

HUTH, Melanie & BILLION, Lara
Gießen, Frankfurt am Main

Diagrammatik im frühen mathematischen Lernprozess

Semiotische Perspektive auf mathematische Lernprozesse

Unter semiotischer Perspektive wird der Kern mathematischen Agierens als Gebrauch von Zeichen und Diagrammen verstanden (Dörfler, 2015; Peirce, 1931). Dieses "diagrammatic reasoning" (Peirce, 1931, CP 1.54) wird als Konstruktion, Manipulation und Verallgemeinerung an Diagrammen beschrieben. Die Zeichen- und Diagrammverwendung sowie deren Bedeutung sind nicht per se gegeben, sondern abhängig von sozialen Aushandlungen im komplexen Zeichenprozess (Schreiber, 2013). Mathematische Erkenntnisse gehen aus diesem Prozess hervor und beeinflussen ihn gleichzeitig. Diesen Grundannahmen folgend, ist für den mathematischen Lernprozess anzunehmen, dass der Gebrauch von Zeichen und Diagrammen elementarer Lerngegenstand und zugleich Ausdruck von Lernzuwachs ist. Es stellt sich damit die Frage, wie die Diagrammatik im mathematischen Lernprozess initiiert, beobachtet und beschrieben werden kann.

Multimodales diagrammatisches Arbeiten - Eine Projektidee

Das geplante Projekt geht aus zwei Forschungsarbeiten hervor, welche die skizzierte semiotische Perspektive auf mathematisches Lernen einnehmen und moduspezifisch für Handlungen und Gesten die Bedeutung für diagrammatisches Arbeiten belegen (Billion, 2023; Huth, 2023). Ergebnisse gemeinsamer Analysen zeigen zudem die Bedeutung des Zusammenspiels von Handlungen und Gesten für die Erzeugung und den Umgang mit mathematischen Darstellungen. Während Handlungen Diagramme erzeugen und diese regelhaft manipulieren, erläutern Gesten Regeln an Diagrammen, zeigen Relationen zwischen diesen und können selbst zu flüchtigen Diagrammen werden (Billion & Huth, 2023). Ausgehend von diesen Forschungen soll im Projekt untersucht werden, inwiefern diagrammatisch geprägte mathematische Lernsituationen im Grundschulalter initiiert, beobachtet und beschrieben werden können, um langfristig das diagrammatische Potenzial von Lernenden zu beschreiben. Der Beitrag fokussiert die ersten beiden Aspekte anhand von Vorstudien Daten: Wie kann diagrammatisches Arbeiten anhand von figurierten Zahlen initiiert und beobachtet werden?

Initiierung und Beobachtung diagrammatischen Arbeitens

In der Vorstudie wurde eine mathematische Situation erhoben (videografiert), in der sich zwei Zweitklässlerinnen mit figurierten Zahlen am Beispiel der Dreieckszahlen beschäftigen. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt der Planung der Situation, die als Durchführungsmanual dient. Die Konzeption

erlaubt sozialen Austausch, Spielraum eigener Erzeugungen von Zahlenfiguren und spricht die verschiedenen Aspekte des *diagrammatic reasoning* an.

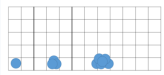
Aufg.	Material	Handlung	Gesten	Sprache	Impuls, wenn die Lernenden nicht weiterkommt	Abbruch/ Bemerkung
S1		Bevor die Lernenden an den Tisch kommen liegen auf dem Karoraster drei Häufchen (1, 3, 6) in den verschiedenen Spalten				
			Zeigegeste auf 1. Häufchen Zeigegeste auf 2. Häufchen Zeigegeste auf 3. Häufchen	Ich habe euch drei Häufchen hingelegt. Hier liegt ein Häufchen, hier liegt ein Häufchen und hier liegt ein Häufchen. Das sind alles Plättchen. Könnt ihr mit jedem Häufchen an Plättchen etwas legen?		

