AUTOKORRELATIONSTESTS BEI CAUCHY-VERTEILTEN ZUFALLSVARIABLEN

Von Ralf RUNDE

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird die asymptotische Nullverteilung des empirischen Autokorrelationskoeffizienten und des von Neumann ratio hergeleitet, wenn die Stichprobe aus einer Cauchy-verteilten Grundgesamtheit oder aus dem Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung stammt. Für die Dichte der Grenzverteilung wird eine Reihendarstellung entwickelt, so daß asymptotische Signifikanzpunkte der Autokorrelationstests mittels numerischer Methoden berechnet werden können.

Summary: We consider the asymptotic null distribution of the empirical autocorrelation coefficient and the von Neuman ratio when the random variables belong to the domain of attraction of a Cauchy law. A series expansion for the density of the limiting distribution is developed and some critical values of the tests are computed numerically.

„*Practical statisticians have tended to disregard nonnormality, partly for lack of an adequate body of mathematical theory to which an appeal can be made, partly because they think it is too much trouble, and partly because of a hazy tradition that all mathematical ills arising from nonnormality will be cured by sufficiently large numbers. This last idea presumably stems from central limit theorems, or rumors or inaccurate recollections of them.*“ Harold Hotelling, 1961

1 Problemstellung

Gegeben sei eine Folge $\{X_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, von identisch verteilten Zufallsvariablen mit Lokationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $c^2 > 0$, und beide Parameter seien unbekannt. Für $\mathrm{E}(X_i^2) < \infty$ sei $c^2 = \mathrm{Var}(X_i)$.

Im Falle einer endlichen Varianz ist der theoretische Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung (im weiteren kurz Korrelationskoeffizient genannt) von X_i durch

$$\rho = \frac{\mathrm{E}(X_i - \mu)(X_{i-1} - \mu)}{c^2} \tag{1}$$

gegeben, mit empirischem Gegenstück

$$r = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X})(X_{i-1} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \ . \tag{2}$$

Eine alternative Variante des empirischen Korrelationskoeffizienten ist etwa

$$r^* = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X}^+)(X_{i-1} - \bar{X}^-)}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X}^+)^2 \sum_{i=2}^{n}(X_{i-1} - \bar{X}^-)^2}} \ ,$$

die man bei strikter Anwendung der Bravais-Pearson-Formel erhält. Hierbei ist $\bar{X}^+ = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i$ und $\bar{X}^- = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_{i-1}$. Dieser Koeffizient ist jedoch mit r aus (2) numerisch fast identisch und hat die gleiche normierte Grenzverteilung. Daher gelten alle weiteren Ausführungen analog auch für r^*.

Es soll nun überprüft werden, ob die Zufallsvariablen $X_i,\ i = 1, \ldots, n$, seriell unkorreliert sind. Das zweiseitige Testproblem lautet also

$$\mathrm{H}_0 : \rho = 0 \quad \text{gegen} \quad \mathrm{H}_1 : \rho \neq 0 \,. \tag{3}$$

Die einseitigen Hypothesen $\mathrm{H}_0^{(1)} : \rho \leq 0$ bzw. $\mathrm{H}_0^{(2)} : \rho \geq 0$ sind für die Resultate dieser Arbeit völlig analog zu (3) zu behandeln und werden im folgenden nicht näher betrachtet.

Im Standardfall $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, ist der empirische Korrelationskoeffizient aus (2) identisch mit der Teststatistik für den gleichmäßig mächtigsten Test zum Niveau ϑ, $0 < \vartheta < 1$, falls der Hypothese aus (3) die einseitigen Alternativen $\rho < 0$ bzw. $\rho > 0$ gegenübergestellt werden. Für das zweiseitige Testproblem (3) ist r die Teststatistik für den gleichmäßig mächtigsten Niveau-ϑ-Test in der Klasse der unverfälschten Tests (vgl. Anderson, T.W., 1948).

