

Sprachliche Ausdrücke von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden häufig missverstanden (Díaz & Batanero, 2009), obwohl deren Verständnis wichtig ist, um informierte Entscheidungen zu treffen (Gal, 2005; Gigerenzer, 2002). Ein besonders häufiger Fehler ist dabei die Verwechslung von Bedingung und Bedingtem (Eichler et al., 2020). Beispielhaft für eine solche Verwechslung ist ein Twitter-Post von Donald Trump, in dem berichtet wurde, dass sich 85% der Personen, die eine Gesichtsmaske tragen, mit Covid-19 infizieren würden, obwohl sich die Ergebnisse einer wissenschaftlichen Studie auf die umgekehrte Bedingung beziehen, nämlich, dass 85% der Personen, die sich mit Covid-19 infizieren, eine Maske getragen haben. Dieses Beispiel macht die Tragweite vom Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten deutlich, dass sich sowohl in der (Sprach-)Rezeption (z. B. von Medienberichten) als auch in der (Sprach-)Produktion (z. B. beim Wiedergeben solcher Wahrscheinlichkeiten) von Informationen äußern kann.

Der Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist in der Forschung zum Bayesianischen Denken bereits intensiv erforscht (McDowell & Jacobs, 2017). Unter Bayesianischem Denken versteht man die Aktualisierung einer Wahrscheinlichkeitsaussage über eine Hypothese (z. B. über eine Infektion mit Covid-19) auf Basis von neuen Informationen (z. B. zum Tragen einer Maske oder einem positiven Testergebnis). Die Fähigkeit von Bayesianischem Denken wird meist gemessen, indem die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese auf Basis der dafür notwendigen statistischen Informationen (z. B. zur Prävalenz, Sensitivität und Falsch-Positiv-Rate) eingeschätzt oder berechnet wird (McDowell & Jacobs, 2017). Für diese Art von Inferenzen wurde vielfach der förderliche Effekt natürlicher Häufigkeiten repliziert (McDowell & Jacobs, 2017), der erstmals von Gigerenzer und Hoffrage (1995) berichtet wurde. Hierzu hat sich gezeigt, dass die Informationen besser verstanden und kombiniert werden, wenn die statistischen Informationen anstatt im Format von Wahrscheinlichkeiten (z. B. 85 %) in so genannten natürlichen Häufigkeiten (z. B. 85 von 100) gegeben sind (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; McDowell & Jacobs, 2017). Darüber hinaus gelten Visualisierungen, wie z. B. das Netzdiagramm (Binder et al., 2022), als hilfreich, um die komplexe Teilmengenstruktur besser verstehen zu können.

Obwohl sprachliche Merkmale von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten als schwierigkeitsgenerierend gelten (Hertwig et al., 2008), ist der Einfluss sprachlicher Merkmale im Bereich des Bayesianischen Denkens nur wenig

untersucht. Hierzu wurde bereits gezeigt, dass Aussagen als explizite Formulierung (z. B. Anteil der Infizierten mit Maske unter allen mit Maske) hinsichtlich der Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit besser verstanden werden als implizite (z. B. Anteil der Infizierten unter allen mit Maske; Böcherer-Linder et al., 2018). Die Fähigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten selbst zu formulieren, wurde bisher kaum erforscht, obwohl ein kompetenter Umgang auch die Kommunikation mit und über die Wahrscheinlichkeiten einschließt. Post and Prediger (2020) diskutieren hierzu die Anforderungen von sprachlichen Formulierungen, die die Beziehung der Teilmengen zueinander ausdrücken.

Der Beitrag untersucht die Fähigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten selbst korrekt zu formulieren. Es wird dabei analysiert, ob diese Fähigkeit 1) vom gegebenen bzw. genutzten numerischen Format (Forschungsfrage 1) und 2) von der Art der Formulierung (vgl. Tab. 1, Forschungsfrage 2) abhängt.

Forschungsdesign und Material

Während des Mathematikunterrichts haben 124 Schüler*innen der Klassenstufen 11 und 12 an einem hessischen Oberstufengymnasium an dem Online-Fragebogen für diese Studie teilgenommen.

Beschreibung des Kontext & Visualisierung der statistischen Informationen

Während der Corona Pandemie wurden medizinische Tests entwickelt, um die Infektionskrankheit Covid-19 bei Patient*innen diagnostizieren zu können.

Im Folgenden werden Personen betrachtet, von denen nur ein kleiner Teil infiziert ist und die sich in einem Testzentrum auf Covid-19 testen lassen.

Der Test im Testzentrum hat dabei folgende Eigenschaften: Der Großteil von den infizierten Personen wird als infiziert erkannt und deswegen positiv getestet. Ein kleiner Teil von den nicht infizierten Personen wird fälschlicherweise positiv getestet.

Aus Statistiken des Testzentrums sind die rechts dargestellten Informationen bekannt.

18
infiziert und
positiv getestet

20
infiziert

2
infiziert und
negativ getestet

67
positiv getestet

1.000
Personen

933
negativ getestet

49
nicht infiziert und
positiv getestet

980
nicht infiziert

931
nicht infiziert und
negativ getestet

Teil 1: Typische Frage (wie die nachfolgende) für Bayesianisches Denken

Wenn eine Person positiv getestet wird, ist diese Person mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit infiziert. **Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit für diese Person (auf Basis der gegebenen Informationen in der Visualisierung)?**

Teil 2: Frage zur selbstständigen Formulierung einer bedingten Wahrscheinlichkeit

Hier sehen Sie (ohne die konkrete Frage), wie eine andere Person eine ähnliche Aufgabe löste:

Frage: _____

Antwort der Person: $\frac{931}{933} \approx 99,8\%$

Notieren Sie oben die konkrete Frage, die diese Person beantwortet hat.

Abb. 1: Ausschnitt aus dem Online-Fragebogen

Im ersten Teil der Studie haben die Schüler*innen typische Fragen für Bayesianisches Denken beantwortet und im zweiten Teil eine bedingte Wahrscheinlichkeit selbst formuliert (vgl. Abb. 1). Dabei wurde der Aufgabenkontext (Covid-19-, Schwangerschafts- bzw. Atemalkoholtests und zur Textilproduktion) und das numerische Format innerhalb der Visualisierung (natürliche Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten) variiert.

Um die Antworten der Schüler*innen analysieren zu können, wurde ein Kodierleitfaden entwickelt, mit dem kodiert wird, i) ob die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit korrekt ausgedrückt wird (für die Messung der abhängigen Variable), ii) welches Format (Wahrscheinlichkeit, Anteil, Häufigkeit, Prozent, Verhältnis) genutzt wurde (für die Analysen von Forschungsfrage 1) und iii) welche Art der Formulierung (vgl. Tab. 1) dabei verwendet wurde (für die Analysen von Forschungsfrage 2). Die Kategorien für iii) wurden dabei auf Basis einer Schulbuchanalyse entwickelt.

Formulierung	Beispiel
2 Hauptsätze	Eine Person wurde negativ getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person nicht infiziert ist?
Konditional-satz	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person infiziert ist, wenn diese Person negativ getestet wurde?
Relativsatz	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die negativ getestet wurde, nicht infiziert ist?
Nominalphrase	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine negativ getestete Person nicht infiziert ist?

Tab. 1: Kategorien zur Einordnung von Formulierungen der Schüler*innen

Die Antworten der Schüler*innen wurde doppelt kodiert und die mit Cohens Kappa ermittelten Inter-Rater-Reliabilitäten sind für alle Kategorien $\geq 0,9$.

Ergebnisse und Ausblick

In den Ergebnissen wurde bei knapp 50 % der Antworten der gegebene Bruch bzw. Prozentsatz korrekt ausgedrückt, wobei entgegen der Erwartung die Formulierungen mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten eine ähnliche Güte aufwiesen. Die Formulierungen mit Anteil waren häufiger korrekt. Das numerische Format, das in der Formulierung genutzt wurde, entsprach in mehr als 50 % der Fälle nicht dem der Visualisierung. Häufige Fehler bestehen darin, Bedingung und Bedingtes zu vertauschen oder eine konjugierte statt der bedingten Wahrscheinlichkeit zu formulieren. Es wurden überwiegend Konditionalsätze (z. B. "Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenn eine Person negativ getestet wurde, [sie] auch nicht infiziert ist?") und

Nominalphrasen (z. B. Wahrscheinlichkeit, "dass eine negativ getestete Person nicht infiziert ist") verwendet (ca. 94 %), wobei auch Relativsätze aber keine zwei Hauptsätze genutzt wurden. Neben Wahrscheinlichkeiten finden sich in den Formulierungen auch alle anderen Kategorien aus ii).

Die Ergebnisse zeigen auf, welche selbstgewählten Formulierungen Schüler*innen noch Schwierigkeiten bereiten und dadurch Ansatzpunkte einer offensiven Sprachförderung sein können (Leiss et al., 2023).

Literatur

- Binder, K., Steib, N., & Krauss, S. (2022). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen – kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung?. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44(2), 471-503. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00215-9>
- Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Vogel, M. (2018). Die Formel von Bayes: Kognitionspsychologische Grundlagen und empirische Untersuchungen zur Bestimmung von Teilmenge-Grundmenge-Beziehungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(1), 127–146. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-0128-1>
- Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University Students' Knowledge and Biases in Conditional Probability Reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 131–162.
- Eichler, A., Böcherer-Linder, K., & Vogel, M. (2020). Different Visualizations Cause Different Strategies When Dealing With Bayesian Situations. *Frontiers in Psychology*, 11, 1897. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01897>
- Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. In G. A. Jones (Hrsg.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (S. 39–63). Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3
- Gigerenzer, G. (2002). Calculated risks: How to know when numbers deceive you. Simon & Schuster.
- Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684>
- Hertwig, R., Benz, B., & Krauss, S. (2008). The conjunction fallacy and the many meanings of and. *Cognition*, 108(3), 740–753.
- Leiss, D., Gerlach, K., Wessel, L., & Schmidt-Thieme, B. (2023). Sprache und Mathematiklernen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2nd ed. 2023, pp. 561–595). Springer Berlin Heidelberg; Springer Spektrum.
- McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin*, 143(12), 1273–1312.
- Post, M., & Prediger, S. (2020). Decoding and discussing part-whole relationships in probability area models: The role of meaning-related language. In *Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*.