

SPORN, Femke; SOMMERHOFF, Daniel & HEINZE, Aiso
Kiel

Kann das ein gültiger mathematischer Beweis sein? Validierung von Beweisversuchen in der Sekundarstufe

Einleitung und theoretischer Hintergrund

Beweise sind zentral in der Mathematik und daher auch curricular in die mathematische Ausbildung eingebunden. Lernende begegnen Beweisen in der Schule wiederholt in verschiedenen Klassenstufen und über mathematische Inhalte hinweg. Sie sollen dabei nicht nur Beweise konstruieren, sondern auch gegebene Beweise validieren und diese auf ihre Gültigkeit hin prüfen können (KMK, 2012). Die Validierung von Beweisen zielt darauf ab, zu überprüfen, ob eine Argumentation ein Beweis im mathematischen Sinn ist, also ob diese Argumentation die sozio-mathematischen Normen (Yackel & Cobb, 1996) der jeweiligen Community erfüllt (Selden & Selden, 2015).

Dabei ist eine zentrale Herausforderung, dass es in der mathematischen Praxis keine einheitlichen Kriterien gibt, anhand derer die Gültigkeit von mathematischen Beweisen eindeutig bestimmt werden kann. Die Gültigkeit eines Beweises ist vielmehr eine Frage der Akzeptanz im sozialen Diskursrahmen, weshalb die sozio-mathematischen Normen einer Community hierbei von großer Bedeutung sind (Yackel & Cobb, 1996). Kriterien für die Akzeptanz und damit die Gültigkeit mathematischer Beweise können sich zwischen verschiedenen Communities unterscheiden (Sommerhoff, 2019).

Eine Schwierigkeit bei der Validierung von Beweisen besteht demnach darin, in unterschiedlichen Situationen und Communities einen Beweis entsprechend der vorliegenden sozio-mathematischen Normen zu validieren. Vor allem für Lernende ist dies herausfordernd, da es im schulischen Kontext keine curricular festgelegten einheitlichen Kriterien gibt, die die Schüler*innen lernen und für die Validierung sicher heranziehen können (Mariotti, 2006). Dennoch gibt es gewisse Minimalkriterien, die als Beweisprinzipien für die Gültigkeit mathematischer Beweise betrachtet werden können. Diese Beweisprinzipien (*Beweisschema*, *Beweiskette*, *Beweisstruktur*) wurden unter anderem von Heinze und Reiss (2003) sowie Sporn et al. (2022) untersucht. Auch wenn es keine abschließende Liste von Kriterien gibt, sollten Lernende im Rahmen ihrer mathematischen Ausbildung zumindest das Wissen erlangen, dass Beweisversuche, die diese Beweisprinzipien nicht erfüllen, nicht als gültige mathematische Beweise akzeptiert werden können. Damit bauen Lernende ein negatives Wissen über die Gültigkeit mathematischer Beweise auf (Heinze, 2004).

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Lernende verschiedener Klassenstufen einen Förderbedarf bzgl. ihres Wissens über Beweisprinzipien zeigen und sich dieses Wissen im Verlauf der Sekundarstufe nur leicht positiv entwickelt (Sporn et al., 2022). Gleichzeitig weisen Studien darauf hin, dass Lernende oft Schwierigkeiten bei der Validierung von Beweisen haben (u.a. Healy & Hoyles, 1998; Pfeiffer, 2011). Es ist unklar, ob und wie Schüler*innen diese Minimalkriterien für die Entscheidung bzgl. der Gültigkeit heranziehen und wie logisch stringent sie einen Beweisversuch als ungültig bewerten, wenn ein Kriterium nicht erfüllt ist.

Forschungsfrage

Basierend auf dem dargestellten theoretischen Hintergrund und den aufgezeigten Forschungsdesiderata ergibt sich die folgende Forschungsfrage, die in diesem Beitrag fokussiert wird: Inwiefern werden von Schüler*innen als "nicht erfüllt" bewertete Beweisprinzipien im Rahmen ihrer Beweisvalidierung berücksichtigt?

Methode

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden $N = 456$ Schüler*innen der Klassen 8 bis 11 von sieben Gymnasien und einer Gemeinschaftsschule im Rahmen eines Online-Fragebogens aufgefordert, sechs Beweisversuche zu validieren. Alle Schüler*innen validierten dieselben Beweisversuche, die verschiedene mathematische Inhaltsbereiche abdeckten, die ab Klassenstufe 8 bekannt sind. Die sechs Beweisversuche waren fehlerhaft, da jeweils ein Beweisprinzip missachtet wurde, und konnten daher unabhängig von der Community nicht als gültiger mathematischer Beweis akzeptiert werden.

Bei jedem Beweisversuch mussten die Schüler*innen für die drei Beweisprinzipien jeweils dieselbe Aussage bewerten (*Beweisschema*: "In dem Beweisversuch werden nur gültige Argumente genutzt."; *Beweiskette*: "In dem Beweisversuch bauen die Schritte logisch aufeinander auf."; *Beweisstruktur*: "In dem Beweisversuch wird vorausgesetzt, was gezeigt werden soll."). Damit gaben sie jeweils an, ob das jeweilige Beweisprinzip in dem Beweisversuch erfüllt ist oder nicht. Zusätzlich mussten die Schüler*innen angeben, ob es sich bei dem Beweisversuch um einen gültigen Beweis handelt oder nicht. Hier konnten sie auch die Option "Ich weiß es nicht" auswählen.

