

WIGGELINGHOFF, Luca
Bielefeld

Frühes Divisionsverständnis vor dem formellen Erlernen – Kinder erklären ihre Lösungsstrategien: Eine qualitative Untersuchung

Weit bevor Kinder die Division in der Schule erlernen gelingt es ihnen, mit beachtlichem Erfolg Divisionsaufgaben im Sachkontext zu lösen. Dennoch bestehen offene Fragen zum Divisionsverständnis von Kindern zu Schulanfang. In einer vorausgehenden Untersuchung von Wiggelinghoff (2022) haben nicht wenige Kinder des ersten Jahrgangs bildlich dargestellte Verteilungsaufgaben durch das *Gruppieren durch Einkreisen* (s. Abb. 1) gelöst.

Das sind **12 Bonbons**. Die Bonbons sollen gerecht auf **3 Dosen** aufgeteilt werden. Wie viele Bonbons kommen in jede Dose?

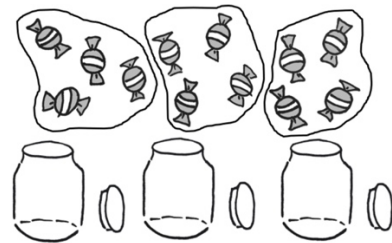


Abb. 1: Verteilungsaufgabe zum Term $12:3$, gelöst durch *Gruppieren durch Einkreisen*

Dabei blieb unklar, wie die Kinder diese korrekte Lösung ermittelt haben, da die Elementzahl je Teilmenge (immer vier Bonbons) nicht in der Aufgabenstellung enthalten war. Deshalb haben fünf dieser Kinder in Einzelinterviews eine vergleichbare Aufgabe zum Term $12 \div 3$ bearbeitet. Dabei zeigt sich, dass hinter einer Zeichnung wie in Abb. 1 vielfältige, teils erstaunlich elaborierte Vorgehensweisen verborgen sein können. So greifen zwei der Kinder auf Additionsaufgaben und ihr Teil-Ganzes-Verständnis zurück, um die präsentierte Verteilungsaufgabe zu lösen und nutzen damit Lösungsstrategien, die unabhängig von der zugrundeliegenden Grundvorstellung einsetzbar sind. Eines der Kinder nutzt beispielsweise die auswendig gewussten Additionsaufgaben $4+4=8$ und $8+4=12$, um das Ergebnis der Divisionsaufgabe zu ermitteln. Für Lehrkräfte zeigen die Befunde auf, dass hinter kindlichen Zeichnungen zu sachsituationen Divisionsaufgaben vielfältige Lösungsstrategien verborgen sein können. Die Ergebnisse unterstreichen, dass bereits bei Kindern im ersten Schuljahr informelle Divisionskompetenzen vorzufinden sind – offen für weitere Forschungsarbeiten bleibt, wie diese in der Vermittlung der Division zukünftig effektiv genutzt werden können.

Literatur

Wiggelinghoff, L. (2022). *Informelles Divisionsverständnis – Eine explorative Studie mit Kindern des ersten Jahrgangs einer Grundschule des gemeinsamen Lernens*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

Kinder erklären ihre Lösungsstrategien – Eine qualitative Untersuchung

Luca Wiggelinghoff

Forschungsinteresse

Sowohl aktuelle Studien als auch Untersuchungen aus den 1990er Jahren belegen, dass junge Kinder noch vor dem formellen Erlernen Divisionsaufgaben im Sachkontext mit beachtlichem Erfolg lösen und somit ein erstes Verständnis für diese Operation besitzen (z.B. Selter 1994; Böinig 1995; Cheeseman et al. 2022; Wiggelinghoff 2022). Dennoch bestehen bezüglich dieser Verständniseentwicklung viele offene Fragen. Eine dieser offenen Fragen betrifft die Lösungsstrategien junger Kinder beim Lösen von Divisionsaufgaben: In der Untersuchung von Wiggelinghoff (2022) haben Erstklässler:innen im Rahmen von Paper-and-Pencil-Tests Divisionsaufgaben im Sachkontext bearbeitet. Auffällig dabei war, dass viele Kinder die darin enthaltenen Verteilungsaufgaben durch die Strategie des *Gruppierens durch Einkreisen* gelöst hatten (s. Abb. re.). Dabei blieb unklar, wie die Kinder anhand dieser Vorgehensweise die korrekte Lösung (d.h. die Elementzahl je Teilmenge) ermittelt haben. Diese Interviewstudie greift dieses Forschungsdesiderat auf und soll die folgende Forschungsfrage beantworten:

Das sind **12 Bonbons**. Die Bonbons sollen gerecht auf **3 Dosen** aufgeteilt werden. Wie viele Bonbons kommen in jede Dose?



