

LÜKEN, Miriam; JENSEN, Solveig & GASTEIGER, Hedwig
Bielefeld, Osnabrück, Osnabrück

Schüler*innenfehler bei der schriftlichen Subtraktion - zwei Verfahren im Vergleich

Seit geraumer Zeit ist es nun möglich, die schriftliche Subtraktion nicht mehr ausschließlich mit dem früher festgeschriebenen Ergänzungsverfahren zu unterrichten, sondern stattdessen das Abziehverfahren zu wählen. Zudem verschob sich der Fokus des Kompetenzerwerbs vom reinen Ausführene können des Algorithmus hin zum Verstehen eines Subtraktionsverfahrens, dessen Beschreibung und Anwendung bei geeigneten Aufgaben (KMK, 2022). Nimmt man das "Ausführene können" in den Fokus, ist festzustellen, dass das schriftliche Subtrahieren mit spezifischen Schwierigkeiten und damit typischen Fehlern verbunden ist, die national und international für die jeweiligen Verfahren identifiziert und analysiert wurden (Cox, 1975; Gerster, 1982; Jensen & Gasteiger, 2019). Noch nicht hinreichend geklärt ist, inwiefern ein verständnisbasierter Unterricht und unterschiedliche Subtraktionsalgorithmen eine Auswirkung auf die Häufigkeit verschiedener Fehlertypen haben und wie diese sich im Laufe der Grundschulzeit verändern.

Fehleranalysen zu den Subtraktionsalgorithmen

Schriftliche Subtraktionsverfahren unterscheiden sich in der Differenzbildung (Abziehen oder Ergänzen) und der Übergangsbildung (Entbündeln, Erweitern oder Auffüllen). In aktuellen Schulbüchern sowie in Studien zu Fehlertypen sind die Verfahren Ergänzen mit Erweitern (EE) sowie Abziehen mit Entbündeln (AE) am häufigsten zu finden, so dass diese in der vorliegenden Studie betrachtet werden.

Schüler*innenfehler im Mathematikunterricht entstehen selten zufällig oder sind Flüchtigkeitsfehler, sondern fast immer liegt ihnen eine bestimmte Lösungsstrategie zugrunde, die für das Kind selbst sinnvoll ist (Lorenz & Radatz, 1993). Im Kontext schriftlicher Rechenverfahren entstehen Fehler insbesondere an Stellen mit besonderen Schwierigkeitsmerkmalen, so dass je nach Verfahren und Operation typische Fehler auftreten können. Diese von Gerster (1982) als Fehlermuster bezeichneten Fehlertypen umfassen für die schriftliche Subtraktion u. a.: Rechenfehler, Fehler mit der Null, Fehler beim Übergang (z. B. unnötiger Übergang, Übergang falsch ausgeführt), Rechenrichtungsfehler (spaltenweise Unterschiedsbildung), Fehler durch inverse Operation (Addition statt Subtraktion), Fehler durch unterschiedliche Stellenanzahl sowie Perseverationsfehler (Ziffern aus Minuend, Subtrahend oder andere dominante Ziffern der Aufgabe werden als Ergebnis übernommen) (Jensen & Gasteiger, 2019). Eine Fehleranalyse, bei der die Schüler*innen-

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

fehler den Fehlerkategorien zugeordnet werden, kann Hauptschwierigkeiten einer Klasse, individuelle Schwierigkeiten einzelner Kinder und auch verfahrensspezifische Unterschiede im Auftreten der Fehlertypen sichtbar machen. Bisherige Studien zeigen als häufigsten Fehlertyp für Klasse 4 mit großem Abstand den Übergangsfehler (EE: 46%, AE: 57%, Jensen & Gasteiger, 2019; EE: 49,5%, Kühnold & Padberg, 1986), gefolgt vom Rechenrichtungsfehler (EE: 16,5%, Kühnold & Padberg, 1986). In diesen Studien wurde der Unterricht nicht betrachtet, weshalb insbesondere bei den älteren Studien davon auszugehen ist, dass der Fokus auf dem Ausführenkönnen des Algorithmus lag. Außerdem liegen keine Daten zu den Häufigkeiten der Fehlertypen direkt nach Erlernen des Subtraktionsalgorithmus im 3. Schuljahr vor. Das Anliegen des Beitrags ist daher, die Häufigkeiten von Fehlertypen der schriftlichen Subtraktion bei verständnisbasiertem Unterricht zu zeigen. Dazu verfolgt der vorliegende Beitrag folgende Forschungsfragen:

Welche relativen Häufigkeiten bestimmter Fehlertypen zeigen sich bei den schriftlichen Subtraktionsverfahren EE und AE, wenn diese verständnisbasiert unterrichtet wurden?