Selbst unter der Normalverteilungsannahme hat die Nullverteilung von r allerdings eine überaus komplizierte Gestalt. Sie wurde erstmals von Anderson, R.L. (1942) bestimmt. In seiner Arbeit tabelliert er auch 1%- und 5%-Signifikanzpunkte bis zu einem Stichprobenumfang von $n = 75$. Pan (1968) berechnet unter obigen Voraussetzungen die exakte Verteilung von r für $-1 \leq \rho \leq 1$ und erhält außerdem eine Integraldarstellung für die Verteilungsfunktion von r unter H_0. Aufgrund der aufwendig zu bestimmenden exakten Verteilung von r werden in der Literatur zahlreiche Approximationen vorgeschlagen (vgl. etwa Koopmans, 1942, Dixon, 1944, oder Rubin, 1945).

Für unabhängig identisch verteilte X_i mit $\mathrm{E}(X_i^2) < \infty,\ i = 1, \ldots, n$, zeigen Anderson und Walker (1964), daß unter H_0

$$\sqrt{n}\, r \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \tag{4}$$

für $n \to \infty$, wobei „$\xrightarrow{d}$" für Konvergenz in Verteilung steht. Somit können bei Benutzung der Teststatistik $\sqrt{n}\,r$ die asymptotischen Signifikanzpunkte für das Testproblem (3) aus den Quantilen der Standardnormalverteilung entnommen werden.

Ein weiterer von vielen möglichen Tests zur Überprüfung der Nullhypothese aus (3), der auf VON NEUMANN et al. (1941) zurückgeht, beruht auf dem Quotienten der mittleren quadrierten sukzessiven Differenzen der X_i und der empirischen Varianz

$$r_{VN} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - X_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \; . \tag{5}$$

Zwischen dem „von Neumann ratio" r_{VN} aus (5) und r aus (2) gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} r_{VN} &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X})^2 - 2\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X})(X_{i-1} - \bar{X}) + \sum_{i=2}^{n}(X_{i-1} - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ &= 2(1-r) - R_n \; , \end{aligned} \tag{6}$$

wobei

$$R_n = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_n - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \; . \tag{7}$$

VON NEUMANN (1941 und 1942) bestimmt die exakte Verteilung von r_{VN}. KOOPMANS (1942) gibt eine Integraldarstellung für die Dichte des von Neumann ratios an, und HART und VON NEUMANN (1942) berechnen für kleine Stichproben bis $n = 10$ Signifikanzpunkte für den Test, basierend auf r_{VN}.

ANDERSON und WALKER (1964) zeigen, daß die Beziehung (4) nicht unbedingt normalverteilte X_i's voraussetzt, solange die Grundgesamtheit eine endliche Varianz hat. Ist $\mathrm{E}(X_i^2) = \infty$, wie es etwa bei der Cauchy-Verteilung oder Verteilungen aus ihrem Anziehungsbereich der Fall ist, so gilt die asymptotische Normalität von $\sqrt{n}\,r$ nicht mehr, und statt der Grenzverteilung aus (4) erhält man

$$\sqrt{n}\,r \xrightarrow{P} 0 \tag{8}$$

für $n \to \infty$ (vgl. KRÄMER und RUNDE, 1991), wobei „$\xrightarrow{P}$“ die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Die Beziehung (8) besagt, daß sich der empirische Korrelationskoeffizient bei unendlicher Varianz der X_i's trotz Multiplikation mit $\sqrt{n}$ bei wachsendem Stichprobenumfang n um die Null konzentriert. Damit gehen aber auch die Quantile der Prüfgröße $\sqrt{n}\,r$ gegen Null, und der mit festen Signifikanzpunkten operierende Standardtest wird zunehmend konservativ. Um bei unendlicher Varianz eine nichtdegenerierte Grenzverteilung des Korrelationskoeffizienten r zu erhalten, ist folglich ein größerer Normierungsfaktor als $\sqrt{n}$ erforderlich.

Untersuchungen des seriellen Korrelationskoeffizienten erster Ordnung hinsichtlich seiner Robustheit gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung gehen bis in die sechziger Jahre zurück. COX (1966) betrachtet in Simulationsstudien Signifikanzpunkte von $\sqrt{n}\,r$ bei Stichprobenumfängen von n =10, 20 und 50 für verschiedene Verteilungen der Grundgesamtheit. Dabei legt er neben anderen eine Mischung aus zwei Normalverteilungen, eine Doppeltexponential- und eine Cauchy-Verteilung zugrunde. Außer bei der Cauchy-Verteilung liefern alle von ihm untersuchten Fälle eine asymptotisch gute Anpassung von $\sqrt{n}\,r$ an die Normalverteilung.

