

Mareike MINK, Köln

Wie erzeugt man eine geradlinige Bewegung? ... und wie kann diese Problemstellung zur Begriffsentwicklung von Lernenden beitragen?

1. Problemstellung

Geradlinige Bewegung findet man (zumindest näherungsweise) in vielen alltäglichen Anwendungen: etwa bei einem Zug auf einem geraden Streckenabschnitt; bei den Backen eines Schraubstocks; bei den Seitenkanten einer Bustür, davon eine parallel, die andere senkrecht zur Buswand; das Ende eines Bügelbrettbeines entlang des Brettes selbst. All diesen Bewegungen ist gemeinsam, dass die Geradlinigkeit durch eine Führung erreicht wird, dies ist etwa die gerade Schiene für den Zug oder die Längsachse des Gewindes, entlang dessen die Schraubstockbacken sich aufeinander zu oder voneinander weg bewegen.

Ist es aber auch möglich, eine geradlinige Bewegung auch ohne eine solche Führung – also gewissermaßen ohne die „Voraussetzung“, zuvor schon einmal eine Geradlinigkeit erreicht zu haben – zu erhalten? Kann man beispielsweise eine – einfach zu erzeugende – rotierende Bewegung in eine geradlinige überführen? Und ist dies überhaupt eine nur theoretische oder auch technisch relevante Fragestellung?

Tatsächlich beschäftigten sich in der Hochzeit des Dampfmaschinenbaus Mitte des 19. Jahrhunderts diverse Personen mit diesem Problem, wenngleich ihre Motivation genau die umgekehrte Frage war: Kann man die geradlinige Bewegung eines Dampfmaschinenkolbens in eine rotierende überführen, um damit Maschinen anzutreiben?

2. Hilfsmittel Gelenkmechanismus

Damals wurde versucht, einen dies leistenden Gelenkmechanismus zu konstruieren, d.h. ein System von starren Stangen, die teilweise miteinander oder mit festen Raumpunkten drehbar verbunden sind. Ein Beispiel für eine einfach mit einem Gelenkmechanismus zu erzeugende Kurve ist ein Kreis – mittels einer einzelnen um einen Fixpunkt rotierenden Stange.

3. eine Lösung: Peaucellier-Inversor

Dieser von Charles-Nicolas Peaucellier 1864 erfundene Mechanismus ist wie folgt aufgebaut (Kempe 1877, siehe Abb.): Im Punkt B sind Stangen BC_1 , BC_2 mit $|BC_1|=|BC_2|$ drehbar befestigt; C_1 und C_2 sind zugleich gegenüberliegende Ecken einer Stangenraute C_1DC_2D' ; M sei deren Diagonalen-

– Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander, somit sind die Dreiecke BMC_1 und DMC_1 rechtwinklig bei M , und die Aussagen gelten nach dem Satz des Pythagoras.

Teil (e): Begründe, warum sich aus (★), (♣) und (♠) ergibt, dass $|BD'| \cdot |BD|$ konstant ist.

– Setzt man (♣) und (♠) in (★) ein, so erhält man $|BD'| \cdot |BD| = |BM|^2 - |MD|^2 = |BC_1|^2 - |MC_1|^2 - |DC_1|^2 + |MC_1|^2 = |BC_1|^2 - |DC_1|^2$. Da $|BC_1|$ und $|DC_1|$ die Längen zweier Stangen sind, sind diese konstant und somit auch das Produkt $|BD'| \cdot |BD|$.

4. Problemorientierte Begriffsentwicklung

Anhand einer Problemstellung wie der Frage nach Erzeugung einer geradlinigen Bewegung können Lernende Begriffe entwickeln.

