

KAISER, Peter  
Karlsruhe

## **Geometrie Wettbewerbsaufgaben in der Deutschen Mathematik-Olympiade**

Die Beliebtheit von Mathematik-Wettbewerben (MW) nimmt weltweit zu. Dies ist zum einen an der steigenden Anzahl und zum anderen an der erhöhten Vielfalt von MW zu erkennen (Marushina, 2021; Kenderov, 2022). Dies führt zudem zu einer kontinuierlichen Zunahme teilnehmender Personen sowie der bei internationalen MW vertretenen Staaten (Kenderov, 2022). Gleichzeitig muss jedoch konstatiert werden, dass die Forschung zu MW durchaus lückenhaft ist (Soifel, 2017). Diese Erkenntnis bildete den Anlass für einige Autoren, sich einer Untersuchung von MW auf verschiedenen Ebenen zu widmen.

Kenderov (2022) beschäftigt sich damit die Vielfalt der MW darzustellen und diese in verschiedene Kategorien zu unterteilen. Er unterscheidet folgende Kategorien: Alter der Teilnehmenden; Anzahl der Teilnehmenden; einmalige oder „mehrere Events pro Jahr“; regional, national oder international; Träger der Veranstaltung; Einzel-, Team- oder Mixed-Wettbewerb und die Art der Aufgaben nach klassischen Beweisaufgaben, Multiple-Choice-Aufgaben oder einer Mischung. Er stellt dabei fest, dass es eine immer größere Vielfalt an MW gibt und viele der neuen MW eine geringere Einstiegschürde bieten, da sie beispielsweise als Team-Wettbewerbe konzipiert sind.

In der Arbeit von Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda (2022) wird das „versteckte Curriculum“ von MW untersucht. Die Autoren betrachten eine Auswahl von MW, wobei die im Artikel aufgeführten Beispiele sich auf die Internationale Mathematik Olympiade (IMO) fokussieren. Das „versteckte Curriculum“ umfasst sowohl prozessbezogene Kompetenzen als auch mathematische Aussagen und Sätze, welche die Teilnehmenden für ein erfolgreiches Abschneiden bei den MW benötigen. Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda unterscheiden zwischen den vier klassischen Teilen der MW: Algebra, Kombinatorik, Geometrie und Zahlentheorie.

Eine weitere Studie (Facciaroni et al., 2023) befasst sich mit den Schwierigkeiten, welche Teilnehmende bei der italienischen Mathematik-Olympiade identifizierten. Dort konnte festgestellt werden, dass die Teilnehmenden sich in allen Bereichen als gleich versiert einschätzen, jedoch in der Geometrie deutlich schlechtere Ergebnisse erzielen als in den Teilbereichen Zahlentheorie und Kombinatorik.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

## **Forschungsdesiderat**

Dieser Beitrag knüpft an diese Arbeiten an und betrachtet die Mathematik-Olympiade in Deutschland (DMO). Ziel ist es das „versteckte Curriculum“ dieser zu identifizieren, hierbei fokussieren wir uns auf die Geometrie, da diese von Facciaroni et al. (2023) als besonders herausfordernd identifiziert wurde. Während Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda (2022) mit der Betrachtung der IMO einen der wohl weltweit herausforderndsten MW betrachtet haben, wenden wir uns mit der DMO dem Einstieg in die Welt der MW für viele Schüler\*innen zu. Die Zahl der Teilnehmenden ist dabei mit jährlich rund 200.000 durchaus hoch (<https://www.mathe-wettbewerbe.de/mathematik-olympiade>).

Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda (2022) identifizierten Lösungsstrategien für die einzelnen Teilbereiche, für die Geometrie beispielsweise die Erstellung einer Skizze, die Berechnung von Winkeln oder die Suche nach ähnlichen Dreiecken. Allerdings sind diese Strategien in den Aufgaben nur anwendbar, wenn ein gewisses inhaltliches Handwerkszeug zur Verfügung steht. Auch dieses wurde von Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda (2022) identifiziert, jedoch auf einer sehr groben Skala, z.B. „Dreiecksgeometrie“, „Vierecke“ oder „Kongruenz und Kollinearität“. Wir verfeinern diese Skala indem wir explizit die in den Lösungsvorschlägen verwendeten Aussagen und Sätze identifizieren. Insbesondere beziehen wir hier auch die in der Schule thematisierten Inhalte mit ein, wohingegen Nieto-Said und Sánchez-Lamoneda sich hauptsächlich auf die außerschulischen Themen und Strategien beziehen.

Des Weiteren wird analysiert, inwiefern die Anforderungen von der Klassenstufe und der Wettbewerbsrunde abhängig sind. Die vier Runden der DMO sind die Schulrunde, die Regionalrunde, die Landesrunde und die Bundesrunde. Die Bundesrunde wird dabei nur für Schüler\*innen ab der Jahrgangsstufe 8 angeboten. Es ist zu erwarten, dass die Anforderungen sowohl im Laufe der Jahrgangsstufen als auch der Runden ansteigen. Anschließend werden die Anforderungen mit den jeweiligen gegebenen Voraussetzungen, laut Kernlehrplan, der Teilnehmenden, der jeweiligen Altersklasse, verglichen.

## **Methodisches Vorgehen**

Im Rahmen der Untersuchung werden 14 Olympiaden analysiert, von der 49. Olympiade aus dem Schuljahr 2009/10 bis zur 62. Olympiade aus dem Schuljahr 2022/23. Diese Auswahl basiert auf pragmatischen Überlegungen, da für diese Olympiaden alle Aufgabensätze mit sorgfältig ausgearbeiteten Lösungsvorschlägen zur Verfügung stehen. Um einen geeigneten Rahmen

zu fassen, beschränken wir uns auf die Geometrie der Klassenstufe 7 bis 10 und klammern die analytische Geometrie aus.

In einem ersten Schritt wurden die Aufgaben aus dem Bereich der Geometrie identifiziert. Die Lösungsvorschläge dieser Aufgaben wurden nach expliziten oder impliziten Nennungen von Aussagen und Sätzen durchsucht und daraus ein Kategoriensystem abgeleitet. Nachträglich wurde eine weitere Kategorie hinzugefügt, der eine Aufgabe zugeordnet wurde, wenn sie in keine der anderen Kategorien passte. Eine Zweitkodierung von zehn Prozent der Aufgaben wurde durch eine weitere Person durchgeführt, wobei sich eine exakte Übereinstimmung ergab.

Anschließend wurden die Kategorien mit den Vorkenntnissen der Schüler\*innen verglichen, hierfür wurden exemplarisch der Kernlehrplan aus NRW und der Bildungsplan aus BW betrachtet und mit den Anforderungen der jeweiligen Runden verglichen.

Da eine einzelne Zählung von Sätzen jedoch wenig über die Art der Aufgabe aussagt, wurden die Kategorien zu Überkategorien gebündelt, welche ähnliche Aussagen oder Satzgruppen zusammenfassen. So unterscheidet das ursprüngliche Kategoriensystem beispielsweise den Hypotenusen-, den Katheten- und den Höhensatz, welche in der Überkategorie „Satzgruppe des Pythagoras“ zusammengefasst werden. Dieses Vorgehen erlaubt den Fokus der Analyse auf die Thematik der Aufgabe zu setzen und diesen nicht durch eine zu kleinteilige Einteilung zu verlieren.

### **Erste Ergebnisse**

Es wurden insgesamt 329 Geometrie-Aufgaben in den 14 Olympiaden identifiziert. Es sei darauf hingewiesen, dass einige Aufgaben doppelt gezählt wurden, da sie sowohl in Klassenstufe 9 als auch in Klassenstufe 10 gestellt wurden. In einigen Fällen wurde bei den Aufgaben ein Aufgabenteil ergänzt, in anderen Fällen sind die Aufgaben komplett identisch. Die Anzahl der Geometrie-Aufgaben pro Runde variiert zwischen 13 (Runde 1, Klasse 7) und 28 (z.B. Runde 4, Klasse 10).

