BEDNORZ, David; LITTECK, Kristin; SOMMERHOFF, Daniel & HEINZE, Aiso
Kiel/Hildesheim; Kiel; Kiel; Kiel

Erfassung individueller Lerntrajektorien in einer digitalen Lernumgebung zum Ableitungsbegriff

Obwohl der Ableitungsbegriff in einem einfachen Regelwerk mit Ableitungsregeln mündet, treten bei Lernenden häufig Probleme beim konzeptuellen Wissen zur Ableitung auf. Diese Defizite zeigen sich insbesondere dann, wenn der Ableitungsbegriff für unbekannte Funktionsklassen interpretiert oder in Sachkontexten angewendet werden soll (vom Hofe, 1998). Der Erwerb des Ableitungsbegriffs erfolgt oft über drei Unterbegriffe: der Differenzenquotient (durchschnittliche Änderungsrate), der Differentialquotient (momentane Änderungsrate) und die Ableitungsfunktion (Änderungsverhalten) (Zandieh, 1997). Basierend bspw. auf Prozess-Objekt-Theorien kann dabei angenommen werden, dass dieser Begriffserwerb hierarchisch erfolgt (Sfard, 1991). Um den existierenden Schwierigkeiten beim Erwerb des Ableitungsbegriffs zu begegnen, ist es notwendig, nicht nur die einzelnen Unterbegriffe zu betrachten, sondern in der Analyse den Erwerb der Unterbegriffe miteinander zu verknüpfen. Dies erfordert einen theoretischen und methodischen Ansatz, der den Erwerb des Ableitungsbegriffs und seiner Unterbegriffe aus der Perspektive des individuellen Lernens über die Zeit betrachtet.

Individuelle Lerntrajektorien

Bei der Konzeptualisierung von Lernverläufen kann unterschieden werden zwischen Lernprogressionen, die tendenziell im Bereich der Leistungs- und Kompetenzentwicklung angesiedelt sind, und Lerntrajektorien, die das Mathematiklernen in der Bearbeitung von Unterrichtsaktivitäten darstellen sollen (Weber et al., 2015). Beim Konzept der Lerntrajektorien spielen in der mathematikdidaktischen Forschung vor allem sog. hypothetische Lerntrajektorien (HLT) (Simon, 1995) eine Rolle. HLT ergeben sich dadurch, dass bei der Gestaltung von Lernumgebungen theoretische Annahmen über die Lerntrajektorien der Schüler*innen getroffen werden, die durch das Lernziel, die Lernaktivität und die Lernvoraussetzungen der Schüler*innen bestimmt werden. Die HLT sind somit stark in den Prozess der Gestaltung von Lernumgebungen und in die theoretischen Annahmen über mathematisches Lernen eingebettet, die bei der Entwicklung der Lernumgebung zugrunde gelegt werden. Aus diesem Grund werden neben den HLT auch die tatsächlichen Lerntrajektorien (actual learning trajectory) unterschieden (Si-

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

mon, 1995). Die tatsächlichen Lerntrajektorien sind die beobachtbaren Lerntrajektorien der Schüler*innen bei der Bearbeitung der Lernumgebung. Diese müssen nicht den in der HLT angenommenen theoretischen Überlegungen entsprechen. Bei den tatsächlichen Lerntrajektorien erscheint insbesondere die individuelle Bearbeitung der Lernumgebung interessant, um Aussagen über die Produktivität des Lernmaterials, des Lernens und mögliche Schwierigkeiten treffen zu können. Um den individuellen Charakter der tatsächlichen Lerntrajektorien zu betonen, sprechen wir diesbezüglich von *individuellen Lerntrajektorien*, die innerhalb einer theoretisch entwickelten Lernumgebung bei der Bearbeitung durch die Schüler*innen in ebendieser auf individueller Ebene feststellbar sind.

Vor diesem theoretischen Hintergrund und den beschriebenen Schwierigkeiten von Lernenden beim konzeptuellen Wissen zur Ableitung, wird in diesem Beitrag die Frage gestellt: Welche Aufgabenbearbeitungen lassen sich zur Erfassung und Beschreibung von individuellen Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff beobachten?

Methode

Zur Erfassung der individuellen Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff wurde eine digitale Lernumgebung zum Ableitungsbegriff entwickelt. Eine digitale Lernumgebung ist hierfür besonders gut geeignet, da die Bearbeitung jeder Aufgabe erfasst werden kann und zudem die für den Gegenstand relevanten Darstellungsformen genutzt werden können. Darüber hinaus ist es möglich, nicht nur die Lernprodukte zu erfassen, sondern auch die Lernprozesse, die während der Bearbeitung entstehen. Letztlich bietet die digitale Lernumgebung durch die Integration sämtlicher Lernaktivitäten auch die Möglichkeit, den Unterricht für die Dauer der Unterrichtseinheit (insg. ca. 20 Unterrichtsstunden) stark zu standardisieren. Die digitale Lernumgebung wurde bislang in fünf Klassen mit 113 Schüler*innen der Einführungsphase der Oberstufe an Gymnasien eingesetzt. Sie umfasst drei Unterrichtsabschnitte zu den jeweiligen Unterbegriffen des Ableitungsbegriffs. Zu Beginn und am Ende der Lernumgebung sowie zwischen den Unterrichtsabschnitten wurden Kompetenztests zum Ableitungsbegriff eingesetzt. Dazu wurden die einzelnen Tests über Ankeritems miteinander verknüpft, so dass die Auswertung gemeinsam erfolgen konnte. Für die Auswertung wurde ein eindimensionales Rasch-Modell verwendet. Von besonderem Interesse waren hierbei die durch das Rasch-Modell geschätzten Personenfähigkeitswerte, um mittlere Lernprogressionen darzustellen. Die Personenfähigkeitswerte wurden darüber hinaus durch eine Clusteranalyse gruppiert, um Schüler*innen zu identifizieren, deren mittlere Lernprogression ähnlich verlaufen. Die Clusteranalyse ergab, dass zwei Gruppen (A & B) unterschieden werden können.