Vollrath (1984) nennt in diesem Zusammenhang vier verschiedene Funktionen, die Begriffe in Problemlöseprozessen haben können. Ein Begriff kann zunächst *Quelle* eines Problems sein – im vorliegenden Beispiel könnte man dazu etwa die geradlinige Bewegung an sich, eine *Translation*, nennen. Weiterhin kann ein Begriff als *Hilfsmittel* beim Lösen eines Problems dienen – hier beispielsweise der Begriff des *Gelenkmechanismus'*. Auch die *Lösung* selbst kann ein zu bildender Begriff sein, beim Problem der Geradföhrung könnte man die Abbildung der *Inversion am Kreis* als solche bezeichnen, denn genau diese wird durch den Peaucellier-Mechanismus realisiert (Coxeter Greitzer 1983). Schließlich kann ein Begriff auch ein *Lösungsverfahren rechtfertigen* – oben begründet die Tatsache, dass C_1DC_2D' eine *Raute* ist, verschiedene Eigenschaften und so unter anderem die Verwendung des Satzes des Pythagoras.

In seinem *Prinzip der angemessenen Problemorientierung* fordert Bruner (1974), dass der Unterricht mit einer Problemstellung beginnen solle, und dass diese idealerweise von den Lernenden selbst eingebracht, meist jedoch vom Lehrer gestellt sei. Das obige Beispiel und seine Lösung werden zwar sehr wahrscheinlich nicht von Schülerinnen und Schöleren aufgeworfen. Jedoch können vielleicht die regelmäßige Auseinandersetzung mit alltäglichen geometrischen Phänomenen zu einer Wahrnehmungssensibilisierung und ein vorgegebener Problemkontext zur Formulierung eigener Fragen oder Thesen durch die Lernenden föhren.

Im hier thematisierten Bereich könnten die Schülerinnen und Schöler etwa aufgefordert werden, in ihrer Umgebung nach (auch näherungsweise) geradlinigen Bewegungen zu suchen und diese zu analysieren. Taucht der

Peaucellier-Mechanismus auf? Liegt eine geradlinige Führung vor? Ist die Bewegung nur angenähert oder tatsächlich geradlinig?

Beispielsweise die Bewegung einer Bustür – wie oben genannt – könnte hier „gefunden“ werden – sie kann auch mit recht elementaren geometrischen Mitteln wie den Eigenschaften eines Rechtecks analysiert werden. Auch ein Punkt auf dem Rand eines Kreises, der in einem anderen Kreis mit doppeltem Radius rollt, beschreibt eine geradlinige Bewegung; für den Beweis benötigt man Umfanglängen von Kreissektoren und etwa Aussagen über gleichschenklige Dreiecke.

5. Abschluss

In einer so „einfachen“ – zumindest einfach zu formulierenden – und realen Fragestellung wie der nach Erzeugung einer geradlinigen Bewegung können also sehr viele und vielfältige geometrische Aspekte stecken. Die hier genannten Begriffe, Sätze und Eigenschaften sind auch sämtlich in Schulbuchreihen zu finden, beispielsweise in *Mathematik Neue Wege* von Schroedel, so dass ein Bezug zu „üblichen“ Inhalten des Mathematikunterrichts hergestellt werden kann.

Neben der Problemorientierung können mit den genannten Beispielen (nachgebauter Peaucellier-Mechanismus, Schraubstock, Bustür, Bügelbrett, rollender Kreis) auch weitere Aspekte von Begriffsentwicklung angesprochen werden: So regen sie durch die enthaltenen beweglichen Elemente zum „Ausprobieren“ im Sinne des *operativen Prinzips* an. Mit einer weiterführenden Aufgabenstellung wie der nach der (freien) Suche weiterer geradlinig bewegter Anwendungen wird eine *individuelle* Herangehensweise ermöglicht. Schließlich bietet sich gerade ein Problem, in dem geometrische Inhalte verschiedener Jahrgangsstufen zum Tragen kommen und das in anderen Kontexten erneut aufgegriffen werden kann (etwa der genannte Spezialfall eines rollenden Kreises bei allgemeinen Rollkurven), für das Entwickeln von Begriffen in einem fortschreitenden *Prozess*, der nicht nach einer Unterrichtseinheit abgeschlossen ist, an.

Literatur

- Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin-Verlag.
- Coxeter, H.S.M, Greitzer, S.L. (1983): Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett.
- Kempe, A.B. (1877): How to Draw a Straight Line: A Lecture on Linkages. In: National Council of Teachers in Mathematics: Classics in mathematics education 6.
- Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hrsg.) (2005-2010): Mathematik Neue Wege 5-10. Braunschweig: Schroedel.
- Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslehrens. Stuttgart: Klett.