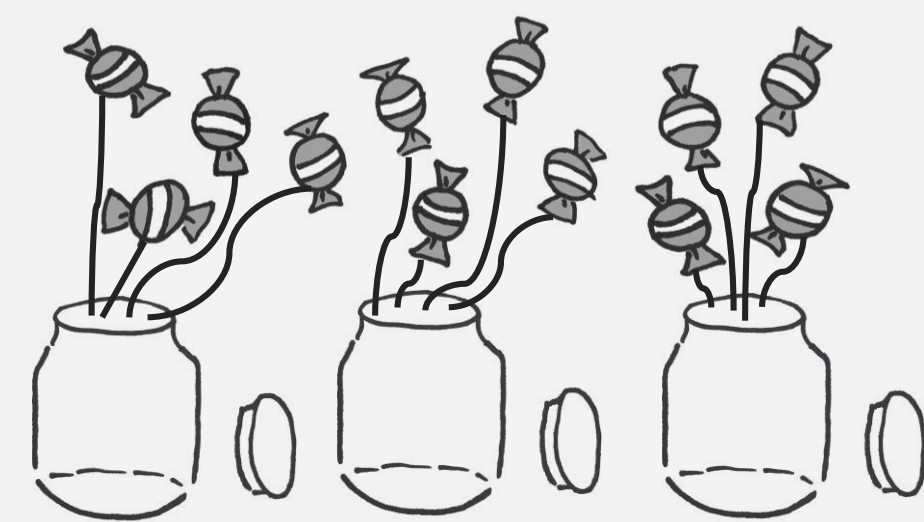
Wie ermitteln die Kinder bei Verteilungsaufgaben die korrekte Lösung (d.h. die Elementzahl je Teilmenge), wenn sie die Strategie *Gruppieren* (s. Abb. re.) anwenden?

Theoretischer Hintergrund

Eine Divisionsaufgabe (z.B. $12 \div 3$) lässt sich in zwei unterschiedlichen Situationen veranschaulichen: Im Sinne des **Verteilens** und des **Aufteilens**. Die beiden Grundvorstellungen (GV) der Division unterscheiden sich hinsichtlich ihrer mathematischen Struktur. Beide sind für den Aufbau eines Operationsverständnisses zentral und prägen den Mathematikunterricht zur Division (Padberg & Benz 2021). Zu den GV wenden Kinder unterschiedliche (zeichnerische) Lösungsstrategien an: Beim Verteilen sind das *Reihum-Verteilen* und *Schätzstrategien*, beim Aufteilen das *Gruppieren* typisch (Kouba 1989; Böinig 1995; Wiggelinghoff 2022).

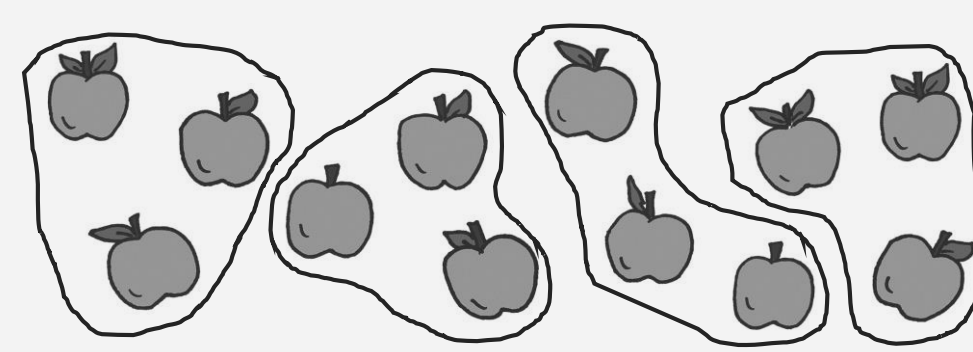
Verteilen
Gegeben: Anzahl der Teilmengen
Gesucht: Elementzahl je Teilmenge

Das sind **12 Bonbons**. Die Bonbons sollen gerecht auf **3 Dosen** aufgeteilt werden. Wie viele Bonbons kommen in jede Dose?



