BIKNER-AHSBAHS, Angelika
Bremen/Kiel

Wie virtuelle Räume lernwirksam werden können

Menschen sind räumliche Wesen (Weiland, 2022). Räume bieten nicht nur Schutz, Räume bieten mehr. Sie können Mathematiklernen erlauben, ermöglichen, erleichtern, aber auch behindern. Die Digitalisierung schafft zudem neue Raumerfahrungen und die Veränderungen in den natürlichen Ressourcen in der Welt verlangen ein Überdenken unseres Raumgebrauchs. Trotz der zentralen Rolle von Raum, werden Räume in Design-Studien meist als gegeben angenommen. Im Vortrag werde ich an zwei Beispielen zeigen, wie das Design von virtuellen Räumen Erkenntnisprozesse in Mathematik und Mathematikdidaktik unterstützen kann. Dazu verwende ich die Raumkonzeption von Lefebvre (1991), der Räume als sozial produziert und reproduziert und dadurch als veränder- und anpassbar versteht. Nach seinem Raumverständnis sind Räume zunächst konzipiert (concieved space), sie werden durch räumliche Praktiken wahrgenommen und gestaltet (perceived space), und sie sind im gelebten Raum mit Erfahrungen verbunden (lived space). Löw (2023) hat zwei Prozesse sozialer Herstellung von Raum nachgezeichnet, *Spacing* und *Synthesizing*. Spacing umfasst räumliche Praktiken, die Räume erfassen, anpassen, (neu-)gestalten, strukturieren, etc. Synthesizing sind Prozesse, die räumliche Erfahrungen, die inhaltlich als zusammenhängend erlebt werden, miteinander verbinden. Am Beispiel des Mateliers, soll diese Konzeptualisierung zunächst illustriert werden.

Das Matelier ist ein mathematikdidaktisches Lernlabor mit didaktischer Sammlung, virtuellen Angeboten und Komponenten für den Einsatz in Schulen. Der *Raum* mit Materialangebot ist für erforschendes Lernen entlang der Schulausbildung *konzipiert*. So findet man dort nicht nur Material zum Erforschen von Mathematik für alle Klassenstufen, es werden in einem *rhythmischen* Ablauf Angebote von der Primarstufe bis zur Oberstufe gemacht, die entsprechende Klassen wahrnehmen können (*perceived space*).



Abb. 1: Matelier als konzipierter Raum

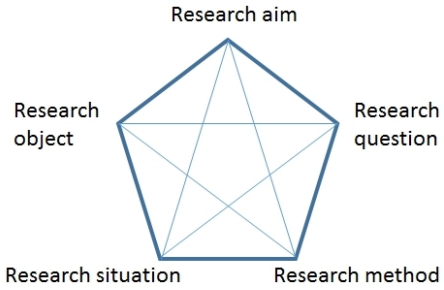
Der *gelebte Raum* (lived space) hinterlässt Erfahrungen bei den Lernenden und den Lehrkräften, die sie in die Schule mitnehmen. Wenn Lehrkräfte diese Erfahrungen *rhythmisch* mit neuen Klassen wiederholen, können sie das erlebte *Spacing* zu forschenden Lehr-Lern-Formen *synthetisieren und selbst in ihrem Unterricht einsetzen*. (vgl. Bikner-Ahsbahs & Knipping, in

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Druck). Im Folgenden wird an zwei Beispielen gezeigt, wie diese Raumkonzeption genutzt wurde, um das Lernen in virtuellen Räumen zu gestalten und zu untersuchen.

Beispiel 1: Konferenzsystem - ein virtueller Raum als Erkenntnisraum

Während der Pandemie wurde die Summerschool YESS10 kurzfristig abgesagt. Das wurde zum Anlass genommen, um die Summerschool über ein Konferenzsystem durchzuführen und dies zu beforschen (Bikner-Ahsbahs, 2024). Weil Videos in einem solchen System Echtzeitkommunikation ermöglichten, konnten wir vorherige YESS-Erfahrungen nutzen. Da Kommunikationsformen über Körpersprache wie etwa Perspektivenübernahme in Hinblick auf Blickrichtungen und Gestengebrauch nicht möglich sind, mussten alle Erfahrungen, die mit dem sensomotorischen System zu tun haben, auf gemeinsames Sehen und Hören der Präsentationen der Teilnehmenden reduziert werden. Dies geschah auf zwei Weisen: (1) Das Forschungsfünfeck, das fünf Forschungsaspekte (Forschungsgegenstände, -ziele, -fragen, -methoden und -situationen) verknüpft, wurde als gemeinsame Grundlage eingesetzt und (2) eine rhythmisierte Orchestrierung dieses Einsatzes wurde konzipiert (Abb. 2). (Bikner-Ahsbahs, 2019; 2024).