Inwiefern verändern sich die relativen Häufigkeiten der Fehlertypen von Klasse 3 (direkt nach dem Erlernen des Algorithmus) bis Mitte Klasse 4?

Forschungsdesign

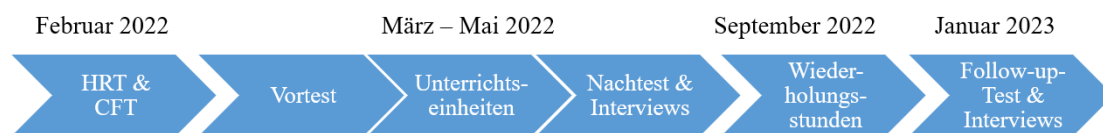


Abb. 1: Ablauf der Studie

Eine Längsschnittstudie mit über 400 Schüler*innen wurde von den Autorinnen des Beitrags geplant und durchgeführt. Der Ablauf der Studie ist Abbildung 1 zu entnehmen sowie bei Gasteiger et al. (2024) nachzulesen. Alle Lehrkräfte unterrichteten eines der beiden Verfahren nach einer von den Autorinnen geplanten Unterrichtseinheit. Diese bestand aus neun für beide Verfahren stark parallelisierten Unterrichtsstunden im Jg. 3 sowie zwei Wiederholungsstunden im Jg. 4 mit dem Fokus auf einer verständnisbasierten Vermittlung des jeweiligen Algorithmus mit Mehrsystemblöcken und expliziter Thematisierung der Begründung für den jeweiligen Übergang. Sie adressierte gezielt auch algorithmusspezifische Schwierigkeiten wie den Übertrag zur 0, zur 9 und in eine leere Stelle für EE sowie das Entbündeln bei 0 für AE. Direkt nach der Unterrichtseinheit wurde ein diagnostischer Test zur Erfassung typischer Fehler, bestehend aus 16 Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion im Zahlenraum bis 1000, als Nachtest durchgeführt. Dieser Nachtest enthielt je Verfahren eine vergleichbare Anzahl an Aufgaben mit

verfahrenstypischen Schwierigkeitsmerkmalen. Es liegen für AE $n=236$ und für EE $n=181$ Nachttests vor. Mitte Jg. 4 erfolgte ein Follow-up-Test, der analog zum Nachttest mit 16 Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100.000 aufgebaut war. Für den Follow-up-Test liegen für AE $n=223$ und für EE $n=178$ Tests vor.

Auswertung

Zur Erfassung der Fehlertypen wurden bei den 14 lösbaren Aufgaben (bei zwei Aufgaben war der Minuend kleiner als der Subtrahend) beider diagnostischer Tests (Nachttest und Follow-up-Test) sämtliche aufgetretene Fehler kodiert. Dabei wurden bei der Auswertung auch mehrere Fehler innerhalb einer Aufgabe berücksichtigt. Für die Quantifizierung wurde jedoch pro Aufgabe maximal ein Fehler pro Fehlerkategorie gezählt. Das hierfür auf Basis der von Gerster (1982) beschriebenen und der von Jensen und Gasteiger (2019) adaptierten Fehlertypen entwickelte Kategorienschema enthält die folgenden Kategorien: 1 *Rechenfehler* (z. B. Eins-und-Eins-Fehler der Nähe, Fehler mit der Null), 2 *Übergangsfehler*, 3 *Rechenrichtungsfehler*, 4 *Addition statt Subtraktion*, 5 *Perseverationsfehler*, 6 *Sonstige* (z. B. Kodierung nicht eindeutig bestimmbar, einzelne Ziffer fehlt), 7 *RR/AsS* (Code 3 und 4 sind nicht unterscheidbar, wenn im Minuend eine Null steht), 8 *Bearbeitung abgebrochen* sowie 9 *nicht bearbeitet*.