Abb. 1: Ausschnitt aus der initiierten mathematischen Situation

Die Situation besteht aus vier Sequenzen: Sequenz 1 spricht die Konstruktion von Diagrammen durch Handlungen an, indem aus gegebenen Plättchen als unstrukturierte Mengen (entsprechend der Dreieckszahlen) eigene Plättchenfiguren erzeugt werden sollen. Anschließend soll in Sequenz 2 zu diesen Plättchenfiguren die Nächste durch eine weitere Plättchenmenge ergänzt werden. Erzeugen die Lernenden kein eigenes Plättchenmuster, wird eine geometrische Darstellung der Dreieckszahlen angeboten. Diese Sequenz spricht das Erkennen von Regeln und die regelgeleitete Manipulation des Diagramms an. In Sequenz 3 werden die Lernenden nach Veränderungen der Anzahl der Plättchen zwischen den Elementen des Musters gefragt, um eine lautsprachliche und gestische Beschreibung der erkannten Regeln und der Ergebnisse der Manipulation zu initiieren. Die letzte Sequenz soll durch die arithmetische Zahlenfolge der Dreieckszahlen allgemeine lautsprachliche Aussagen der Lernenden evozieren, die auch Beziehungen der beiden Diagramme - geometrische und arithmetische Darstellung - beinhalten. Zur Beobachtung des diagrammatischen Arbeitens werden alle Aspekte des *diagrammatic reasoning* in Kombination mit multimodalen Ausdrucksweisen in einem Protokollbogen aufgeführt. Er dient zur Strukturierung des Videomaterials und zur Identifizierung von forschungsrelevanten Stellen, die dann transkribiert und mit qualitativ-rekonstruktiven Methoden analysiert werden.

Einblick in die erhobene Situation

Die folgenden Ausschnitte einer Situation aus der Vorstudie sollen keine Analyse widerspiegeln, sondern einen Einblick in das Datenmaterial und erste Erkenntnisse anhand des Protokollbogens geben. In Sequenz 1 (siehe Abb. 2) ordnen die Lernenden die Plättchen rechteckig an und begründen dies damit, dass sie Reihen gelegt haben. Auf die Frage, wie es weitergeht,

antwortet eine Lernende, dass acht Plättchen in zwei Viererreihen gelegt werden könnten. Außerdem ergänzt sie, dass man mit einem oder drei Plättchen nur eine Reihe legen kann, da es sich nicht um gerade Zahlen handele.

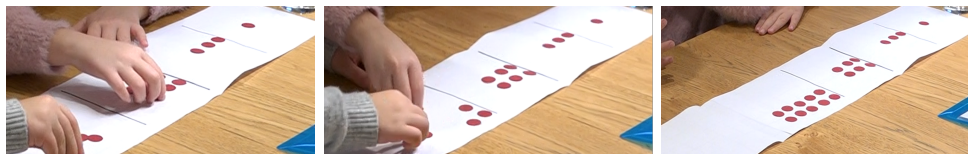


Abb. 2: Lernende arbeiten an Sequenz 1

In Sequenz 1 erstellen die Lernenden also ein eigenes Diagramm durch regelgeleitete Handlungen nach selbsterzeugten Regeln. In Sequenz 2 wird den Lernenden die geometrische Folge der Dreieckszahlen angeboten. Sie werden gefragt, wie das nächste Element dieser Folge aussieht. Sie legen dieses korrekt und beginnen ihre Handlungen mit der unteren Reihe (siehe Abb. 3).

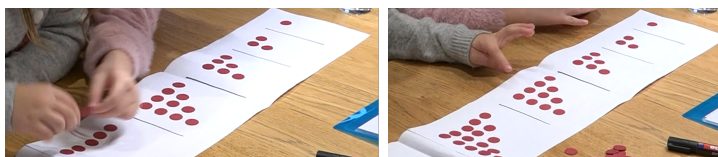


Abb. 3: Lernende arbeiten an Sequenz 2

Das Vorgehen in ihren Handlungen nutzen sie in ihrer Argumentation, in der sie lautsprachlich und gestisch erklären, dass sie unten fünf Plättchen aufgrund der vier im vorherigen Element legen. Im Weiteren beziehen sie immer die Reihe darüber mit ein. In der Sequenz nutzen sie regelgeleitete Handlungen, um das Diagramm zu manipulieren und durch Gesten und Lautsprache die Regeln des Diagramms zu erklären. In Sequenz 3 (siehe Abb. 4) beschreiben die Lernenden mathematische Relationen zwischen den Elementen des Musters. Sie präzisieren ihre lautsprachlichen Äußerungen gestisch am Diagramm und klären die Regel des vorliegenden Diagramms.