Rhythmical use of the pentagon in the TWGs when
a. presenting own research
b. giving feedback as critical friend
Interaction in breakout groups of 2-3 students
c. getting and observing the expert's giving feedback
d. listening to peers giving and getting feedback
e. giving feedback as a peer

Abb. 2: Forschungsfünfeck (links, Bikner-Ahsbahs, 2019), rhythmischer Ablauf (rechts) "perceived space" (Bikner-Ahsbahs, 2024, S. 6-8).

Dieses Fünfeck erlaubte es, die Aufmerksamkeit aller auf ein invariantes, aber dynamisch genutztes Diagramm im geteilten Bildschirm auszurichten. Die Treffen wurden durch Präsentationen, Feedback, Zuhören, Diskussionen, Expertengespräche rhythmisch (Abb. 2) auf das Fünfeck bezogen gegliedert. In allen Phasen bezogen sich Experten und die Teilnehmenden in ihren Beiträgen auf dieses Diagramm durch deiktische Ausdrucksformen mit dem Pointer, dem Cursor oder sprachlich, "… to “see” and “hear” where the students pointed and what they articulated. Our sensory-motor systems were engaged, encompassing activities like seeing, hearing, listening, talking, pointing, and acting collectively on a shared object. This dynamic turned the pentagon into a shared reference space for object-related social interaction, fostering joint attention" (Bikner-Ahsbahs, 2024, S.13-14).

Die Rhythmisierung spielte für die Erkenntnisprozesse aller eine zentrale Rolle. Insgesamt zehn Mal wiederholten sich die Phasen a) bis e) (Abb. 2), aber zu unterschiedlichen Forschungsprojekten vor dem Hintergrund eines invarianten Diagramms, dem Forschungsfünfeck. So wurde das Fünfeck kollektiv zu einem Instrument der Strukturierung von Forschungserfahrungen und -kommunikation. Genau für diesen Zweck haben wir das Konferenzsystem gemäß den technologischen Möglichkeiten *konzipiert* (conceived space). Allerdings lag es an den Teilnehmenden selbst und der Unterstützung aus der YERME-Gruppe, wie der Raum in Gebrauch genommen (perceived space) und am Ende zu einem Raum intensiver Forschungserfahrungen wurde (lived space). Ein Kernergebnis war, dass das *rhythmisierte Spacing* als sozial-räumliche Praxis das Erkennen unterstützt, weil genau durch diese Rhythmisierung jede Person Raumerfahrungen in Hinblick auf Forschungspraktiken zu ihrem eigenen Projekt in der ihr eigenen Weise *synthetisieren* konnte. Dabei fand "Sehen" nie isoliert statt, sondern war stets mit *Sprechen, Handeln, Zeigen* und *Zuhören* in der Gruppe verknüpft. Drei Formen des Zuhörens waren lernwirksam: *Zuhören, um die Forschung der anderen zu verstehen, Zuhören, um zu erkunden, wie man die anderen in ihrer Forschung unterstützen kann*, und *Zuhören, um das eigene Projekt voranzubringen.* Es ist also das *rhythmisierte Spacing*, das Sehen-Handeln-Sprechen-Zeigen-Zuhören initiiert und *Co-Synthetisierungen* der Einsichten über Forschungspraktiken zum eigenen Forschungsprojekt ermöglicht. Das Konferenzsystem wurde so zu einem kollektiven Erkenntnisraum.