Ergebnisse

Rund die Hälfte der falsch gelösten Aufgaben bei beiden Verfahren weist Übergangsfehler auf, wobei diese beim AE etwas seltener auftreten als beim EE. Der zweithäufigste Fehlertyp stellt für das EE Rechenfehler und für das AE Rechenrichtungsfehler dar. Im Vergleich der Verfahren kommen Perseverationsfehler beim EE sehr viel häufiger vor als beim AE. Umgekehrt treten bei einer Null im Minuenden Fehler (Kategorie 7) beim AE häufiger auf als beim EE. Im Vergleich der Fehlertyphäufigkeiten vom Nachttest im 3. Schuljahr (direkt nach der Unterrichtseinheit) zum Follow-up-Test im 4. Schuljahr (Halbjahr) nimmt die relative Häufigkeit der Übergangsfehler bei beiden Verfahren ab. Ebenfalls bei beiden Verfahren steigt die relative Häufigkeit der Rechenrichtungsfehler im 4. Schuljahr an.

Diskussion

Auch bei verständnisbasiertem Unterricht sind Übergangsfehler der häufigste Fehlertyp in beiden untersuchten Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Im Gegensatz zu anderen Studien (Jensen & Gasteiger, 2019) liegt die relative Häufigkeit der Übergangsfehler beim AE in unserer Stichprobe allerdings unter der des EE. Erklärungen für diesen Unterschied könnten ei-

nerseits die häufigeren Rechenrichtungsfehler beim AE sein, die an Stellen, die einen Übergang erfordern, auftreten. Andererseits könnte die niedrigere Häufigkeit der Übergangsfehler beim AE dafür sprechen, dass der Unterricht zu einem tiefen Verständnis des Übergangs beigetragen hat und die Schüler*innen den Übergang beim Entbündeln daher häufiger korrekt durchführen können. Im längsschnittlichen Vergleich der Fehlerhäufigkeiten von Klasse 3 zu Klasse 4 fällt positiv auf, dass bei beiden Subtraktionsverfahren der Anteil der Übergangsfehler abnimmt. Möglicherweise ist dies ein Hinweis darauf, dass der Übergang bei der schriftlichen Subtraktion mit zunehmender Routine besser bewältigt wird. Eine alternative Interpretation wäre, dass der bei beiden Verfahren in Klasse 4 zunehmende Rechenrichtungsfehler, der an Stellen auftritt, die einen Übergang erfordern, die Abnahme des Übergangsfehlers erzeugt. Der Rechenrichtungsfehler könnte dafür sprechen, dass einige Kinder Mitte Klasse 4 den genauen Verfahrensablauf der schriftlichen Subtraktion nicht mehr verfügbar haben, der Fehler folglich auch bei der Differenzbildung entstehen könnte und nicht unbedingt auf ein fehlendes Verständnis der Übergangsbearbeitung zurückzuführen sein muss.

Qualitative Analysen der Übergangsfehler sowie der Aufgabenmerkmale, bei denen bestimmte Fehlertypen - wie beispielsweise der Perseverationsfehler beim EE - besonders häufig auftreten, werden noch angeschossen und könnten zu wertvollen verfahrenstypischen Erkenntnissen führen, die dann wiederum in die Unterrichtsplanung einfließen können.

Literatur

- Cox, L. S. (1975). Systematic Errors in the Four Vertical Algorithms in Normal and Handicapped Populations. *Journal for Research in Math. Education*, 6(4), 202–220.
- Gasteiger, H., Jensen, S., Lüken, M., Peter-Koop, A., Grommé, E., & Nonte, S. (2024). „Abziehen mit Entbündeln“ und „Ergänzen mit Erweitern“: Eine vergleichende Studie zu den beiden Subtraktionsverfahren. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*. WTM-Verlag.
- Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. WTM-Verlag.
- Jensen, S., & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematikdidaktik* 40(2), 135–167.
- Kühnhold, K., & Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 32(3), 6–16.
- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Lorenz, J., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Schroedel.