PHILLIPS und LORETAN (1991) leiten unter anderem die asymptotische Nullverteilung des von Neumann ratios r_{VN} für eine Stichprobe aus dem Anziehungsbereich einer symmetrischen stabilen Verteilung her, und KRÄMER und RUNDE (1991) betrachten unter den gleichen Voraussetzungen die Konsequenzen für die Grenzverteilung von r. Eine spezielle stabile Verteilung, nämlich die Cauchy-Verteilung, wird nun in dieser Arbeit näher untersucht.

2 Einbettung der Cauchy-Verteilung in die stabilen Verteilungen

Eine Zufallsvariable S mit charakteristischer Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{itS}) \\ &= \begin{cases} \exp\left\{it\mu - \Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|ct|^\alpha\left[1 - i\beta\mathrm{sign}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} & ,\alpha \neq 1 \\ \exp\left\{it\mu - \frac{\pi}{2}|ct|\left[1 + i\beta\mathrm{sign}(t)\frac{2}{\pi}\ln|t|\right]\right\} & ,\alpha = 1 \ . \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

gehört zur Klasse der stabilen Verteilungen; oder kurz: S ist stabil verteilt (vgl. Ibragimov und Linnik, 1971, S.43). Hierbei ist $\mu \in \mathbb{R}$ der Lokationsparameter, $c^\alpha = c_1 + c_2 > 0$, $c_1, c_2 \geq 0$, der Skalenparameter, $\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$, $|\beta| \leq 1$, der Schiefeparameter und α, $0 < \alpha \leq 2$, der charakteristische Exponent der stabilen Verteilung. Um die Abhängigkeit von den in (9) aufgeführten Parametern zu verdeutlichen, wird eine stabile Zufallsvariable im folgenden mit $S(\alpha, \beta, c, \mu)$ bezeichnet. $S(\alpha, \beta) := \frac{S(\alpha,\beta,c,\mu)-\mu}{c}$ ist „standard stabil" verteilt mit $\mu = 0$ und $c = 1$.

Der Parameter β in (9) bestimmt die Schiefe einer stabilen Verteilung: Für $\beta > 0$ ist die Verteilung rechtsschief, für $\beta < 0$ linksschief und für $\beta = 0$, d.h. $c_1 = c_2$ symmetrisch. Der charakteristische Exponent α wird häufig auch als „Schärfeparameter" bezeichnet. Er bestimmt die Randwahrscheinlichkeiten einer stabilen Verteilung: Je kleiner α ist, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse liegt in den Rändern der Verteilung. Das wiederum hat Auswirkungen auf die Existenz der Momente, denn eine stabile Verteilung hat nur endliche absolute Momente der Ordnung ρ mit $0 < \rho < \alpha$, wohingegen alle Momente höherer Ordnung unendlich sind (vgl. etwa Feller, 1971, S.578).

Weder für die Dichte $f(\alpha, \beta, c, \mu; x)$ noch für die Verteilungsfunktion $F(\alpha, \beta, c, \mu; x)$ einer stabilen Verteilung gibt es eine elementare funktionale Darstellung im allgemeinen Fall. Schließt man die degenerierte Verteilung aus, so führen allerdings drei spezielle Parameterkonstellationen zu wohlbekannten Verteilungen (vgl. etwa Feller, 1971, S.173):

(I) $\alpha = 2,\ \beta = 0$: $\quad \varphi_{S(2,0,c,\mu)}(t) = \mathrm{e}^{it\mu}\mathrm{e}^{-c^2t^2}$

$$\Rightarrow f(2,0,c,\mu;x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{4c^2}} \quad ,x \in \mathbb{R}\ ,$$

d.h. $S(2,0,c,\mu)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $2c^2$, und $S(2,0) = \frac{S(2,0,c,\mu)-\mu}{\sqrt{2c^2}}$ ist standardnormal verteilt mit Dichte

$$f(2,0;x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad ,x \in \mathbb{R}\ . \tag{10}$$

