

Stephan BERENDONK, Köln; Rainer KAENDERS, Köln

## **Am Spirographen Mathematik erleben**

Die Beschäftigung mit Mathematik hat im Laufe der Jahrhunderte einen festen institutionellen Platz in Schulen und Universitäten erlangt. Dabei wird Mathematik vielfach als etwas erlebt, was man absolvieren und beherrschen soll und zu deren Beschäftigung man von „Außen“ aufgefordert werden muss. Im schulischen Kontext wird daher häufig nach dem Sinn und Zweck von Mathematik gefragt.

Möchten wir die zu behandelnde Mathematik den Lernenden gegenüber rechtfertigen, so stehen wir vor einer großen mathematikdidaktischen Herausforderung. Natürlich, eine Möglichkeit sich dieser Aufgabe zu nähern, besteht darin, den Reiz und die Leistungsfähigkeit der Mathematik in Anwendungskontexten durch Modellierung praktischer Probleme zu illustrieren, und so im Nachgang die Auseinandersetzung mit Strukturen zu motivieren. Problematisch dabei ist, dass viele relevante und interessante Anwendungskontexte nur mithilfe eines schon vorhandenen Repertoires mathematischer Strukturen sinnvoll erschlossen werden können. Die beeindruckenderen Beispiele sind eben zumeist mathematisch komplex.

Die Nützlichkeit der Mathematik in Bezug auf die Gesellschaft den Lernenden auf überzeugende Weise darzustellen und darüber die „Sinnfrage“ zu beantworten, ist jedenfalls kein leichtes Unterfangen. Andererseits beschäftigen sich viele Mathematiker mit Strukturen von deren gesellschaftlicher Relevanz sie, so sie denn schon existiert, gar nichts wissen, oder an der sie zumindest nicht erkennbar interessiert sind. So stellt sich die Frage, warum ein Mensch freiwillig Mathematik oder allgemeiner eine Wissenschaft betreibt. Dörpinghaus (2009) beschreibt das so: *„Wir betreiben Wissenschaft und nehmen Anstrengungen im Denken auf uns aus Liebe (eros). (...) Dieser Eros, diese Lust auf Bildung, dieses Angemacht-werden-von etwas und Nicht-mehr-ablassen-können, weil es uns beschäftigt und uns keine Ruhe lässt, ist, und das ist entscheidend für das Verständnis des eros, eben kein innerer Trieb des Menschen, wie man zunächst und durch psychologische Denkmuster geschult meinen könnte. Nein, er ist eine unbändige Neugierde, die sich an den Dingen entzündet und für deren Verständnis man all die Mühen auf sich nimmt.“*

Die Beschäftigung mit Mathematik muss Dörpinghaus zu folge also gar nicht an einen äußeren Zweck gebunden sein um sie als sinnvoll zu erfahren. Was wir brauchen, ist ein Kontext, der uns anspricht und über den wir aus uns heraus etwas erfahren möchten. Die Sinnfrage erweist sich dann als uninteressant. Einen solchen Kontext haben wir für uns selbst, für einige

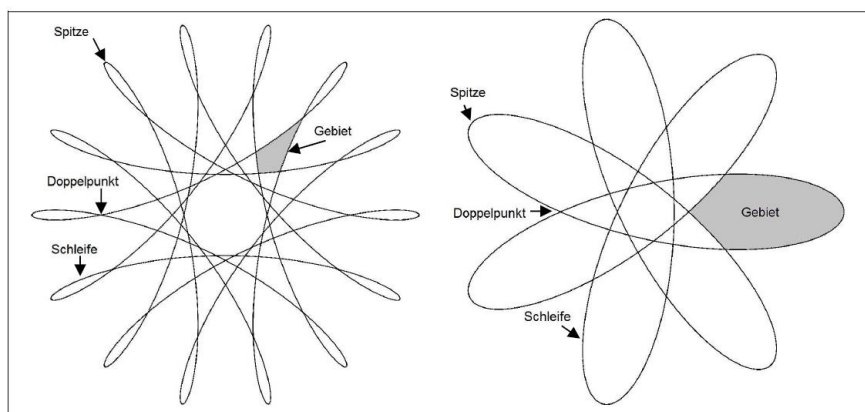
Lehrerinnen und Lehrer und vor allem für eine ganze Reihe von Schülerinnen und Schülern mit dem Spirographen gefunden.

