

Maike SCHINDLER, Dortmund

Empirische Studie zum Begriff der negativen Zahl

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und die Ergebnisse einer empirischen Studie im Rahmen eines Dissertationsprojektes dargestellt, in welchem die individuellen Begriffe der negativen Zahl von Schülerinnen¹ in den Blick genommen wurden. Die Ziele der Untersuchung bestanden unter anderem darin, das Vorwissen der Schülerinnen zum Begriff der negativen Zahl sowie seine Entwicklung über eine Unterrichtsreihe hinweg zu erfassen, um Rückschlüsse zu diesem Gegenstandsbereich zu erzielen.

Negative Zahlen haben für Schülerinnen in verschiedener Hinsicht Relevanz: Sie sind zum einen für die Lebenswelt der Schülerinnen, zum anderen für weitere Gegenstandsbereiche, bspw. die Algebra, bedeutsam. Entsprechend sind negative Zahlen Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufe: Während Schülerinnen bereits in der Primarstufe verschiedene Erfahrungen im Zusammenhang mit *Zahlenraumerweiterungen* machen, werden in der Sekundarstufe vermehrt *Zahlbereichserweiterungen* bedeutsam (vgl. Heffendehl-Hebeker & Prediger 2006), die unter anderem auch eine Erweiterung des Zahlbereichs um die negativen Zahlen umfassen. Dies geht mit einer „gewandelten Zahlvorstellung“ (ebd., 1) einher: Es kommt zu einer Erweiterung und Veränderung des Zahlbegriffs der Schülerinnen.

Im Rahmen dieser Studie wird eine Perspektive auf *Begriffe* eingenommen, in der das *individuelle* Verständnis der Schülerinnen von Begriffen im Fokus steht. Diese individuelle Perspektive kann unterschieden werden von einer *fachlichen* Perspektive, in der Begriffe die Bausteine der Mathematik darstellen (Vollrath 1987). Um Begriffe in ihrer individuellen Perspektive zu konzeptualisieren und erfassen zu können, wurde für den Rahmen der vorliegenden Studie ein theoretischer Hintergrund gewählt, der philosophische (vgl. Brandom 2000), (entwicklungs-) psychologische und mathematikdidaktische Sichtweisen (vgl. Vergnaud 1996) einbezieht und in ähnlicher Form in den Arbeiten von Hußmann und Schacht (2009) und Schacht (2012) zum Einsatz kam. Wesentlich für den Theoriehintergrund und das in diesem Zusammenhang entwickelte Schema zur Analyse individueller Begriffe ist die Betrachtung von Begriffen in ihrer diskursiven Praxis. Dabei werden individuelle *Urteile* i.S. individueller Annahmen (z.B. „Minuszahlen sind unter der Null.“) und ihr Gebrauch in Begründungszusammenhängen sowie individuelle *Fokussierungen* auf bestimmte Aspekte der Situation (z.B. Minuszeichen oder Temperaturveränderungen) als essentiell für

¹ Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

individuelle Begriffe aufgefasst. Individuelle Begriffe werden entsprechend als Netze aus Fokussierungen und Urteilen, welche inferentiell gegliedert sind – als *individuelle Begriffsnetze* – verstanden.