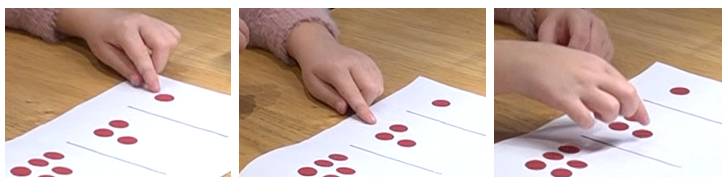


Abb. 4: Lernende arbeiten an Sequenz 3

Die Lernenden erzeugen dabei keine allgemeingültige Regel und verorten ihre Erläuterung gestisch stets am Diagramm. In Sequenz 4 wird den Lernenden die arithmetische Folge der Dreieckszahlen präsentiert. Sie erläutern, dass es die gleiche "Aufgabe" sei (siehe Abb. 5). Auf Nachfrage erklären sie, dass es sich nicht um das Gleiche handele, da es Punkte und Zahlen wären. Sie bestätigen aber, dass die gleiche Regel vorliegt.

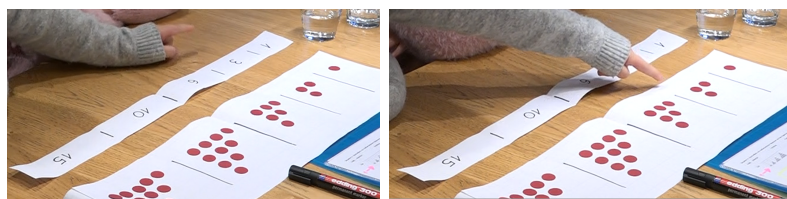


Abb. 5: Lernende arbeiten an Sequenz 4

Insgesamt werden fast alle Aspekte des *diagrammatic reasoning* thematisiert. Zudem ändern sich die Modi der Lernenden im Verlauf. Die Regeln des Diagramms werden bei der Konstruktion und Manipulation vor allem durch Handlungen deutlich, während bei der Regelerläuterung und dem Vergleich von Diagrammen eher Lautsprache und Gesten genutzt werden.

Ausblick und weiteres Vorgehen

Im Weiteren sollen identifizierte Stellen der videografierten Situationen transkribiert und qualitativ ausgewertet werden. Dazu ist geplant, eine semiotisch angepasste Kontextanalyse als im Ursprung inhaltsanalytisches Verfahren durchzuführen und so die Diagrammdeutungen der Lernenden zu rekonstruieren (Billion, 2023). Anschließend soll anhand dieser Rekonstruktionen der komplexe semiotische Prozess (Schreiber, 2013) mithilfe einer Semiotischen Analyse auf Mikroebene beschrieben werden (Billion & Huth, 2023; Huth, 2023). Langfristig soll es möglich werden, die Diagrammatik im mathematischen Lernprozess initiieren und beobachten zu können, um diagrammatische Potenziale von Lernenden zu beschreiben.

Literatur

- Billion, L. (2023). *Mathematical learning through actions on diagrams – reconstruction of learners' interpretation when acting on digital and analogue materials*. Dissertation. Goethe-Universität Frankfurt, Universitätsbibliothek Johann Christian Senckenberg. <https://doi.org/10.21248/gups.79773>
- Billion, L. & Huth, M. (2023). Handlungen und Gesten von Lernenden an Diagrammen – eine semiotische Perspektive auf Darstellungen. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *BzMU 2022. 56. Jahrestagung der GDM in Frankfurt* (S. 89–92). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0>
- Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33–49). Springer Spektrum. <https://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55177-2>
- Huth, M. (2023). *Diagramme im Handumdrehen – Der Gebrauch von Gesten beim Mathematiklernen*. Dissertation. Goethe-Universität Frankfurt, Universitätsbibliothek Johann Christian Senckenberg. <https://doi.org/10.21248/gups.72106>
- Peirce, C. S. (1931-32, CP). *The collected papers of Charles Sanders Peirce. Vol. I & Vol. II*, eds. by C. Hartshorne, & P. Weiss. Harvard University Press.
- Schreiber, C. (2013). Semiotic processes in chat-based problem-solving situations. *ESM*, 82(1), 51–73. <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9417-7>