

SPRATTE, Verena
Rostock

Philosophiedidaktische Ideen zur Förderung des Beweislesens

Nach wie vor bildet die Präsentation zahlreicher semi-formaler Beweise ein Kernelement universitärer Mathematikausbildung. Die üblicherweise in Lehrveranstaltungen präsentierten Beweise zeichnen sich durch große sprachliche Komplexität mit hohem Abstraktionsgrad bei äußerst geringer Redundanz und gleichzeitigem Fehlen von Struktur- und Autorenhinweisen aus (Österholm, 2008). Während Beweise für Dozierende mathematische "Gebrauchsliteratur" (Beutelspacher, 2004, S. 5) und damit alltägliche Arbeitsgegenstände darstellen, bereitet der Umgang mit diesen Fachtexten Studierenden regelmäßig Schwierigkeiten (Bauer & Skill, in press), die ähnlich auch aus der Philosophiedidaktik bekannt sind (Schnieder, 2014).

Im vorliegenden, laufenden Forschungsprojekt sollen daher unter Rückgriff auf Schnieder (2014) und Paravicini, Scharlau und Schnieder (2018) philosophiedidaktische Ideen zur Förderung des Leseverständnisses adaptiert werden, um das Beweislesen (insbesondere in der Studieneingangsphase) zu unterstützen. Dazu wurden fünf Lernumgebung zum Selbststudium ausgearbeitet, die in je eine typische, textexegetische Arbeitsweise einer Grundrichtung der Gegenwartsphilosophie (Hermeneutik, Analytik, Dialektik, Phänomenologie/Exemplarik und Spekulation) einführen. Zwei Teams von Studierenden des ersten Fachsemesters erprobten jede der Lernumgebungen am Beispiel jeweils eines selbstgewählten Beweises aus ihren Lehrveranstaltungen. Die videographierten Arbeitsprozesse sollen unter anderem mit Hilfe des kognitionspsychologischen Beweislesemodells nach Spratte (2024) hinsichtlich verschiedener Ebenen der Kohärenzbildung untersucht werden.

Literatur

- Bauer, T., & Skill, T. (in press). Mid-Proof Peer Instruction: The Diagnostic Potential of Voting Questions in the Midst of Proofs. *Preprint*.
- Beutelspacher, A. (2004). „Das ist o.B.d.A. trivial!“ (7. Aufl.). Vieweg.
- Österholm, M. (2008). Do students need to learn how to use their mathematics textbooks? The case of reading comprehension. *Nordisk matematikdidaktikk*, 13(3), 53-73.
- Paravicini, W., Schnieder, J. & Scharlau, I. (2018). HADES – The Invisible Side of Mathematical Thinking. In P. Ernest (Hrsg.), *The Philosophy of Mathematics Education Today* (S. 353-364). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_23.
- Schnieder, J. (2014). Mathematikdidaktische Potentiale philosophischer Denkrichtungen. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse* (S. 197-211). Springer.
- Spratte, V. (2024). Models for proof comprehension in secondary and tertiary education: Uniting the perspectives. *Mathematica Didactica*, 47(1).

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Philosophiedidaktische Ideen zur Förderung des Beweislesens

Beweislesen in der Studieneingangsphase

- Beweise als zentrales Mittel des mathematischen Erkenntnisgewinns (Rav, 1999)
- Vielzahl verschiedener Funktionen, u. a. Verifikation, Systematisierung, Kommunikation und Erklärung (De Villiers, 1990)
- Zieldifferentes Beweislesen auf unterschiedlichen Textebenen (Spratte, 2024)
- Beweisverständnis als eigenständiges Ziel universitärer Mathematikausbildung (Davies, 2020)

Beweise als Textgattung

- deduktive Verifikation mathematischer Aussagen
- überwiegend natürlich-sprachlich und semi-formal (Reid, 2010)
- kaum Struktur- oder Autorenhinweise (Selden & Selden, 2013)
- hohe Informationsdichte, komplexe Sätze, geringe Redundanz, hoher Abstraktionsgrad (Österholm, 2008)

Herausforderungen beim Beweislesen in der Studieneingangsphase

- Geringe Leistungen in Fragen zum Beweisverständnis (Bauer & Skill, 2020; Neuhaus & Rach, 2018)
- Beweisvalidierung mit Ratewahrscheinlichkeit (Healy & Hoyles, 2000)