(II) $\alpha = 1,\ \beta = 0$: $\quad \varphi_{S(1,0,c,\mu)}(t) = \mathrm{e}^{it\mu}\mathrm{e}^{-\frac{c\pi}{2}|t|}$

$$\Rightarrow f(1,0,c,\mu;x) = \frac{2c}{c^2\pi^2 + 4(x-\mu)^2} \quad ,x \in \mathbb{R}\ ,$$

d.h. $S(1,0,c,\mu)$ ist Cauchy-verteilt mit Lokationsparameter μ und Skalenparameter $\frac{c\pi}{2}$, und $S(1,0) = \frac{2[S(1,0,c,\mu)-\mu]}{c\pi}$ ist standard Cauchy-verteilt mit Dichte

$$f(1,0;x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ,x \in \mathbb{R}\ . \tag{11}$$

(III) $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 1$: $\quad \varphi_{S(1/2,1,c,\mu)}(t) = \mathrm{e}^{it\mu}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{c\pi}{2}|t|}[1-i\mathrm{sign}(t)]}$

$$\Rightarrow f(\tfrac{1}{2},1,c,\mu;x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{(x-\mu)^3}}\mathrm{e}^{-\frac{c\pi}{4(x-\mu)}} & ,x > \mu \\ 0 & ,x \le \mu\ , \end{cases}$$

d.h. $S(\frac{1}{2},1,c,\mu)$ ist Lévy-verteilt (oder invers χ^2-verteilt) mit Lokationsparameter μ und Skalenparameter $\sqrt{\frac{c\pi}{2}}$, und $S(\frac{1}{2},1) = \frac{2[S(\frac{1}{2},1,c,\mu)-\mu]}{c\pi}$ ist standard Lévy-verteilt mit Dichte

$$f(\tfrac{1}{2},1;x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x}} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \le 0\ . \end{cases} \tag{12}$$

Eine Zufallsvariable X mit nicht degenerierter Verteilungsfunktion $F(x)$ liegt nun genau dann im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit charakteristischem Exponenten $0 < \alpha < 2$, wenn für $|x| \to \infty$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{c_1 + o(1)}{(-x)^\alpha} h(-x) & , x < 0 \\ 1 - \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} h(x) & , x > 0 \end{cases} \tag{13}$$

(vgl. Ibragimov und Linnik, 1971, S.76 ff). Hierbei ist $h(x)$ eine langsam variierende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$ für alle $t > 0$, und c_1, c_2 sind Konstanten mit $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, analog zu (9).

Charakteristisch dafür, ob oder ob nicht $F(x)$ im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung liegt, ist folglich das Verhalten von $F(x)$ in den Rändern. Konvergiert die Dichte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ „zu schnell“ gegen Null, so liegt $F(x)$ nicht im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung. Eine triviale Konsequenz aus (13) ist, daß jede stabile Verteilung in ihrem eigenen Anziehungsbereich liegt.

Speziell für den Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ bedeutet dies, daß jede Verteilung, deren Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{c + o(1)}{-x} h(-x) & , x < 0 \\ 1 - \frac{c + o(1)}{x} h(x) & , x > 0 \end{cases} \tag{14}$$

für $|x| \to \infty$ erfüllt, wobei $c > 0$ und $h(x)$ eine langsam variierende Funktion ist, im Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung liegt.

Da in dieser Arbeit nur die Cauchy-Verteilung bzw. Verteilungen aus ihrem Anziehungsbereich von Interesse sind, wird hier nicht weiter auf die stabilen Verteilungen eingegangen. Für eine ausführliche Diskussion sei stattdessen auf Feller (1971), Ibragimov und Linnik (1971) oder auf die Monographie von Zolotarev (1986) verwiesen. Eine schöne Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften stabiler Verteilungen sowie einen umfassenden Überblick der bis dahin erschienenen Literatur liefert auch die Arbeit von Holt und Crow (1973).