Aufteilen
Gesucht: Anzahl der Teilmengen
Gegeben: Elementzahl je Teilmenge

Das sind **12 Äpfel**. Immer **3 Äpfel** kommen in eine Tüte. Wie viele Tüten brauchst du, damit alle Äpfel verpackt sind?



Methodik

Stichprobe

Fünf Erstklässler:innen – 6 bis 8 Jahre
Auswahl: Verteilungsaufgabe durch *Gruppieren* gelöst

Datenerhebung: Klinisches Interview

Aufgabe:

$12 \div 3$

„Vor dir liegen **12 Bären**. Die Bären sollen gerecht auf **3 Felder** aufgeteilt werden. Wie viele Bären kommen auf jedes Feld?“



Datenauswertung

Qualitative Inhaltsanalyse (Kuckartz 2018)
Deduktive Haupt- & induktive Subkategorien

Ergebnisse

Paul

Paul und Pia setzen auch **im Interview** (Aufgabe: $12 \div 3$) das **Gruppieren** ein (immer direkt vier Bären auf ein Feld setzen) und erklären ihr Vorgehen. Die **Abbildungen links** zitieren die **Antworten der Kinder** und stellen ihren Lösungsweg schematisch dar.

„Weil $4+4$ ist gleich 8.“

„8+4 ist gleich 12.“

Pia

„Ich weiß, dass $6+6=12$ ist“

„Und $4+2$ sind ja 6“

„Und $2+2$ sind ja 4“

... nutzt auswendig gewusste Aufgaben: $4 + 4 = 8$ und $8 + 4 = 12$
... führt eine **wiederholte Addition** aus

Gemeinsamkeiten und zentrale Erkenntnisse:

1. Beide nutzen Additionsaufgaben und ein Teil-Ganzes-Verständnis (Zahlerlegungen, Assoziativgesetz)
2. Intrinsische Verknüpfung von Division und arithmetischem (Vor-)Wissen
3. Elaborierte Strategien (nach Kouba 1989) schon in Klasse 1: Kein Modellieren im Sinne der Grundvorstellung nötig

... nutzt die Aufgabe $6 + 6 = 12$ als Ausgangspunkt (auswendig)
... nimmt eine **Umgruppierung** von zwei in drei Teilmengen vor:
 $6 + 6 = (4 + 2) + (2 + 4) = 4 + 4 + 4$

Diskussion

Bezüglich der Forschungsfrage ist festzuhalten: Einige Kinder der Stichprobe nutzen schon in Klasse 1 elaborete Strategien, die unabhängig von der zugrundeliegenden GV einsetzbar sind. Besonders bemerkenswert ist dabei, dass die Kinder arithmetisches (Vor-)Wissen nutzen und dieses intrinsisch mit der Division vernetzen. Lehrkräfte sollten wissen, dass Kinder vielfältige Lösungsstrategien und Denkwege einsetzen, die nicht zwingend die Grundvorstellung modelliert. In der Forschung stehen sich beachtliche kindliche Vorkenntnisse zur Division und Schwierigkeiten mit dieser Operation bis in die Sekundarstufe hinein gegenüber (s. Böinig 1995). In weiteren Studien sollte untersucht werden, wie eine veränderte Vermittlung der Division unter Nutzung von Vorkenntnissen ausgestaltet werden kann – Bicknell et al. (2016) konnten beispielsweise positive Auswirkungen auf das Divisionsverständnis durch eine kontextbezogene Vermittlung ab Klasse 1 feststellen.

Literatur

- Bicknell, B., Young-Loveridge, J. & Nguyen, N. (2016). A design study to develop young children's understanding of multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, 28(4), 567-583.
- Böinig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Münster/New York: Waxmann.
- Cheeseman, J., Downton, A. & Roche, A. (2022). Ideas of early division prior to formal instruction. In C. Fernández, S. Linares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Volume 2)*. (S. 131-138). Alicante, Spain: PME.
- Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 147-158.
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (2. Aufl.). Weinheim: Beltz.
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik. fundiert, vielseitig, praxisnah*. Berlin: Springer Spektrum.
- Selter, C. (1994). *Eigenproduktion im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag GmbH.
- Wiggelinghoff, L. (2022). *Informelles Divisionsverständnis – Eine explorative Studie mit Kindern des ersten Jahrgangs einer Grundschule des gemeinsamen Lernens*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Kontakt

Luca Wiggelinghoff
Universität Bielefeld, IDM

✉ luca.wiggelinghoff@uni-bielefeld.de

