

RÖBNER, Michael & BINDER, Karin
München

"80% von den 70% der 100% der Schüler/innen haben Ma- the als nicht Lieblingsfach, also von den Mädchen." - Ver- sprachlichung von Anteilen aus Visualisierungen

Einleitung und theoretischer Hintergrund

"Mathematisch Kommunizieren" ist eine der zentralen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erwerben sollen (Kultusministerkonferenz, 2022). Dabei wird häufig zwischen einer rezeptiven (z.B. Lesen) und einer produktiven (z.B. Schreiben) Komponente unterschieden (Pappert, 2016). Darüber hinaus erfüllt Sprache im Unterricht nicht nur eine *kommunikative* Funktion, sondern kann in ihrer *epistemischen* Funktion auch zum Aufbau konzeptuellen Wissens über mathematische Begriffe beitragen (Prediger & Zindel, 2017).

Besonders im Bereich von Wahrscheinlichkeiten und Anteilen erscheint eine intensive Beschäftigung mit den relevanten sprachlichen Mitteln sinnvoll, da hier richtige und falsche Formulierungen oberflächlich oft sehr ähnlich erscheinen. Beispielsweise wird in der Literatur für das Berechnen/Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten häufig über Verwechslungen von bedingten Wahrscheinlichkeiten (z.B. "Die Wahrscheinlichkeit, dass eine infizierte Person ein positives Testergebnis erhält") mit der zugehörigen invertierten bedingten Wahrscheinlichkeit (z.B. "Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person infiziert ist, wenn sie ein positives Testergebnis erhält") oder Schnittwahrscheinlichkeit (z.B. "Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person infiziert ist und ein positives Testergebnis erhält") berichtet (Woike et al., 2023). Diese Verwechslungen stehen dabei in Zusammenhang mit einer falschen Identifikation der relevanten Teilmenge (z.B. infizierte und positiv getestete Personen) und/oder Obermenge (z.B. alle positiv getesteten Personen). Zahlreiche Studien konnten bereits zeigen, dass solche Fehler bei der Nutzung von geeigneten stochastischen Visualisierungen in Kombination mit der Verwendung natürlicher Häufigkeiten (z.B. "20 von 100") anstelle von Wahrscheinlichkeiten ("20%") deutlich seltener auftreten (Binder et al., 2020; McDowell & Jacobs, 2017).

Post und Prediger (2020) sprechen zudem der Beziehung zwischen Teilmenge und Obermenge eine besondere Rolle für den Aufbau von konzeptuellem Wissen über Anteile zu. Erst wenn diese abstrakte Teilmenge-Obermenge-Beziehung von den Lernenden explizit versprachlicht wird (z.B. über Worte wie "von", "davon" oder "von denen"), kann von einem tiefen Verständnis über Anteile ausgegangen werden. Viele stochastische

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Visualisierungen wie Vierfeldertafeln oder Einheitsquadrate stellen diese Beziehung jedoch nicht explizit dar. In Knoten-Ast-Strukturen, wie Baum- oder Netzdiagrammen, können zumindest einige dieser Beziehungen durch die Verbindung der entsprechenden Mengen mit Ästen angedeutet werden.

Forschungsfragen und Methode

Anknüpfend an die zuvor skizzierten Befunde zum Ablesen und Bestimmen von Informationen aus Visualisierungen (rezeptive Komponente), wurde in dieser Studie das Versprachlichen von statistischen Informationen, die nur in Visualisierungen dargestellt sind, untersucht (produktive Komponente). Im Fokus standen dabei unter anderem folgende Forschungsfragen:

- Wie gut gelingt Schüler:innen die Versprachlichung verschiedener Anteile in Abhängigkeit von Informationsformat (Prozent vs. natürliche Häufigkeiten) und Visualisierung (Baumdiagramm vs. Netzdiagramm)?
- Wie häufig versprachlichen die Schüler:innen explizit die Teilmenge-Obermenge-Beziehung je nach Informationsformat und Visualisierung?

Dazu bearbeiteten $N=138$ Schüler:innen aus zwei bayerischen Realschulen in einem Papier-und-Bleistift-Test je vier Aufgaben (je zwei Informationstypen, Informationsformate, Visualisierungen und Kontexte) zur Versprachlichung von statistischen Informationen aus stochastischen Visualisierungen (siehe Tab. 1). Die Reihenfolge der verschiedenen Faktoren wurde dabei systematisch variiert. Eine beispielhafte Aufgabe ist in Tab. 2 dargestellt.