3 Asymptotische Nullverteilung des empirischen Autokorrelationskoeffizienten bei einer Stichprobe aus dem Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung

Wie schon in (8) gezeigt, muß der Korrelationskoeffizient r bei einer Grundgesamtheit mit unendlicher Varianz mit einem größeren Faktor als $\sqrt{n}$ normiert werden, um eine nichtdegenerierte Grenzverteilung der Teststatistik zu erhalten. Eine Aussage darüber, wie dieser Normierungsfaktor zu wählen ist, findet man in Davis und Resnick (1986). Ein Spezialfall ihres Theorems 3.3 besagt, daß für eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen $\{X_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, aus dem Anziehungsbereich einer symmetrischen stabilen Verteilung mit charakteristischem Exponenten $1 \leq \alpha < 2$

$$\Bigg((c^\alpha n)^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\ [c^{2\alpha}n\ln(n)]^{-1/\alpha}\sum_{i=2}^{n}(X_i-\bar{X})(X_{i-1}-\bar{X}),\dots,$$

$$\dots,\ [c^{2\alpha}n\ln(n)]^{-1/\alpha}\sum_{i=m+1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_{i-m}-\bar{X})\Bigg)$$

$$\xrightarrow{d}\big(S(\tfrac{\alpha}{2},1),S_1(\alpha,0),\dots,S_m(\alpha,0)\big) \qquad (15)$$

für $n \to \infty$ gilt, wobei $S(\frac{\alpha}{2},1)$, $S_1(\alpha,0),\dots,S_m(\alpha,0)$ in (15) stochastisch unabhängig sind, und $c > 0$ ist analog zu (9).

Mit Hilfe von (15) und den Überlegungen aus Abschnitt 2 läßt sich nun eine Reihendarstellung für die Dichte der Grenzverteilung des Autokorrelationstests herleiten, falls die zugrundeliegenden Zufallsvariablen aus dem Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung stammen:

SATZ

Sei $\{X_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion gemäß (14), die also im Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung liegen. Falls die Nullhypothese aus (3) erfüllt ist, gilt für $n \to \infty$

(a)
$$\frac{n}{\ln(n)} \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \bar{X})(X_{i-1} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \xrightarrow{d} R \tag{16}$$

und

$$R \stackrel{d}{=} \frac{S(1,0)}{S(\frac{1}{2},1)} \,. \tag{17}$$

(b) Die charakteristische Funktion von R ist gegeben durch

$$\varphi_R(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2|t|}} \,. \tag{18}$$

(c) Die Dichte von R lautet

$$\begin{aligned} f_R(x) \;\; = \;\; & \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}} \left\{ \cos\left(\frac{|x|}{2}\right) \left[1 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^{(4k+1)/2}}{(2k)!(4k+1)2^{(4k+1)/2}} \right] \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{|x|}{2}\right) \left[1 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^{(4k+3)/2}}{(2k+1)!(4k+3)2^{(4k+3)/2}} \right] \right\} \end{aligned} \tag{19}$$

für $x \neq 0$.

Beweis: Im weiteren bezeichnen die Zahlen in den eckigen Klammern die Nummer der Formel aus Gradshteyn und Ryzhik (1980), nach der die jeweilige Beziehung hergeleitet wurde.

Zu (a):

Die Aussagen (16) und (17) folgen unmittelbar aus den Resultaten von DAVIS und RESNICK (1986). Gemäß (15) gilt für $\alpha = 1$

$$\left((cn)^{-2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \; [c^2 n \ln(n)]^{-1} \sum_{i=2}^{n} (X_i - \bar{X})(X_{i-1} - \bar{X}) \right)$$

$$\xrightarrow{d} \big(S(\tfrac{1}{2}, 1), S(1,0) \big) \; ,$$

und $S(\frac{1}{2}, 1)$, $S(1,0)$ sind stochastisch unabhängig.

Für Zufallsvariablen $Y_i, Y_{ij}, \; i = 1, 2, \; j = 1, 2, \ldots$ und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^k$ gilt:

$$(Y_{1n}, Y_{2n}) \xrightarrow{d} (Y_1, Y_2) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow g(Y_{1n}, Y_{2n}) \xrightarrow{d} g(Y_1, Y_2) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(vgl. SERFLING, 1980, S.24).

Mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; g(y_1, y_2) = \frac{y_2}{y_1}$ folgt unmittelbar die Behauptung von (a).

