

HOLLMANN, Christian & BERENDONK, Stephan
Wuppertal

Analogisieren und Modellieren: Auf zwei unterschiedlichen Wegen zur Max-Plus-Algebra

Stellen wir uns vor, eine Lehrperson plant eine Projektstunde, in welcher sich die Lernenden mit mathematischen Fragestellungen ihrer Wahl auseinandersetzen. Wir schauen uns die Gedanken zweier Lernender an, welche sich mit auf den ersten Blick unterschiedlich wirkenden Themen beschäftigen.

Ein Weg zur Max-Plus-Algebra durch Analogisieren

Anna findet es sehr spannend, dass Eigenschaften, wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, die sie in ihrer Schulzeit zunächst für die natürlichen Zahlen kennengelernt hat, auch für die ganzen, rationalen und reellen Zahlen erfüllt sind und möchte sich mit diesen Eigenschaften näher auseinandersetzen. Sie fragt sich, ob diese Gesetze nur für die gewöhnliche Addition und Multiplikation gelten oder auch von anderen Operationen erfüllt werden. Daher probiert sie verschiedene Möglichkeiten aus. Unter anderem schaut sie, was passiert, wenn sie die Multiplikation durch das Bilden des Maximums ersetzt. Sie betrachtet also die Operationen:

$$a \odot b := a + b \quad \text{und} \quad a \oplus b := \max\{a, b\}.$$

Sie stellt fest, dass die neue Operation \oplus sowohl das Kommutativ- als auch das Assoziativgesetz erfüllt. Zudem erkennt sie, dass im Allgemeinen gilt:

$$a \odot (b \oplus c) = a + \max\{b, c\} = \max\{a+b, a+c\} = (a \odot b) \oplus (a \odot c),$$
$$a \oplus (b \odot c) = \max\{a, b+c\} \neq \max\{a, b\} + \max\{a, c\} = (a \oplus b) \odot (a \oplus c).$$

Aus der festgestellten Distributivität von \odot über \oplus folgert sie, dass sich in der von ihr erwogenen Struktur, die Operation \odot analog zur Multiplikation und die Operation \oplus analog zur Addition auf den reellen Zahlen verhält.

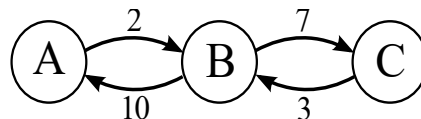
Bei Betrachtung der reellen Zahlen und der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ist ihr außerdem aufgefallen, dass die "0" bei der Addition und die "1" bei der Multiplikation besondere Rollen einnehmen, da für jede reelle Zahl x gilt: $x + 0 = x$ sowie $x \cdot 1 = x$.

Da es sich bei der \odot -Operation um die gewöhnliche Addition reeller Zahlen handelt, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ somit $x \odot 0 = x$. Anna fragt sich, ob es auch für die \oplus -Operation ein solches besonderes Element in den reellen Zahlen gibt, und sucht daher eine Zahl y , sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\max\{x, y\} = x$. Da es in den reellen Zahlen kein kleinstes Element gibt, kommt sie zu der Erkenntnis, dass es keine solche reelle Zahl y geben kann. Daher stellt sie

sich einfach vor, dass ε eine Zahl darstellt, die kleiner als jede reelle Zahl ist, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \oplus \varepsilon = \max\{x, \varepsilon\} = x$. Auf diese Weise hat sie auch für die \oplus -Operation ein neutrales Element gefunden.