Aufgabe	Typ der Information	Informationsformat	Visualisierung	Kontext
1a	Schnittinformation	Anteile in Prozent	Baumdiagramm	Mathematikpräferenz
1b	Bedingte Information			
2a	Schnittinformation	Natürliche Häufigkeiten	Netzdiagramm	Mitgliedschaft im Sportverein
2b	Bedingte Information			

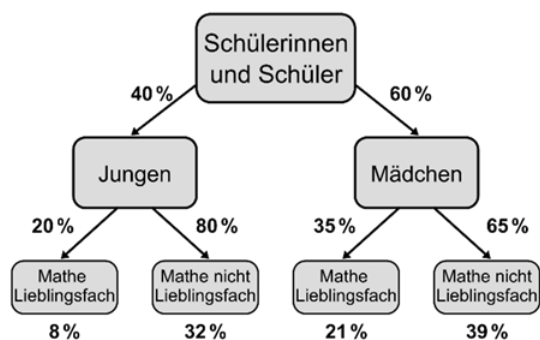
Tabelle 1: Schematische Darstellung der vier Aufgaben in einem Testheft.

Ergebnisse und Diskussion

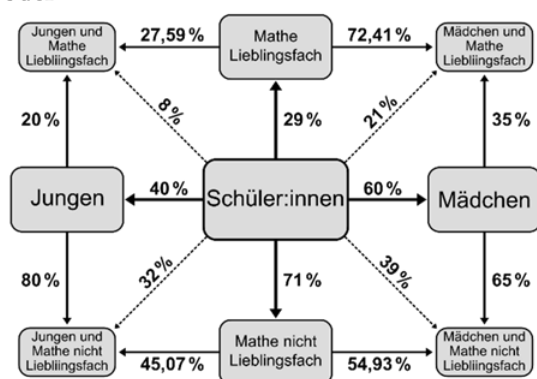
Insgesamt zeigt sich ein deutlicher Einfluss des Informationsformats auf die Richtigkeit der Versprachlichungen: Über beide Visualisierungen und Kontexte hinweg werden sowohl Schnittinformationen als auch bedingte Informationen in natürlichen Häufigkeiten signifikant öfter korrekt versprachlicht als in Prozent. Die Art der Visualisierung selbst scheint dabei keinen Einfluss

Aufgabe 1

Betrachte nachfolgendes Diagramm.



oder



a) Beschreibe möglichst genau in eigenen Worten, wofür die **21%** im Diagramm stehen.

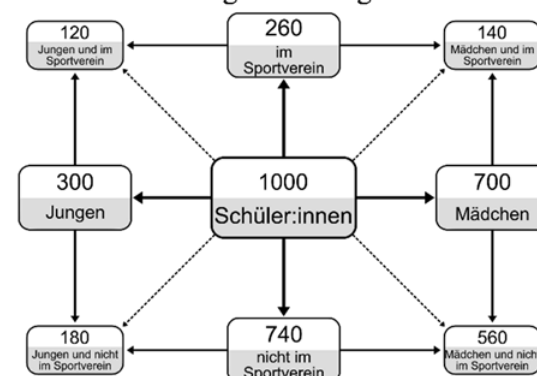
Mögliche Lösung: *21% der Schüler:innen sind Mädchen, die Mathe als Lieblingsfach haben.*

b) Beschreibe möglichst genau in eigenen Worten, wofür die **80%** im Diagramm stehen.

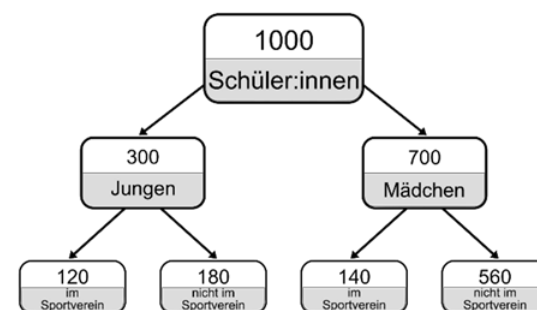
Mögliche Lösung: *80% der Jungen haben Mathe nicht als Lieblingsfach.*

Aufgabe 2

Betrachte nachfolgendes Diagramm.



oder



a) Beschreibe möglichst genau in eigenen Worten, wofür die **120 von 1000** im Diagramm stehen.

