz-Garantien erhalten. *Existenz-Garantien:* Sätze, die für gewisse Elemente von F die Konvergenz gewisser Verfahren (d. h. die Engtheit der entsprechenden IP-en) aussagen. *Äquivalenz-Garantien:* Sätze, die von der Konvergenz eines Verfahrens (an einem Element von F) auf die Konvergenz anderer Verfahren (an demselben Element von F) schließen lassen, u. zw. in Bezug auf ein Element von M (1. Typ) oder auf mehrere Messmethoden (2. Typ).

Eine solche Kombination ergibt tatsächlich eine Garantie der gewünschten Art, da

- (α) an ein und derselben beschränkten Punktmenge zwei beliebige Messverfahren (d. h. die entsprechenden IP-en) offenbar äquivalent sind und
- (β) zwei äquivalente enge IP-en (d. h. IS-en) immer denselben – einzigen – Kern haben, und daher

aus V ein beliebiges Verfahren V mit dem gewählten Hintergrund $M^* \subseteq M$ gewählt werden kann, um die Messbarkeit und das Maß (im Sinne von M^*) einer Punktmenge aus F festzustellen.

9. Die wichtigste Existenz-Garantie:

SATZ 1. *Jede beschränkte (nichtleere) konvexe Menge K hat einen Inhalt.*

Mit diesem Satz (der sich völlig elementar beweisen lässt⁴) kann die Forderung (1) unter 5. in schulgerechtem Maße erfüllt werden.⁵

10. Beispiele für Äquivalenz-Garantien:

SATZ 2. An einer beschränkten Punktmenge sind zwei J -Messverfahren V_1 und V_2 immer äquivalent, d. h. (a) V_1 konvergent $\Leftrightarrow V_2$ konvergent, (b) im Konvergenzfall erfassen beide Verfahren dieselbe Zahl.

SATZ 3. Für beschränkte f gilt: f R -integrierbar über $[a; b] \Leftrightarrow F_f[a; b]$ J -messbar. ($F_f[a; b]$: Die entsprechende Ordinatenmenge.)

11. Aus der Kombination des Satzes 3 mit anderen Sätzen ergibt sich:

SATZ 4. Intervallweise⁶ konvexe–konkave Funktionen sind integrierbar.⁷

12. Eine Herleitung der Formel

$$\int_0^c x^n dx = \frac{c^{n+1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots; c > 0),$$

die auf die Definition des R -Integrals mit Zerlegungssequenzen, aber nicht auf eine konkrete Zerlegungssequenz gegründet ist. (Vgl. 3. und 4.).

⁴ Skizze des Beweises ([2], § 10, 46): Wird ein K überdeckendes Quadrat Q mit der Seitenlänge a in neun kongruente Quadrate aufgeteilt, so hat mindestens ein Teilquadrat keinen gemeinsamen Punkt mit der Begrenzung B von K . (A_2) Gibt es nämlich je einen Punkt in jedem Eckquadrat und ist H die konvexe Hülle dieser Punkte, so gilt für das mittlere Teilquadrat M : $M \subseteq H \subseteq K$; folglich liegt M völlig im Inneren von K . B kann also durch endlich viele Quadrate mit einer Gesamtfläche $\leq \frac{8}{9} \cdot a^2$ und bei der n -ten

Wiederholung $\leq \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot a^2$ überdeckt werden; B hat daher das J -Maß 0. – Satz 2 hilft

den „Archimedischen“ Fehler (II) unter 3. zu vermeiden.

Bemerkung. Ich darf annehmen, dass ich in der Arbeit [1] den ersten *elementaren* Beweis – dessen Grundgedanke das genaue n -dimensionale Analogon (A_n) von (A_2) ist – des entsprechenden „ n -dimensionalen“ Satzes gegeben habe. (Der Satz selbst und ein komplizierterer Beweis stammt von MINKOWSKI [4]). HANSEN beschrieb in [3] dieselbe Beweisidee, jedoch ohne die Aussage (A_n) zu beweisen (u. zw. wegen ihrer angeblichen „Anschaulichkeit“). Die Tatsache (A_2) ist aber anschaulich so einleuchtend, dass sich ein algebraischer Beweis (der immerhin sehr leicht wäre) erübrigt.