Das übergreifende *Anliegen der Untersuchung* besteht darin, einen Beitrag zur Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen im Zusammenhang mit dem Begriff der negativen Zahl zu leisten. Um Lehr- und Lernprozesse optimal zu gestalten, ist es notwendig, mögliche Lernvoraussetzungen von Schülerinnen i.S. möglicher Hürden sowie effektive Hilfen u.v.m. zu kennen und aufzugreifen. In der vorliegenden Studie wurde im Speziellen untersucht, über welches Vorwissen – im Sinne von Begriffsnetzen – Schülerinnen bereits *vor* einer Einführung negativer Zahlen verfügen, und es wurde untersucht, wie diese Begriffsnetze sich mittelfristig über eine Unterrichtsreihe hinweg entwickeln und verändern. Dabei wurden insbesondere die ersten Anfänge mit negativen Zahlen in den Blick genommen. Werden negative Zahlen im Mathematikunterricht eingeführt, so erfolgt i.d.R. zunächst ein erster Kontakt unter Rückgriff auf lebensweltliche Kontexte. In diesem Zuge lernen Schülerinnen u.a., dass das Minuszeichen neben seiner Funktion als Operationszeichen auch die Funktionen als Vorzeichen und als Inversionszeichen hat (vgl. Vlassis 2004). Es schließt sich eine Thematisierung der Ordnungsrelation an, woraufhin die Rechenoperationen für ganze Zahlen thematisiert werden. Im Rahmen dieser Studie wurden die Begriffsnetze der Schülerinnen mit besonderem Blickwinkel auf die Deutungen des Minuszeichens und die Ordnungsrelation untersucht. Bisherige Untersuchungen deuten darauf hin, dass Schülerinnen z.T. bereits *vor* einer unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen diese offenbar in ihrer formal-symbolischen Darstellung deuten können (vgl. Malle 1988, Borba 1995). Ein Erkenntnisinteresse der dargestellten Untersuchung besteht darin, diesem Sachverhalt nachzugehen, und zu ermitteln, inwiefern Schülerinnen formal-symbolisch dargestellte negative Zahlen bereits vor einer unterrichtlichen Einführung deuten können und welches Begriffsnetz sie dabei zu negativen Zahlen aktivieren können.

Um u.a. zu erfassen, inwiefern Schülerinnen negative Zahlen in ihrer formal-symbolischen Darstellung deuten können, wurde ein *Untersuchungsdesign* gewählt, in dem die Schülerinnen je zwei formal-symbolisch dargestellte Zahlen der Größe nach ordneten: Es wurden halbstandardisierte, klinische Einzelinterviews mit Schülerinnen einer 6. Klasse einer Gesamtschule in NRW geführt, in welcher negative Zahlen noch nicht eingeführt worden waren. In den Interviews erhielten die Schülerinnen je zwei Zahlenkarten, bei denen sie bestimmen sollten, welche der Zahlen die größere sei (z.B. bei 12 und -15, -8 und -12). Auf diese Weise wurde zum einen un-

tersucht, inwiefern die Schülerinnen negative Zahlen deuten konnten, und zum anderen, inwiefern sie bereits über eine tragfähige Ordnungsrelation für ganze Zahlen verfügten. Das Datenmaterial in Form von Videodokumenten, entsprechenden Transkripten und Schreibprodukten der Schülerinnen wurde für die Analyse mit dem entwickelten Analyseschema genutzt.

Die im Folgenden dargestellten, *ausgewählten Ergebnisse der Untersuchung* basieren auf den Einzelfallanalysen zweier Schülerinnen (Nicole und Tom) mit dem Analyseschema. Hinsichtlich der *Begriffsnetze*, über welche Schülerinnen *vor einer unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen* verfügen, weisen die Untersuchungsergebnisse auf eine große Heterogenität der Schülerinnen hin. Die Einzelfallanalyse des Schülers *Tom* zeigt auf, dass dieser bei der Betrachtung von Zahlen der Form ‚-12‘ bereits ein Begriffsnetz zu negativen Zahlen aktivieren und das Minuszeichen als Vorzeichen (vgl. Vlassis 2004) deuten kann und von „Minuszahlen“ spricht. Sein Begriffsnetz ist bereits reichhaltig, stabil und über weite Teile tragfähig. Essentiell sind dabei lebensweltliche Erfahrungen mit Temperaturen, die er wiederholt aktiviert und gebraucht. Es gelingt Tom, diese Erfahrungen zu dekontextualisieren: Er überträgt diese auf „Minuszahlen“ und er wechselt bspw. zu einer Darstellung an der waagerechten Zahlengeraden. Die Schülerin *Nicole* aktiviert bei Betrachtung von Zahlen der Form ‚-12‘ ein Begriffsnetz zu natürlichen Zahlen und zur Subtraktion. Sie deutet das Minuszeichen als Operationszeichen (vgl. ebd.) und aktiviert Vorwissen im Zusammenhang mit der Subtraktion, dem Zählen und der schriftlichen Subtraktion. Sie scheint insbesondere anzunehmen, dass es vor der Null keine Zahlen gebe. Sie aktiviert – im Gegensatz zu Tom – kein Vorwissen aus lebensweltlichen Kontexten. Die Feinanalyse mit dem Analyseschema deutet darauf hin, dass Nicole zum Zeitpunkt vor der unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen Zahlen der Form ‚-12‘ noch nicht als negative Zahlen deuten kann und in diesem Zusammenhang noch kein Begriffsnetz speziell zu negativen Zahlen aktivieren kann. Dies ist zu dem Zeitpunkt im Lernprozess natürlich angemessen – jedoch erweitert es die bisherigen Befunde, die darauf hindeuteten, Schülerinnen hätten hierzu in der Regel bereits Vorwissen. Diese Ergebnisse tragen insofern zu einer Restrukturierung des Gegenstandsbereiches bei, als sie aufzeigen, welche Heterogenität und Spannweite an Vorwissen zum Begriff der negativen Zahl vorliegen kann und welche (lebensweltlichen) Erfahrungen die Schülerinnen dabei je (re-)aktivieren. Hinsichtlich einer *Entwicklung über eine Unterrichtsreihe* hinweg zeigt sich u.a., dass auch die Schülerin Nicole schließlich das Minuszeichen als Vorzeichen deutet und negative Zahlen an der Zahlengerade anordnen kann. Es zeigt sich darüber hinaus, dass beide Schülerinnen im Nachinterview zum Erklären und Begründen maßgeblichen Gebrauch von