Zu (b):

Gemäß (11) bzw. (12) ist auf der rechten Seite von (17) $S(1,0)$ Cauchy-verteilt und $S(\frac{1}{2}, 1)$ Lévy-verteilt mit gemeinsamer Dichte

$$f_{S(1,0),S(1/2,1)}(x, y) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y^3}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2y}} \; , \quad x \in \mathbb{R} \, , y \in \mathbb{R}_+ \; .$$

Falls X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind, ist

$$\mathrm{E}(g(X, Y)) = \iint g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx \, dy$$

und somit

$$\begin{aligned}
\varphi_R(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{it\frac{S(1,0)}{S(1/2,1)}}) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y^3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y}} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{it\frac{x}{y}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx}_{=\varphi_{S(1,0)}(\frac{t}{y})=\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{y}}}\ dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y^3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y}-\frac{|t|}{y}}dy\ .
\end{aligned}$$

Substituiere $z = \frac{1}{y}(\frac{1}{2}+|t|) \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{z}(\frac{1}{2}+|t|)$ und $\frac{dy}{dz} = -\frac{1/2+|t|}{z^2}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi_R(t) &= \frac{\frac{1}{2}+|t|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{z^2} \frac{\sqrt{z^3}}{\sqrt{(\frac{1}{2}+|t|)^3}}\ \mathrm{e}^{-z}\,dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}+|t|}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}}\ \mathrm{e}^{-z}\,dz}_{=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+2|t|}}\ .
\end{aligned}$$

<u>Zu (c):</u>

Nach dem Invertierungssatz für charakteristische Funktionen ist

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

und somit

$$\begin{aligned}
f_R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-itx}\frac{1}{\sqrt{1+2|t|}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+2|t|}}\,dt\ .
\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung folgt aus der Symmetrie von $(1+2|t|)^{-1}$. Durch die Substitution $t=\frac{z}{2}$ und aufgrund der Symmetrie der Cosinus-Funktion ist

$$f_R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{x}{2}z)}{\sqrt{1+z}}\,dz\ . \tag{20}$$

Nach [3.751,2] ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{\sqrt{z+b}}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos(ab)+\sin(ab)-2\mathrm{C}(\sqrt{ab})\cos(ab)-2\mathrm{S}(\sqrt{ab})\sin(ab)\right]$$

für $a > 0$. Hierbei sind $\mathrm{S}(\cdot)$ und $\mathrm{C}(\cdot)$ das Fresnel'sche Sinus- bzw. Cosinusintegral, mit [8.250,2]

$$\mathrm{S}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \sin(y^2)\,dy$$

und [8.250,3]

$$\mathrm{C}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \cos(y^2)\,dy\ ,$$

oder als Reihendarstellung [8.253,2]

$$\mathrm{S}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{(4k+3)}}{(2k+1)!(4k+3)}$$

und [8.253,3]

$$\mathrm{C}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{(4k+1)}}{(2k)!(4k+1)}\ .$$

Somit ist wegen der Symmetrie der Cosinus-Funktion für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
f_R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{x}{2}z)}{\sqrt{1+z}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}\left[\cos(\frac{|x|}{2})+\sin(\frac{|x|}{2})-2\mathrm{C}(\sqrt{\frac{|x|}{2}})\cos(\frac{|x|}{2})-2\mathrm{S}(\sqrt{\frac{|x|}{2}})\sin(\frac{|x|}{2})\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}\left\{\cos\left(\frac{|x|}{2}\right)\left[1-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k|x|^{(4k+1)/2}}{(2k)!(4k+1)2^{(4k+1)/2}}\right]\right. \\
&\qquad \left. +\sin\left(\frac{|x|}{2}\right)\left[1-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k|x|^{(4k+3)/2}}{(2k+1)!(4k+3)2^{(4k+3)/2}}\right]\right\}\ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes und des Zusammenhangs (6) zwischen r und r_{VN} läßt sich leicht die asymptotische Nullverteilung des von Neumann ratios herleiten, wenn die Stichprobe aus dem Anziehungsbereich einer Cauchy-Verteilung stammt. PHILLIPS und LORETAN (1991) zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen R_n aus (7) für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert. Somit folgt unter den Voraussetzungen des Satzes und wegen der Symmetrie der Grenzverteilung R aus (17), daß für $n \to \infty$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)\left(\frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - X_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} - 2\right) \stackrel{d}{\to} R\,.$$

Für $x \to 0$ konvergiert die Dichte von R gegen unendlich. Dies ist leicht aus (20) zu sehen, denn

$$\begin{aligned} f_R(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+t} - \frac{1}{\pi} \\ &= \infty\,. \end{aligned}$$

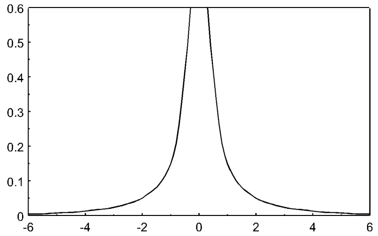
Dieses Ergebnis deckt sich mit den Beobachtungen von PHILLIPS und LORETAN (1991).