Für jeden Beweisversuch wurde ausgewertet, wie oft ein Schüler bzw. eine Schülerin angab, dass ein Beweisprinzip nicht erfüllt ist. Daraus ergab sich für jeden Beweisversuch ein Score mit Werten zwischen 0 (alle Beweisprinzipien sind erfüllt) und 3 (alle 3 aufgelisteten Beweisprinzipien sind nicht erfüllt). Mit Fokus auf die Forschungsfrage wurde analysiert, wie viele der

Schüler*innen, die einen Beweis als gültig bzw. ungültig bewerteten, 0, 1, 2 oder 3 der aufgelisteten Beweisprinzipien als nicht erfüllt bewerteten. Die Analyse erfolgte analog für die Schüler*innen, die angaben, dass sie nicht wissen, ob der Beweisversuch gültig ist.

Ergebnisse

Bei allen sechs Beweisversuchen zeigt sich, dass über alle Klassenstufen hinweg ein substantieller Anteil der Schüler*innen angibt, dass ein, zwei oder drei Beweisprinzipien nicht erfüllt sind und den Beweisversuch dennoch als gültigen mathematischen Beweis bewertet. Gleichzeitig gibt es bei fast allen Beweisversuchen auch Schüler*innen, die angeben, dass alle Beweisprinzipien erfüllt sind, den Beweisversuch aber trotzdem als ungültigen Beweis bewerten. Bei allen zu bewertenden Beweisversuchen ist die Gruppe der Schüler*innen, die angeben, dass sie nicht wissen, ob es sich um einen gültigen Beweis handelt, am größten. Abbildung 1 zeigt exemplarisch die Ergebnisse für einen der zu validierenden Beweisversuche.

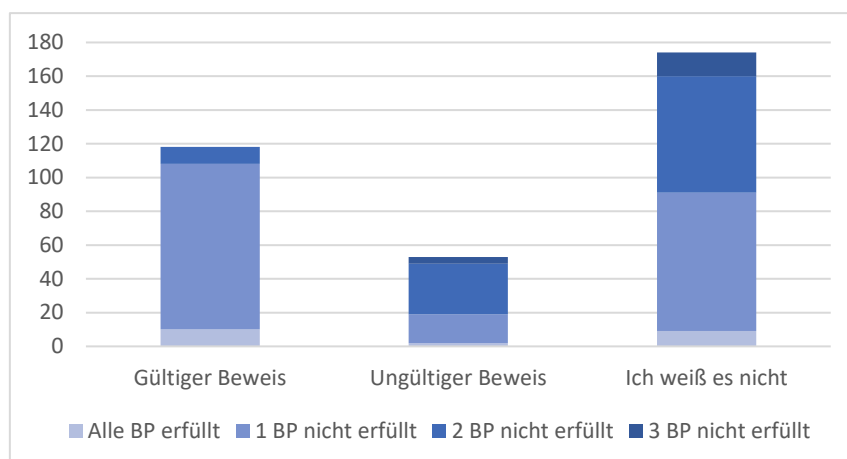


Abb. 1: Deskriptive Daten der Bewertung eines Beweisversuches bei Berücksichtigungen der Angaben zu den Beweisprinzipien (BP)

Diskussion & Ausblick

In allen Klassenstufen dieser Stichprobe gibt es Schüler*innen, die in Beweisversuchen, bei denen Beweisprinzipien nicht erfüllt sind und die daher nicht gültig sein können, diese Fehler erkennen und dennoch angeben, dass es sich um einen gültigen Beweis handelt. Dies könnte darauf hindeuten, dass den Lernenden das negative Wissen zur Gültigkeit mathematischer Beweise fehlt und sie nicht wissen, dass eine Ablehnung der Kriterien logisch zwingend zur Ungültigkeit des Beweises führen muss. Möglicherweise fehlt eine ausreichende Vernetzung des Wissens, was die Unsicherheiten bei der Beweisvalidierung erklären könnte (Healy & Hoyles, 1998). Dass es auch Schüler*innen gibt, die einen ungültigen Beweisversuch korrekt als ungültig

bewerten, obwohl sie angeben, dass alle Beweisprinzipien erfüllt sind, spricht dafür, dass die Schüler*innen noch weitere als die drei in dieser Studie zu bewertenden Kriterien zur Validierung heranzogen. Die hohe Anzahl an Schüler*innen, die angaben, nicht zu wissen, ob die zu validierenden Beweisversuche gültig sind, könnte auch darauf hindeuten, dass ihnen das Wissen zu den Kriterien fehlt, um eine solche Entscheidung treffen zu können. Daher sollte das Validieren von Beweisversuchen und die dafür nutzbaren Kriterien einen stärkeren Fokus im Unterricht erhalten. Ob die Lernenden bei der Bearbeitung durch die Tatsache verunsichert waren, dass alle sechs Beweisversuche fehlerhaft waren, ist in weiteren Studien zu untersuchen.

Literatur

- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. Institute of Education, University of London.
- Heinze, A. (2004). Zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch der Sekundarstufe I: —Theoretische Grundlegung, Methode und Ergebnisse einer Videostudie—. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25, 221-244.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, S. 1-10). Bellaria, Italy.
- KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10. 2012). Wolters Kluwer München.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (S. 173-204).
- Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: observations from proof validation and evaluation performances*. National University of Ireland.
- Selden, A., & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (S. 339-345).
- Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM Mathematics Education*, 51(5), 717-730.
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2022). Students' Knowledge About Proof and Handling Proof. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 27-34). Alicante, Spain: PME.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.