Es wurden insgesamt 38 Kategorien erfasst. Diese wurden in 17 Überkategorien gebündelt, die zwischen einer und fünf Kategorien enthalten: (K1) Einfache Winkelsätze, (K2) Basiswinkelsatz, (K3) Dreiecksungleichung, (K4) Winkelsummen, (K5) Satzgruppe des Pythagoras, (K6) Pythagoreische Tripel, (K7) Satz des Thales, (K8) Mittenlinien, (K9) Strahlensätze, (K10) Kongruenz, (K11) Ähnlichkeit, (K12) Umfangswinkelsatz, (K13) Sekanten-(Tangenten-)Satz, (K14) Trigonometrische Additionstheoreme, (K15) Sinus- und Kosinussatz, (K16) Ungleichungen mit Mittelwerten, (K17) Nutzung keiner Aussage und keines Satzes. Mit den Überkategorien, konnten

die wichtigsten Aussagen und Sätze identifiziert werden und festgestellt werden, ob diese von den Kernlehrplänen abgedeckt sind.

	<b>Runde 1</b>	<b>Runde 2</b>	<b>Runde 3</b>	<b>Runde 4</b>
<b>Kl. 7</b>	K2(69,2%) K4(69,2%)	K4(50%) K2(42,9%)	K4(84,6%) K2(61,5%)	-
<b>Kl. 8</b>	K4(78,6%) K2(50%)	K4(71,4%) K2(64,3%)	K4(92,9%) K10(78,6%)	K4(85,7%) K10(78,6%)
<b>Kl. 9</b>	K4(50%) K10/11(42,9%)	K1/4(35,7) K10(28,6%)	K5(64,3) K10/12(35,7%)	K5/12(50%) K7/10/11(42,9%)
<b>Kl. 10</b>	K4(50%) K11/12(42,9%)	K5(71,4%) K7(42,9%)	K5(57,1%) K10(50%)	K12(71,4%) K4/5/10(57,1%)

**Tabelle 1:** Häufigste Überkategorien pro Klassenstufe und Runde, in Klammern prozentualer Anteil von Runden denen die Überkategorie zugeordnet wird

In Klassenstufe 7 und 8 stehen wenige Aussagen und Sätze zur Verfügung, hier dominieren Winkelsummen und der Basiswinkelsatz, es tauchen jedoch auch Kongruenzaussagen auf, auch wenn diese schulisch zu diesem Zeitpunkt noch nicht behandelt sein müssen.

Ab Klassenstufe 9 gibt es eine größere Vielfalt an verwendeten Sätzen, häufig müssen diese auch miteinander kombiniert werden. Hier sticht die Satzgruppe des Umfangswinkelsatzes (K12) besonders hervor, da diese schulisch nicht thematisiert wird.

## Ausblick

Die Identifikation der häufigsten Aussagen und Sätze in den Lösungen ist nur ein erster Schritt in der Analyse der Geometrie-Wettbewerbsaufgaben. Inwieweit die Kenntnis der Sätze die Schüler\*innen in ihrer Herangehensweise stützt und wie sie diese nutzen ist Gegenstand weiterer Forschung.

## Literatur

- Facciaroni, L., Gambini, A., Mazza, L., et al. (2023). The difficulties in geometry: A quantitative analysis based on results of mathematics competitions in Italy. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11 (2), 259–270.
- Kenderov, P. S. (2022). Mathematics competitions: an integral part of the educational process. *ZDM–Mathematics Education*, 54 (5), 983–996.
- Marushina, A. (2021). Mathematics competitions: What has changed in recent decades. *ZDM–Mathematics Education*, 53 (7), 1591–1603.
- Nieto-Said, J. H., & Sánchez-Lamoneda, R. (2022). A curriculum for mathematical competitions. *ZDM–Mathematics Education*, 54 (5), 1043–1057.
- Soifel, A. (2017). *Competitions for young mathematicians. Perspectives from five continents*. ICME-13 Monographs, Springer.