Da die Dichte der Grenzverteilung nur in Reihendarstellung vorliegt, müssen zur Bestimmung der asymptotischen Signifikanzpunkte numerische Methoden herhalten. Abbildung 1 zeigt die Dichte von R und in Tabelle 1 sind ausgewählte kritische Werte der modifizierten Autokorrelationstests für das Testproblem (3) aufgeführt.

TABELLE 1: Quantile der Grenzverteilung R

$\mathbf{1} - \vartheta$	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
$\mathbf{F_R^{-1}}(\mathbf{1} - \vartheta)$	5.785	7.653	8.893	10.456	11.821

ABBILDUNG 1: Dichte der Grenzverteilung R



Literatur

Anderson, R.L. (1942): „Distribution of the Serial Correlation Coefficient“, *The Annals of Mathematical Statistics*, 13, 1 - 13.

Anderson, T.W. (1948): „On the Theory of Testing Serial Correlation“, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 31, 88 - 116.

Anderson, T.W. und **Walker, A.M.** (1964): „On the Asymptotic Distribution of the Autocorrelations of a Sample from a Linear Stochastic Process“, *The Annals of Mathematical Statistics*, 35, 1296 - 1303.

Cox, D.R. (1966): „The Null Distribution of the First Serial Correlation Coefficient“, *Biometrika*, 53, 623 - 626; Korrekturen, 54, 688.

Davis, R. und **Resnick, S.** (1986): „Limit Theory for the Sample Covariance and Correlation Functions of Moving Averages“, *The Annals of Statistics*, 14, 533 - 558.

Dixon, W.J. (1944): „Further Contributions to the Problem of Serial Correlation", *The Annals of Mathematical Statistics*, 15, 119 - 144.

Feller, W. (1971): *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York.

Gradshteyn, I.S. und **Ryzhik, I.M.** (1980): *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York.

Hart, B.I. und **Neumann, J. von** (1942): „Tabulation of the Probabilities for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", *The Annals of Mathematical Statistics*, 13, 207 - 214.

Holt, D.R. und **Crow, E.L.** (1973): „Tables and Graphs of the Stable Probability Density Functions", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 77B, 143 - 198.

Hotelling, H. (1961): „The Behavior of some Standard Statistical Tests under Non-Standard Conditions", *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 319 - 360.

Ibragimov, I.A. und **Linnik, Y.V.** (1971): *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Koopmans, T. (1942): „Serial Correlation and Quadratic Forms in Normal Variables", *The Annals of Mathematical Statistics*, 13, 14 - 33.

Krämer, W. und **Runde, R.** (1991): „Testing for Autocorrelation among Common Stock Returns", *Statistical Papers*, 32, 311 - 320.

Neumann, J. von (1941): „Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", *The Annals of Mathematical Statistics*, 12, 367- 395.

Neumann, J. von (1942): „A Further Remark Concerning the Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance“, *The Annals of Mathematical Statistics*, 13, 86 - 88.

Pan, J. (1968): „Distributions of the Noncircular Serial Correlation Coefficient“, *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability*, 7, 281 - 292.

Phillips, C.B. und **Loretan, M.** (1991): „The Durbin-Watson Ratio under Infinite-Variance Errors“, *Journal of Econometrics*, 47, 85 - 114.

Rubin, H. (1945): „On the Distribution of the Serial Correlation Coefficient“, *The Annals of Mathematical Statistics*, 16, 211 - 215.

Serfling, R.J. (1980): *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Wiley, New York.

Zolotarev, V.M. (1986): *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 65, American Mathematical Society.

Dr. Ralf Runde
Fachbereich Statistik
Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund