

ALBU, Carina & LINDMEIER, Anke  
Erlangen-Nürnberg

## **Fachliche Richtigkeit als Indikator für Unterrichtsqualität – Wie mathematisch fundiert unterrichten angehende Lehrkräfte den Begriff der Umkehrfunktion?**

Die Frage, was guten bzw. effektiven Unterricht ausmacht, wird in der empirischen Unterrichtsforschung seit Jahren aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet und wurde im Fach Mathematik bereits eingehend untersucht. Trotz unterschiedlicher Konzeptionalisierungen und Operationalisierungen (Mu et al., 2022), wird immer wieder kritisiert, dass die meist generischen Unterrichtsqualitätskriterien nicht ausreichen, um Qualität von Mathematikunterricht auch aus fachspezifischer Sicht adäquat zu beurteilen (Dreher und Leuders, 2021). So können etwa mit generischen Kriterien auch fachlich inkorrekte Unterrichtsstunden ein gutes Qualitätsrating erzielen (Brunner, 2018). Entsprechend groß ist der Ruf nach weiteren Modellen, welche fachliche Korrektheit und Kohärenz als Kriterien voraussetzen (Brunner und Star, 2024). Dieser Beitrag aus dem Projekt PerformA berichtet über eine Studie, in der anhand von rollenspielbasierten Unterrichtssimulationen untersucht wird, inwiefern angehende Lehrkräfte ihr professionelles Wissen im Unterricht anwenden, um fachlich-fundierten und damit inhaltlich qualitativ hochwertigen Unterricht anzubieten.

### **Theoretischer Hintergrund**

Klassisch wird zwischen effektiver Klassenführung, konstruktiver Unterstützung und kognitiver Aktivierung als den drei Basisdimensionen der Unterrichtsqualität unterschieden, wobei aus fachspezifischer Perspektive meist auf letztere fokussiert wird. Neben der Forderung nach fachspezifischen Qualitätsindikatoren plädieren Keller et al. (2024) für eine lerngegenstandsbezogene Betrachtung der kognitiven Aktivierung. Ein solcher konzeptspezifischer Ansatz wurde bereits früher im Rahmen der Pythagoras-Studie und der Untersuchung der situationsspezifischen Verwendung von sogenannten *Verstehenselementen* verfolgt (Drollinger-Vetter, 2011). Verstehenselemente (VE) sind elementare, miteinander verknüpfte Teilkonzepte, die verstanden werden müssen, um das übergreifende Konzept verstehen zu können. Diese VE stellen keine Fragmentierung des Konzepts in disjunkte Einzelbausteine dar, sondern werden erst durch deren Verknüpfung sinnstiftend. VE als Qualitätsindikatoren zielen so insbesondere auf die inhaltliche Struktur des mathematischen Konzepts ab. Aus dieser Perspektive ist Unterricht dann potenziell kognitiv aktivierend, wenn alle relevanten VE eines mathematischen Konzepts im Unterricht – vollständig und fachlich korrekt –

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

vorkommen und qualitativ hochwertig miteinander verknüpft sind. VE sind somit stets kontextspezifisch – je nach Lerngegenstand und Vorwissen der Lernenden können sie in Tiefe und Anzahl variieren (Drollinger-Vetter, 2011).

Für die Auswahl der relevanten VE und deren inhaltlicher Tiefe ergibt sich insbesondere für Sekundarstufenlehrkräfte das Problem, dass die Schulmathematik oft mathematisch unvollständig und in Teilen verfälscht dargestellt wird (u. a. Dreher et al., 2023). So ist beispielsweise die im Schulkontext häufig genutzte Begründung, dass  $0,\bar{9} = 1$  weil  $3 \times \frac{1}{3} = 1$  ist aus (hochschul-)mathematischer Perspektive ein Zirkelschluss und fachlich falsch. Während hier die bewusste Verzerrung der Mathematik wegen des fehlenden Vorwissens zum Grenzwertbegriff in der sechsten Klasse häufig akzeptiert wird, ist dies in anderen Fällen schwerer zu rechtfertigen. So wird etwa die Umkehrfunktion oft als die *Spiegelung an der Winkelhalbierenden im I. Quadranten* definiert, wodurch die eigentliche Idee des Inversen einer Funktion für Lernende kaum ersichtlich werden kann. Durch die vermeintliche Vereinfachung werden ebenso die Voraussetzungen weniger offensichtlich als etwa bei der Darstellung einer eindeutigen Zuordnung, die auch anschlussfähiger an spätere hochschulische Konzepte (Bijektivität) ist.

Um die fachlich korrekten Inhalte der Hochschulmathematik für den Mathematikunterricht adressatengerecht und dennoch intellektuell ehrlich zu reduzieren, also ohne Verzerrung oder Verfälschung von Inhalten, benötigen Lehrkräfte neben einem fundierten Fachwissen zudem Wissen über die Zusammenhänge zwischen Hochschul- und Schulmathematik. Dreher et al. (2023) bezeichnen dieses Wissen als *Schulbezogenes Fachwissen* (kurz SRCK). SRCK stellt daher theoretisch im Sinne der fachlichen Richtigkeit eine wesentliche Gelingensbedingung für die fachliche Unterrichtsqualität dar (Dreher et al., 2023). Bislang fehlen jedoch empirische Belege dafür, wie (angehende) Lehrkräfte ihr SRCK im Unterricht einsetzen und wie sich dies tatsächlich auf die fachliche Qualität auswirkt.

### **Studienziel und Forschungsfrage**

Im Projekt PerformA untersuchen wir, wie angehende Lehrkräfte ihr SRCK in rollenspielbasierten Unterrichtssimulationen zu den Themen Umkehrfunktion und Grenzwert (nicht in diesem Beitrag) anwenden. Dafür wurden in Vorstudien VE identifiziert, die insbesondere auf die fachliche Richtigkeit und Kohärenz abzielen (z. B.: "Es geht um das Rückgängigmachen einer Funktion"). Dieser Beitrag behandelt die Frage: Wie verwenden angehende Lehrkräfte VE zur Umkehrfunktion in den Unterrichtssimulationen, um qualitativ hochwertigen Fachunterricht anzubieten? Es ist anzumerken, dass die Ergebnisse auf einer Teilstichprobe basieren und somit vorläufig sind.

## Methodik

Zur Beantwortung der Frage wurden Videodaten der Unterrichtssimulationen von  $N = 17$  angehenden Mathematiklehrkräften des gymnasialen Lehramts ( $\text{♀ } 6 \text{ ♂ } 11$ ,  $M\_Alter$  23,5;  $M\_Semester$  8,2) analysiert. Die Teilnehmenden sollten eine 20-minütige Unterrichtssequenz zur Einführung des Begriffs der Umkehrfunktion anhand eines vorgegeben Planungsprotokolls (z. B. Auswahl von Beispielen, Merksatz formulieren) planen und im Anschluss durchführen. Bei den Simulationen handelt es sich um didaktisch-reduzierte, standardisierte Microteachings mit simulierten Schüler\*innen (simS), die von Schauspieler\*innen dargestellt werden. Die simS unterliegen Rollenprofilen (jedoch ohne Skript) und stellen bei fachlichen Fehlern/Unschärfen Nachfragen. Beispielsweise fragen sie, ob alle Funktionen umkehrbar sind, falls von der Lehrkraft keine Voraussetzungen für Umkehrbarkeit thematisiert werden. Der Unterrichtsversuch wurde videographiert und im Anschluss von zwei unabhängigen Ratern auf das *Vorkommen* und die *Intensität* der VE hin codiert. Abschließend wurden die *Qualität und Verknüpfung* der VE anhand drei zentraler Teilkonzepte (Definition, Voraussetzungen, Vertauschung von Definitions-/Wertebereich) anhand einer vierstufigen Skala bewertet, wobei ein Score von 2 bereits als intellektuell ehrlich bewertet wird (0 = falsch/fehlend, 1 = unvollständig/nicht allgemeingültig, 2 = vollständig, mathematisch-korrekt, aber mit formalen Schwächen, 3 = vollständig, mathematisch und formal korrekt). (Cohen's  $\kappa$  vor Konsens-Coding substantziell  $\kappa\_Def = .73$ ,  $\kappa\_Vor = .66$ ,  $\kappa\_Vert = .60$ ).

## Ergebnisse

Generell wurde niedrige fachliche Qualität innerhalb der Unterrichtssimulationen beobachtet. Die mittlere Bewertung der *Qualität und Verknüpfung* der drei VE bildet unvollständige/nicht-allgemeingültige Erklärungen ab (s. Tabelle 1). So wurden jeweils nur ca. 25–30 % der Erklärungen als im Kern mathematisch korrekt und demnach intellektuell ehrlich (Score  $\geq 2$ ) bewertet, wobei nur eine Person dies für alle drei VE erzielte.