Wir werden im Folgenden skizzieren, wie die Beschäftigung mit Spirographen Fragen bei den Handelnden hervorrufen kann, die dann weitere Strukturierungsprozesse motivieren und initiieren. Die dabei beschriebenen Erfahrungen sammelten wir bei Aktivitäten mit fünf verschiedenen Personengruppen:

- Primarstufe - KölnerKinderUni 2011 (mit M. Mink & T. Schmidt)
- Mittelstufe - Solinger Mathematik-Wochenende 2011
- Oberstufe - Masterclass Wiskunde D 2012 (mit L. van den Broek)
- Begabte - Känguru-Camp 2011 (mit L. van den Broek)
- LehrerInnen - Workshop bei den *NWD 2013*

## 1. Zeichnen, Zählen, Sprechen

Der Spirograph lädt zu einer spielerischen Beschäftigung ein, bei der viele bunte und ästhetische Bilder entstehen können. Das „Zeichnen“ alleine führt jedoch nicht unbedingt zu mathematischen Fragen, sodass auch ein begeisterter und ausdauernder Zeichner übersehen kann, dass es sich beim Spirographen zugleich um einen mathematischen Kontext handelt.



Eine hilfreiche Aktivität um einen Zugang zu diesem Aspekt des Spirographen zu erhalten, kann das „Zählen“ sein. Wir zählen einmal alles, was es an den gezeichneten Bildern, den Zahnrädern und während des Zeichenprozesses zu zählen gibt.

Nachdem wir munter gezählt haben, möchten wir gerne darüber „Sprechen“. Um aber mitteilen zu können, was wir beispielsweise gezählt haben, müssen wir die jeweiligen Formen und Phänomene benennen. Wir entscheiden uns für *Spitze*, *Doppelpunkt*, *Schleife* und *Gebiet* (siehe Abb.). Die

Wahl der suggestiven Bezeichnungen zusammen mit den Pfeilen auf die betreffenden Phänomene dürfte ausreichend erklären was gemeint ist.

Das „Zählen“ hat uns dazu angehalten, bestimmte Merkmale der Spirographen-Kurven bewusst wahrzunehmen. Durch das „Sprechen“ waren wir gezwungen diese explizit mit Begriffen zu versehen. Nun haben wir etwas in der Hand über das wir konkrete Fragen stellen können.

## 2. Spirographen induzieren Fragen

Die soeben beschriebene überwiegend von Zeichnen und Zählen geprägte Phase des „in-Kontakt-Tretens“ mit dem Spirographen als einem mathematischen Kontext führten wir auch jeweils bei den oben genannten Aktivitäten durch. Anschließend forderten wir die Gruppen dazu auf (mathematische) Fragen zum Spirographen zu stellen. Bei der Aktivität zur Kölner KinderUni und beim NWD-Workshop traten dabei Fragen zu folgenden Gegenständen auf (,S‘ für Schüler und ,L‘ für Lehrer (in Sechsergruppen)):

- Radien des inneren und äußeren Begrenzungskreises (8L)
- Färbbarkeit der entstehenden Bilder mit verschiedenen Farben (5L)
- Flächeninhalt und Anzahl der Gebiete (3L)
- Vielfalt und Typisierung der möglichen Kurven (L+2S)
- Länge der Kurven (L+S)
- Eigenschaften und Anzahl der Spitzen (2L)
- Figur als Parameterkurve (2L)
- Doppelpunkte oder Mehrfachpunkte (2L)
- Verhältnisse der Anzahlen der Zähne und anderer Größen (L+S)

Als einzelne Punkte wurden genannt: Vorhersage der Form der Kurven aufgrund der Zahnradzahlen und der Position des Stiftes im beweglichen Rad (S), Verhältnis der Radien der Ringe von Doppelpunkten um das Zentrum (L), Anzahl der Doppelpunkte (L), Verbindung zu türkischen Knoten oder Planetenbahnen (2 L), möglicher dreidimensionaler Spirograph (L), eindimensionale Version (entlang einer geraden Linie) z.B. zwei Trommeln mit verschiedenen Rhythmen (L), Dreieck als innere Form (L), Kurven mit nur einem Gebiet (L), Tangente in einem Punkt (L), Eigenschaften und Ähnlichkeiten der Gebiete (L), „Zurückschleifen“ oder „Wendepunkte“ (L), Verhältnis 2:1 eine Ellipse? (L).