„Bei Beweisen lese ich- also ich würde das vergleichen mit philosophischen Texten [...] Und dann lese ich ihn zu Ende, dann lese ich ihn nochmal durch, dann verstehe ich ein bisschen mehr, aber immer noch nicht. Und so nach drei mal Lesen gehe ich den halt wirklich Schritt für Schritt durch, jeden Satz und versuche den wirklich als solchen nachzuvollziehen, wie man jetzt von da nach da kommt. [...] Was habe ich am Anfang? Was habe ich am Ende? Wie ist der strukturiert? Und was will mir das überhaupt sagen? [...] Wo will der überhaupt damit hin? [...] **Also ich würde sagen, ich lese den [Beweis] sehr anders als normale Texte, aber ich lese den Beweis sehr ähnlich wie komplexe Texte, wie zum Beispiel philosophische Texte.**“ (Ausschnitt eines Initialinterviews)

Wie können philosophiedidaktische Ideen das Beweislesen unterstützen?

HADES-Ansatz: Didaktisches Potential philosophischer Grundpositionen (Paravicini et al., 2018; Schnieder, 2014)

Visualisierung der fünf philosophischen Strömungen im Hades, erstellt mit DALL-E und ideogram.ai



Hermeneutisch

Gedankenstrom

Zyklisches Anreichern und Vertiefen des Vorverständnisses durch Horizontverschmelzung mit dem Textverständnis

Alytisch

Strukturbäume

Strukturanalyse der beteiligten Argumente in Anlehnung an Toulmin

Dialektisch

Beweise als Dialoge

Beweise für neue Autoren- oder Leserschaften umschreiben

Exemplarisch

Begriffe ausloten

Eigenschaften typischer Beispiele und ihre Verallgemeinerbarkeit

Spekulativ

Was wäre, wenn...?

Variationen der Aussage erfinden, evaluieren und den ursprünglichen Beweis als potentiellen Ansatz verwenden

Entwicklung und Erprobung von Selbstlernmaterial zum Beweislesen

Initialinterviews (N=13)

Laut denkendes Lesen zweier vorgegebener Beweise
Leitfadengestütztes Rahmeninterview

Fünf Erprobungsinterviews in festen 2er-Gruppen (N=5x2)

Erprobung der fünf Arbeitsblätter an einem aktuellen Beweis oder Begriff aus den Lehrveranstaltungen

hermeneutisch

Woche 4-5

analytisch

Woche 6-7

exemplarisch

Woche 8-9

dialektisch

Woche 11-12

spekulativ

Woche 13-14

Propädeutikum
(3 Wochen)

Vorlesungszeit des ersten Fachsemesters
(14 Wochen)

Geplante Auswertung

- Verständlichkeit, intendierte und tatsächliche Verwendung des Materials
- Analyse der betrachteten Textebenen und der Kohärenzbildung (Spratte, 2024)
- Aufbau von konzeptuellem Begriffsverständnis beim Beweislesen mit der AiC-Theorie



Überarbeitung des Materials

- **Hermeneutisch:** Gedankenstrom-Beispiel auf geeigneten Beweis beziehen, Vorverständnis stärker inhaltsorientiert ansprechen
- **Analytisch:** Mündung der Pfeile nur in die Begründung oder Argumentationsanalyse nach Govier (2010)
- **Dialektisch:** Dialogisches Schreiben konkreter zur verbesserten Führung der Leserschaft und zu Selbsterklärungen lenken
- **Exemplarisch:** Beweis fokussieren: Illustrieren am Beispiel (Bauer et al., 2022)
- **Spekulation:** Einbezug des vorliegenden Beweistexts stärken (vorhandene „Runde 3“ ausweiten und hervorheben)

VERENA SPRATTE

(ausgewählte) Literatur

Institut für Mathematik |
Didaktik der Mathematik,
Universität Rostock

Paravicini, W., Schnieder, J. & Scharlau, I. (2018). HADES – The Invisilbe Side of Mathematical Thinking. Springer
Schnieder, J. (2014). Mathematikdidaktische Potentiale philosophischer Denkrichtungen. Springer
Spratte, V. (2024). Models for proof comprehension in secondary and tertiary education: Uniting the perspectives. MD