Im Folgenden sollen die Bearbeitungen in der Lernumgebung von zwei Schüler*innen (S1 & S2) aus jeweils einen der Cluster zum Ableitungsbegriff präsentiert werden, um damit auf einer qualitativen Ebene zu beschreiben welche Aufgabenbearbeitungen genutzt werden können, um individuellen Lerntrajektorien zu erfassen.

Ergebnisse

In Tabelle 1 sind die unterschiedlichen Lernprogressionen zwischen den Unterrichtseinheiten der zwei Schüler*innen dargestellt. S1 aus Cluster A zeigt nach der Bearbeitung des ersten Unterrichtsabschnitts (UAs) eine positive Lernprogression (d. h. eine Steigerung des geschätzten Personenfähigkeitswerts). Zwischen Ende des ersten und Ende des zweiten UAs ist eine negative Lernprogression zu beobachten. Zwischen Ende des zweiten und Ende des dritten UAs gibt es dann wieder eine positive Lernprogression. Im Gegensatz dazu zeigt S2 eine negative Lernprogression nach dem ersten UAs. Danach zeigt S2 eine positive Lernprogression bis zum Ende der Unterrichtseinheit.

	Beginn & 1. UA	**1. UA & 2. UA**	**2. UA & 3. UA**
Schüler*in (S1) aus Cluster A	↑	↓	↑
Schüler*in (S2) aus Cluster B	↓	↑	↑

Tabelle 1: Lernprogressionen (positiv/negativ) zwischen den UAs

S1 weist nach dem ersten Unterrichtsabschnitt eine positive Progression auf. In der qualitativen Analyse dieses Abschnitts konnte festgestellt werden, dass S1 diesen Abschnitt insgesamt sehr erfolgreich bearbeiten konnte. So konnte beobachtet werden, das S1 den Differenzenquotienten in Modellierungskontexten zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate von Funktionen einsetzen und die Ergebnisse inhaltlich richtig interpretiert und validiert werden. Größere Schwierigkeiten zeigten sich bei S1 erst im zweiten Unterrichtsabschnitt bei der Bestimmung der momentanen Änderungsrate mit dem Differentialquotienten. So kann S1 den Funktionswert $f(x+h)$ für die Funktion $f(x) = x^2$ in $(x+h)$ nicht korrekt bestimmen und erhält $x^2 * (x+h)$ als Lösung. Trotz dieser Schwierigkeiten bei der Bestimmung der momentanen Änderungsrate gelingt es S1 im dritten Unterrichtsabschnitt, die Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion richtig zu erkennen und auch weitere Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten. Im Vergleich zu S1 zeigt sich bei S2 eine negative Lernprogression während des ersten Unterrichtsabschnitts. Betrachtet man die Bearbeitungen in der Lernumgebung, so zeigen sich größere Schwierigkeiten bei der Übertragung der

Anwendung des Steigungsdreiecks (Vorwissen) auf nichtlineare Funktionen. Hier lässt sich bei S2 eine Übergeneralisierung der konstanten Steigung für lineare Funktionen auf z. B. quadratische Funktionen feststellen, die in mehreren Aufgabenbearbeitungen sichtbar wird. Beispielsweise soll S2 in einer Aufgabe die Sekante an f für die x-Werte 1 und 3 erzeugen. Anstatt die gegebenen Funktionswerte zu verwenden, erstellt S2 eine Sekante zwischen dem Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse und dem Punkt $(1;\ f(1))$, was als typische Strategie zur Bestimmung der (konstanten) Steigung für lineare Funktionen angesehen werden kann. S2 überträgt diese Strategie auf Funktionen ohne konstante Steigung und ignoriert dabei die gegebenen Funktionswerte. Im zweiten und dritten Unterrichtsabschnitt gelingt es S2, die meisten Aufgaben gut zu bearbeiten, insbesondere gelingt es S2 im Gegensatz zu S1, die momentane Änderungsrate mit Hilfe des Differentialquotienten sicher zu bestimmen.

Ausblick

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die theoretisch angenommene Hierarchisierung der drei Unterbegriffe nicht unbedingt zu beobachten ist. Die qualitative Analyse hat gezeigt, dass dies an der Übergeneralisierung mathematischer Verfahren oder an Schwierigkeiten im Umgang mit Termen liegen kann. Die Bearbeitungen können zur Erfassung von individuellen Lerntrajektorien genutzt werden. Um individuelle Lerntrajektorien für alle Schüler*innen über alle Aktivitäten hinweg abzubilden, ist es notwendig, Bearbeitungsmuster zu ermitteln. Hierzu können, aufgrund der multimodalen Daten, z.B. Methoden des maschinellen Lernens eingesetzt werden. Vor diesem Hintergrund wurde die Lernumgebung so entwickelt, dass die Daten so kodiert werden können, dass maschinelles Lernen zur Rekonstruktion individueller Lerntrajektorien für die Lernumgebung eingesetzt werden können.

Literatur

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Weber, E., Walkington, C., McGalliard, W. (2015). Expanding notions of "learning trajectories" in mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(4).

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse: Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(4), 257–291.

Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. http://ir.library.oregonstate.edu/xmlui/handle/1957/11341.