der Zahlengerade machen, welche während der Unterrichtsreihe ein essentielles Modell war. Dies deutet darauf hin, dass das gewählte Modell sich offenbar auf die Begriffsnetze der beiden Schülerinnen ausgewirkt hat.

Hinsichtlich der **Ordnungsrelation** zeigt das Begriffsnetz des Schülers Tom zum Zeitpunkt *vor der Einführung* negativer Zahlen auf, dass in seinem Fall ein Fokussieren auf den Absolutwert der negativen Zahlen zu einer geteilten Ordnungsrelation, die sich an den Beträgen der Zahlen orientiert (vgl. Mukhopadhyay 1997), führt. Diese Fokussierung scheint er in Analogie zu den natürlichen Zahlen zu wählen: Die Zahl, die den größeren „Zahlenwert“ hat, ist größer. Dass es *zwei* mögliche Ordnungsrelationen gibt, die – je nach Fragestellung und Kontext – adäquat und sinnvoll sind, scheint ihm noch nicht bewusst. *Nach* der Unterrichtsreihe scheint der Schüler jedoch dazu in der Lage, bewusst die beiden möglichen Ordnungsrelationen zu unterscheiden und sie flexibel zu wählen. Eine solche Flexibilität im Umgang mit negativen Zahlen und der Ordnungsrelation für ganze Zahlen ist ein zu erstrebendes Lernziel für Schülerinnen.

Literatur

- Borba, R. E. (1995): Understanding and operating with integers: difficulties and obstacles. In: L. Meira & D. Carraher (Hrsg.): Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (19th, Recife, Brazil, July, 22-27, 1995). Volume 2, 226-231.
- Brandom, R. (2000): Expressive Vernunft. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.
- Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. In: Praxis der Mathematik H. 11, 1-7.
- Hußmann, S. & Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, 339-342.
- Malle, G. (1988): Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: W. Dörfler (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 16. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky und Stuttgart: B.G. Teubner, 259-319.
- Mukhopadhyay, S. (1997): Story telling as sense-making: children's ideas about negative numbers. In: Hiroshima Journal of Mathematics Education H. 5, 35-50.
- Schacht, F. (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg-Teubner Verlag.
- Vergnaud, G. (1996): The theory of conceptual fields. In: Steffe, L. P. & Nesher P. (Hrsg.): Theories of mathematical Learning. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum, 219-239.
- Vlassis, J. (2004): Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. In: Learning and Instruction H. 14, 469-484.
- Vollrath, H.-J. (1987): Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19(3), 123-127.