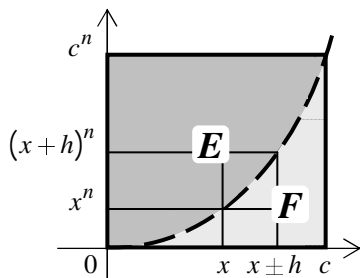
⁵ Es gibt kaum Figuren in der Schulmathematik, die nicht als Zusammensetzung und Differenz von (endlich vielen) konvexen Figuren betrachtet werden könnten.

⁶ Damit ist die Zerlegung des Definitionsintervalls in *endlich* viele Intervalle gemeint.

⁷ BEWEIS. Sätze 3, 1 und die Tatsache, dass eine nichtnegative Funktion f genau dann konkav bzw. konvex ist, wenn die entsprechende Ordinatenmenge F_f konkav bzw. konvex (das Komplement zu einer konvexen Menge) ausfällt.

Bemerkungen. 1. Soz. sämtliche im Unterricht behandelten Funktionen sind von dieser Art. 2. Konvexe Funktionen sind stetig und intervallweise monoton; es wäre also möglich, ist aber unnötig, hier die üblichen allgemeinen Integrierbarkeitssätze zu benutzen.

1. Es genügt zu bestimmen, in welchem Verhältnis der Inhalt c^{n+1} des großen Rechtecks durch den Graphen der Funktion $x \mapsto x^n$ aufgeteilt ist. 2. Eine beliebige Zerlegungssequenz (ZS) über dem Intervall $[0; c]$ (für F) induziert eine ZS über $[0; c^n]$ (für E). 3. Wir benutzen die Bezeichnungen (\circ) für die durch eine beliebige Zerlegung von $[0; c]$ induzierten vier Riemannschen Summen; es gelten dann für die Inhalte



$$\begin{aligned} \sigma_F &= h \cdot x^n, & \sigma_E &= x \cdot [(x+h)^n - x^n], \\ \sigma^F &= h \cdot (x+h)^n, & \sigma^E &= (x+h) \cdot [(x+h)^n - x^n] \end{aligned}$$

der zu einem Teilintervall $[x; x+h]$ gehörenden entsprechenden Rechtecke

$$n\sigma_F = xnhx^{n-1} < \sigma_E < \sigma^E < (x+h)nh(x+h)^{n-1} = n\sigma^F \quad ^8,$$

woraus $n s_F < s_E < s^E < n s^F$ folgt.

4. Die IS-en

$$[s_E(k) | s^E(k)]_{k=0}^{\infty},$$

$$[ns_F(k) | ns^F(k)]_{k=0}^{\infty}$$

(\circ)		für E	für F
Untere	R- Summe	s_E	s_F
Obere		s^E	s^F

sind also äquivalent und erfassen die Zahlen $|E|$, $n \cdot |F|$. Das heißt: $|E| = n \cdot |F|$, womit das Problem gelöst ist.⁹

13. Alle hier nicht durchgeführten Beweise sind in [2] zu finden.

Literatur

- [1] Deák, E.: Bemerkung zu einem Beweis der Quadrierbarkeit der n -dimensionalen konvexen Mengen, Ann. Univ. Budapest Rolando Eötvös nomin., Sectio math., 8 (1965), 98–92.
 [2] Deák, E.: Können wir aus der Schulmathematik erfahren, was „Flächeninhalt“ ist?, Anschauliche und Experimentelle Mathematik II, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 22, Wien (1994), 31–58.
 [3] Hansen, P. E.: The Jordan content of convex sets, Nordisk Math. Tidskr. 9 (1961), 26–28.
 [4] Minkowski, H.: Volumen und Oberfläche, Math. Ann. 57 (1903), 447–456.

⁸ Für die Ungleichung mit dem * benutzt man etwa die überaus nützliche Ungleichung

$$n(v-u)u^{n-1} < v^n - u^n < n(v-u)v^{n-1} \quad (0 < u < v, n \in \mathbb{N}),$$

die sich am einfachsten aus dieser elementaren Identität ergibt:

$$v^n - u^n \equiv (v-u)(v^{n-1} + v^{n-2}u + \dots + vu^{n-2} + u^{n-1}).$$

⁹ Hier wird die Integrierbarkeit dieser Funktionen vorausgesetzt (s. den Satz unter 11.).