	Score 0	Score 1	Score 2	Score 3	M	SD
VE-Definition	4	8	5	0	1,06	0,73
VE-Voraussetzung	2	11	3	1	1,18	0,71
VE-Vertauschung	3	10	4	0	1,06	0,64

**Tabelle 1:** Absolute Häufigkeit und mittlere Qualität der verwendeten VE ( $N = 17$ )

Hinzu kommt, dass die simS häufig VE überhaupt erst erfragen mussten, da die angehenden Lehrkräfte diese nicht eigenständig thematisierten. Exemplarisch wurde in 15 von 17 Fällen initial die Darstellung der Spiegelung an der Winkelhalbierenden genutzt, von denen bei zwölf die simS nachfragen

mussten, ob dies auch eine Vertauschung der Achsen(-bezeichnung) bedeutet. Nur drei Teilnehmende antworteten fachlich korrekt.

## Zusammenfassung und Diskussion

Die ersten Ergebnisse zeigen, dass die fachliche Richtigkeit in allen untersuchten Unterrichtssequenzen stark beeinträchtigt ist. Wie auch in anderen Studien (Breen et al., 2017) war das Fachwissen über Umkehrfunktionen der Teilnehmenden trotz fortgeschrittenem Studiums eher gering, sodass viele Fragen der simS nicht fachlich korrekt beantwortet werden konnten. Für die Bewertung der fachspezifischen Unterrichtsqualität wurden bewusst nur rein fachliche Aspekte analysiert. Da es sich um ein standardisiertes Setting in der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung handelt, wurden vorerst insbesondere keine generischen Indikatoren herangezogen, sodass derzeit keine Aussage über die gesamte Qualität des Unterrichts getroffen werden kann. Inwiefern die Ergebnisse sich auf andere Kontexte/realen Unterricht übertragen lassen, bleibt offen. Dennoch unterstreichen die Ergebnisse die Notwendigkeit der Betrachtung einer fachlichen Richtigkeit als Kriterium für Unterrichtsqualität zusätzlich zu den existierenden (generischen) Kriterien (vgl. Brunner, 2018) und demonstrieren zeitgleich die Nützlichkeit von VE als konzept-/lerngegenstands-spezifische Indikatoren.

## Literatur

- Breen, S., Larson, N., O’Shea, A. & Pettersson, K. (2017). A study of students’ concept images of inverse functions in Ireland and Sweden. *Nord. Stud. Educ.*, 22(4), 85–102.
- Brunner, E. (2018) Qualität von Mathematikunterricht: Eine Frage der Perspektive. *JMD* 39, 257–284.
- Brunner, E., Star, J.R. (2024) The quality of mathematics teaching from a mathematics educational perspective: what do we actually know and which questions are still open? *ZDM* 56, 775–787.
- Dreher, A., Leuders, T. (2021) Fachspezifität von Unterrichtsqualität – aus der Perspektive der Mathematikdidaktik. *Unterrichtswissenschaft* 49, 285–292.
- Dreher, A., Hoth, J., Lindmeier, A., Heinze, A. (2023). Der Bezug zwischen Schulmathematik und akademischer Mathematik: schulbezogenes Fachwissen als berufsspezifische Wissenskomponente von Lehrkräften. In: Krauss, S., Lindl, A. (Hrsg.) *Professionswissen von Mathematiklehrkräften*. Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer.
- Drollinger-Vetter, B. (2011) Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Waxmann.
- Keller, S., Steffensky, M. Winkler, I., Lindmeier, A., Betram, C., Herrmann, C., Schreyer, P., Fauth, B., & Praetorius, A. K. (2024) Kognitive Aktivierung in den Fachdidaktiken: Ein fachübergreifendes, fachspezifisches und lerngegenstandsorientiertes Konstrukt. In: Praetorius, A. K., Wemmer-Rogh, W., Schreyer, P., & Brinkmann, M. (Hrsg.) *Kognitive Aktivierung unter der Lupe*. Waxmann.
- Mu, J., Bayrak, A., Ufer, S. (2022). Conceptualizing and measuring instructional quality in mathematics education: A systematic literature review. *Frontiers in Edu*, 7, 994739.