Ein Weg zur Max-Plus-Algebra durch Modellieren

Benni wiederum hat am Morgen gesehen, wie die Busfahrpläne ausgetauscht wurden. Er fragt sich, wie denn ein solcher Fahrplan überhaupt zustande kommt. Um dieser Frage auf die Spur zu kommen, überlegt er sich ein Beispiel bestehend aus drei Bushaltestellen A, B und C:



Die Werte auf den Pfeilen geben die Fahrtzeiten zwischen den Haltestellen an. Zu Beginn befinden sich zwei Busse an B, ein Bus an A und ein Bus an C. Busse an A und C fahren nach B und von zwei an B startenden Bussen fährt jeweils einer nach A und einer nach C. Benni findet es sinnvoll, wenn die Busse an B immer zur gleichen Zeit abfahren, sodass dort Umstiege möglich sind. Er nimmt zunächst an, dass alle vier Busse zu Beginn zeitgleich losfahren. Die zweite Abfahrt an A ist dann nach zehn Minuten möglich, an C nach sieben Minuten, da jeweils auf keine weiteren Busse gewartet werden muss. An B trifft der Bus von A zwar bereits nach zwei Minuten ein, bis zur Weiterfahrt muss aber eine weitere Minute gewartet werden, da der an C gestartete Bus erst dann eintrifft. Die nächste Abfahrt an einer Station ist also stets von den vorherigen Abfahrtszeiten an den Stationen abhängig, von denen Busse zu dieser Station starten. Benni notiert sich in der folgenden Tabelle links die ersten vier möglichen Abfahrtszeiten an den drei Stationen und stellt fest, dass diese unregelmäßig sind. Statt alle Busse zu Beginn zeitgleich starten zu lassen, variiert er die Startzeiten und betrachtet erneut die ersten vier Abfahrtszeiten. Nach einigen Versuchen stellt er fest, dass Abfahrten an allen drei Stationen regelmäßig im Sechs-Minuten-Takt möglich sind, wenn er die erste Abfahrt an A drei Minuten nach der ersten Abfahrt an C und vier Minuten nach der ersten Abfahrt an B wählt, wie in der folgenden Tabelle rechts dargestellt.

	1.	2.	3.	4.
A	0	10	13	22
B	0	3	12	15
C	0	7	10	19

Abfahrtszeiten [min] bei gleichzeitigem Start

	1.	2.	3.	4.
A	4	10	16	22
B	0	6	12	18
C	1	7	13	19

Abfahrtszeiten [min] bei verschobenen Start

Benni fragt sich, warum ausgerechnet alle sechs Minuten eine regelmäßige Abfahrt möglich ist. Er betrachtet den Graphen noch einmal genauer und hält fest: Die beiden Busse, die zwischen A und B pendeln, benötigen zwölf Minuten, um über A wieder zurück zu B zu gelangen. Das durchschnittliche Pfeilgewicht auf diesem Kreis beträgt also $\frac{12}{2} = 6$. Benni erkennt, dass es keinen weiteren Kreis gibt, der ein größeres durchschnittliches Pfeilgewicht besitzt, und stellt die Vermutung auf, dass die regelmäßigen Abfahrtszeiten, wenn wie in seinem Beispiel stets über jeden Pfeil ein Bus fährt, mit dem maximalen durchschnittlichen Pfeilgewicht zusammenhängen.

Zwei Wege zum gleichen Gegenstand

Nach der Stunde betrachtet die Lehrperson die Ergebnisse. Sie möchte Bennis Ansatz weiterverfolgen und stellt den Graphen tabellarisch dar.

		von		
		A	B	C
nach	A	Keine Kante	10	Keine Kante
	B	2	Keine Kante	3
	C	Keine Kante	7	Keine Kante