Beispiel 2: Augmented Reality - ein virtueller Raum wird epistemisch

Der Bericht zu Beispiel 2 (Bikner-Ahsbahs, in review) befindet sich aktuell im Begutachtungsverfahren. Deshalb soll hier nur kurz darauf eingegangen werden. Wie im Beispiel 1 ist das Kernelement des AR-Raums (Augmented Reality) ein Diagramm, dieses Mal aber ein dynamisch nutzbares Diagramm, das nur eine Person mit einer Brille virtuell wahrnehmen und interaktiv verwenden kann. Was hier invariant bleibt, ist nicht das Diagramm, sondern der Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Ableitung, den Karim erschließen soll. Dazu kann er sieben Funktionen erkunden, indem er sie in einer virtuellen Matrix auswählt und so in einem virtuellen Koordinatensystem sichtbar macht. Wenn er mit seiner gestreckten Hand einen Graph von links nach rechts entlangfährt, erzeugt er den Berührpunkt von Hand und Graph, eine Tangente und im gleichen Koordinatensystem Punkte der Ableitungsfunktion. Zunächst macht sich Karim mit dem AR-Raum vertraut und befasst sich mit den ihm bekannten Funktionen. Dann erkundet er neue komplexere Funktionen und prüft seine Einsichten, etwa wie seine Handneigung (=Tangentensteigung) und Ableitungsfunktion zusammenhängen.

Rhythmisches Spacing ist im *konzipierten Raum* angelegt und wird durch Karims gezielte und wiederholende Auswahl von Funktionen, um seine Einsichten zu prüfen, realisiert. Die Exploration unbekannter Funktionen erweist sich als zentrale Phase *synthetisierender* mathematischer Erkenntnisse, die den AR-Raum in einen epistemischen Raum umwandelt.

Diskussion

Diese Beispiele zeigen, dass geeignete Konzipierungen von Räumen eine mit Erkenntnisprozessen einhergehende Spacing-Praxis ermöglichen und Erkenntniserfahrungen im gelebten Raum initiieren können. Löw betont, dass durch Spacing Beziehungen zwischen Personen und Kulturgütern entstehen. Diese können Spacing-Praktiken wie Hand-Graph-Erkundungen routinisieren. Rhythmische Wiederholungen von Spacing-Praktiken können die Beziehungen konsolidieren und zu etwas Neuem synthetisieren: z.B. zu forschenden Lehr-Lern-Formen (im Matelier) oder zu einem von Karim und der AR-Technologie co-produzierten epistemischen Raum (Beispiel 2).

Danksagung: Dieser Beitrag beruht teilweise auf Forschung im Kontext eines Workshops zu Augmented Reality, der an der Ben-Gurion Universität (Negev) stattfand. Das Projekt dazu (PI ist Osama Swidan) wurde gefördert von der Israeli Science Foundation (Grant No. 1089/18).

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2019). The Research Pentagon: A Diagram with which to Think about Research. In G. Kaiser & N. Presmeg (Hrsg.*), Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 153–180). Springer.

Bikner-Ahsbahs, A. (2024). Design research on an online summer school in mathematics education: An insight into philosophical commitments. *Educational Design Research 8*(1), article 63. https://doi.org/10.15460/eder.8.1.2129

Bikner-Ahsbahs, A. (im Review). Hand, rhythm and the epistemic space. How a student senses an AR-space to explore the derivative function. *Digital Experience in Mathematics Education, Special Issue: Augmented Reality.*

Bikner-Ahsbahs, A. & Knipping, C. (in Druck). Das Matelier: eine Raumkonzeption In B. Thöne, A. Körner, J. von Ostrowski, R. Rink, J. Scharlau & D. Walter (Hrsg.). *„Was hast du dir dazu überlegt?“ Denkwege von Kindern und Inhalte gleichermaßen in den Blick nehmen. Festschriften der Mathematikdidaktik* (pp. 155–164). WTM.

Lefebvre, H. (1991). *The production of space* (D. Nicholson-Smith, Trans.). Basil Blackwell. (Original work published 1974).

Löw, M. (2023/2000). *Raumsoziologie.* Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft.

Weiland, T., & Poling, L. (2022). Taking a spatial turn. *Mathematics Teacher Educator* 11(1), 57–67. https://doi.org/10.5951/MTE.2021.0047