Mögliche Lösung: *120 von 1000 Schüler:innen sind Jungen, die im Sportverein sind.*

b) Beschreibe möglichst genau in eigenen Worten, wofür die **560 von 700** im Diagramm stehen.

Mögliche Lösung: *560 von 700 Mädchen sind nicht im Sportverein.*

Tabelle 2: Exemplarische Aufgabenstellung. Die beiden Aufgaben wurden jeweils auf einer eigenen Seite präsentiert. Es wurde immer nur eine der beiden Visualisierungen gezeigt. Die mögliche Lösung wurde ebenfalls nicht angegeben.

darauf zu haben, ob die Versprachlichungen korrekt sind. Die einzige Ausnahme davon sind Schnittinformationen in Prozent, die aus Netzdiagrammen signifikant häufiger richtig versprachlicht werden als aus Baumdiagrammen. Darüber hinaus werden Schnittinformationen in natürlichen Häufigkeiten bei Baumdiagrammen öfter als Anteile von Anteilen (z.B. "Von 1000 Schüler:innen sind 300 Jungen und davon sind 120 im Sportverein" statt "Von 1000 Schüler:innen sind 120 Jungen im Sportverein") versprachlicht als bei

Netzdiagrammen. Diese Unterschiede zwischen den Visualisierungen könnten darauf zurückzuführen sein, dass Netzdiagramme die Beziehung zwischen der entsprechenden Teil- und Obermenge direkt durch einen Ast andeuten, welcher bei Baumdiagrammen für Schnittinformationen fehlt (vgl. Aufgabe 1 in Tab. 2).

Hinsichtlich der Häufigkeit der expliziten Versprachlichung einer Teilmenge-Obermenge-Beziehung (nicht notwendigerweise der richtigen!) wurden hingegen keine nennenswerten Unterschiede bezüglich der untersuchten Faktoren festgestellt. Während im Format der natürlichen Häufigkeiten die explizite Versprachlichung der Teilmenge-Obermenge-Beziehung ein guter Prädiktor für eine richtige Antwort ist, gilt dies insbesondere bei Schnitthäufigkeiten in Prozent nicht mehr. Darüber hinaus unterscheidet sich die Struktur der Versprachlichungen zwischen den beiden Formaten deutlich.

Die Erkenntnisse dieser Studie könnten zusammen mit weiteren Befunden als Grundlage für die Entwicklung eines Sprachtrainings zur flexiblen Nutzung von verschiedenen Formulierungen für Anteile und Wahrscheinlichkeiten genutzt werden, bei dem geeignete Visualisierungen als Hilfestellung eingesetzt werden.

Literatur

- Binder, K., Krauss, S. & Wiesner, P. (2020). A new visualization for probabilistic situations containing two binary events: The frequency net. *Frontiers in Psychology, 11*, 750. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00750>
- Kultusministerkonferenz (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik: Erster Schulabschluss (ESA) und mittlerer Schulabschluss (MSA). KMK.
- McDowell, M. & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin, 143*(12), 1273–1312. <https://doi.org/10.1037/bul0000126>
- Pappert, S. (2016). Zur Konzeptualisierung von Kommunikationsereignissen. In Behrens, Ulrike, Gätje, Olaf (Hrsg.), *Mündliches und schriftliches Handeln im Deutschunterricht*. Peter Lang GmbH.
- Post, M. & Prediger, S. (2020). Decoding and discussing part-whole relationships in probability area models: The role of meaning-related language. In J. Ingram & Erath, K., Rønning, F., Schüler-Meyer, A. (Vorsitz), *Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, Montpeiller. <https://hal.science/hal-02970604/>
- Prediger, S. & Zindel, C. (2017). School Academic Language Demands for Understanding Functional Relationships: A Design Research Project on the Role of Language in Reading and Learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(7b), 4157–4188. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00804a>
- Woike, J. K., Hertwig, R. & Gigerenzer, G. (2023). Heterogeneity of rules in Bayesian reasoning: A toolbox analysis. *Cognitive Psychology, 143*, 101564