Sie überlegt nun, wie sie aus den verschobenen ersten Abfahrtszeiten, die Benni ermittelt hat, die nächsten Abfahrtszeiten berechnen kann. Von B ist eine Abfahrt möglich, nachdem der nach vier Minuten bei A gestartete Bus und der nach einer Minute bei C gestartete Bus eingetroffen sind. Die nächste Abfahrtszeit berechnet sich also durch $\max\{2 + 4, 3 + 1\} = 6$. In der Formel werden die Wege von A und C zu B berücksichtigt. Gäbe es zudem einen Weg von B nach B, so wäre entsprechend das Maximum dreier Zahlen zu bilden. Die Lehrperson fragt sich daher, welche Fahrzeit sie nicht vorhandenen Wegen zwischen zwei Haltestellen zuordnen kann, um zu einer einheitlichen Formel zur Bestimmung der nächsten Abfahrtszeiten zu gelangen. Ihr fällt ein, dass Anna in ihrer Ausführung mit ε ein neutrales Element auf der Menge $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ für die Maximum-Operation identifiziert hat. Um mit ε auch die \odot -Operation auszuführen, definiert sie $\varepsilon \odot x = \varepsilon = x \odot \varepsilon$. Mithilfe von $\max\{2 + 4, \varepsilon + 0, 3 + 1\} = (2 \odot 4) \oplus (\varepsilon \odot 0) \oplus (3 \odot 1) = 6$ bestimmt sie die nächste Abfahrt von B. Sie geht analog für die anderen beiden Stationen vor und stellt die Abfahrtszeiten in einem Vektor dar. So erhält sie:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon \odot 4) \oplus (10 \odot 0) \oplus (\varepsilon \odot 1) \\ (2 \odot 4) \oplus (\varepsilon \odot 0) \oplus (3 \odot 1) \\ (\varepsilon \odot 4) \oplus (7 \odot 0) \oplus (\varepsilon \odot 1) \end{pmatrix}.$$

So wie ihre Schülerin zuvor beim Distributivgesetz, erkennt die Lehrperson in dieser Darstellung eine Analogie: Die Rechnung entspricht genau der bekannten Matrizenmultiplikation, wenn jedes \cdot durch \odot und jedes $+$ durch \oplus ersetzt wird. Definiert sie also auf diese Weise eine Operation \odot auf Matrizen in Analogie zur gewöhnlichen Matrizenmultiplikation, so ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von dieser Analogie, wendet sie die \odot -Operation auf zwei identische Matrizen an und entwickelt so auch einen neuen Potenzbegriff:

$$A^{\odot 2} := A \odot A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 10 \end{pmatrix}.$$

Sie überlegt, was die Potenz in Bennis Sachkontext bedeutet. Um den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von $A^{\odot 2}$ zu bestimmen, ermittelt sie für $1 \leq k \leq 3$ das Maximum aller Summen von Pfeilgewichten von der Haltestelle j über die Haltestelle k zu der Haltestelle i . Sie bestimmt also die maximale Weglänge von j zu i über zwei Kanten. Durch Betrachtung der Diagonaleinträge von $A^{\odot 2}$ sind die längsten Kreise der Länge 2 zu erkennen. Der Wert 12 in den ersten beiden Diagonaleinträgen entspricht genau dem bereits von Benni erkannten längsten Kreis.

Mit Hilfe der von Anna eingeführten und von der Lehrperson auf die Matrizen erweiterten Notation, weiß diese nun auch Bennis Problemstellung zu formalisieren. Sie definiert dazu, wieder unter Verwendung des Symbols \odot , die Verknüpfung eines Skalars mit einem Vektor in Analogie zur bekannten Skalarmultiplikation und kann damit das Bisherige wie folgt ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \odot 4 \\ 6 \odot 0 \\ 6 \odot 1 \end{pmatrix} =: 6 \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus den Identitäten geht hervor, dass die nächste Abfahrtszeit an allen Stationen sechs Minuten nach der jeweils vorherigen Abfahrtszeiten möglich ist. Im Allgemeinen ist also für eine Matrix A ein Vektor v und ein Skalar λ gesucht, sodass $A \odot v = \lambda \odot v$ gilt. Auch hier erkennt die Lehrperson eine Analogie: Denn wird wie zuvor \odot durch die gewöhnliche Multiplikation ersetzt, entspricht diese Gleichung genau dem Eigenwertproblem $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

An dieser Stelle hält die Lehrperson inne und bemerkt, dass Annas strukturorientiertes Projekt und Bennis anwendungsbezogenes Projekt zum selben Gegenstand führen und die gemeinsame Betrachtung beider Kontexte weitere Einsichten gewährt.