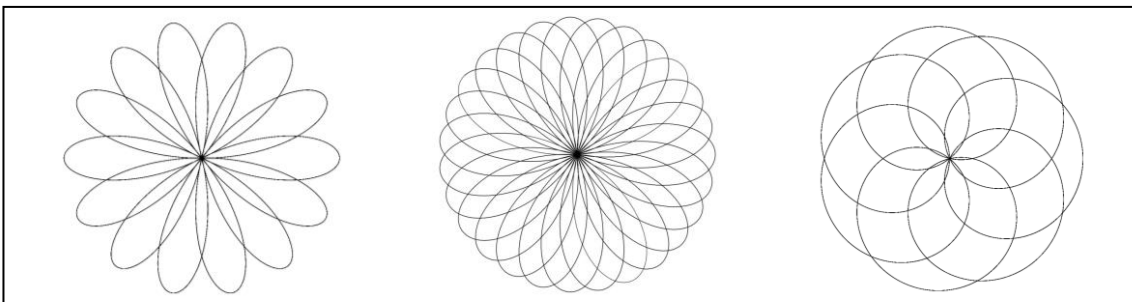
Wir beobachten, wie die pure Beschäftigung mit dem Spirographen Fragen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades hervorruft. Bemerkenswert ist zu-

dem, dass ein bestimmter Kanon von Fragen wiederholt auftritt, sodass sich eine Lehrperson gut auf die prinzipiell offene Situation vorbereiten kann.

### 3. Beziehungshaltigkeit

Einige der genannten Fragen (z.B. die nach dem Radius des inneren und äußeren Kreises) können mit gesundem Menschenverstand, manche schon mit Schulwissen (z.B. ggT, Bruchrechnung, Symmetrieargumente, Schubfachprinzip, Kongruenz und Ähnlichkeit) beantwortet werden. Für das Lösen anderer Fragen kann zunächst der Erwerb einzelner neuer Begriffe hilfreich sein (z.B. das momentane Drehzentrum zur Konstruktion einer Tangente oder die Windungszahl zum Nachweis der Zweifärbbarkeit). Aber es gibt auch Fragen (z.B. nach der Länge der Kurven, nach dem Flächeninhalt der Gebiete oder nach der Anzahl der Doppelpunkte), die tiefer gehen und mit elementaren Mitteln nur schwer in den Griff zu kriegen sind.

Sobald man sich mit den Problemen beschäftigt, stößt man wieder auf neue Phänomene und es entstehen neue Fragen. Zum Beispiel führt die Frage nach möglichen höheren Schnittpunkten auf elementarem Wege zur Betrachtung und möglicherweise schließlich zu einem eingehenderen Studium von Rosenkurven (siehe Abb.).



Die aufgeführten Fragen decken auch aus thematischer Sicht ein breites Spektrum ab. Neben arithmetischen Fragen (z.B. nach der Anzahl der Spitzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Zähne der verwendeten Räder), und elementargeometrischen Fragen (z.B. ob es sich beim Verhältnis 2:1 um eine Ellipse handelt), treffen wir auf topologische Fragen (z.B. nach der Färbbarkeit der entstehenden Bilder mit verschiedenen Farben) und analytische Fragen (z.B. nach dem Flächeninhalt der Gebiete). Wir haben es hier offenbar mit einem äußerst reichen Kontext zu tun.

### Literatur

- Berendonk, S., Van den Broek, L. (2013): SpiroSporen. Zebra-Boek Serie, Utrecht: Epsilon-Uitgaven.
- Dörpinghaus, A. (2009): Bildung - Plädoyer wider die Verdummung (Erweiterte Fassung). In: Dt. Hochschulverband (Hg.): Glanzlichter der Wissenschaft. Ein Almanach. Stuttgart.