

Ulrich SCHWÄTZER, Dortmund

Zur Relevanz komplementbildender Strategien bei der Subtraktion im Tausenderraum

Für die Subtraktion existieren die Grundvorstellungen Wegnehmen und Ergänzen, letztere verstanden als Komplementbildung zwischen Minuend und Subtrahend. Dazu werden im Folgenden erste ausgewählte Befunde einer Studie zur Subtraktion im dritten Schuljahr dargelegt.

1. Ergänzen versus Komplementbildung

Ein Blick in gängige mathematikdidaktische Hand- und Lehrbücher (z.B. Krauthausen & Scherer, 2007; Padberg & Benz, 2011) zeigt eine kohärente Auffassung, wie die Grundrechenarten – hier im speziellen die Subtraktion – in der Grundschule zu thematisieren sind: Zunächst erfolgt eine breite Beschäftigung mit mentaler Arithmetik, vornehmlich in der Form des halbschriftlichen Rechnens, die verständige Einführung der schriftlichen Verfahren erfolgt erst am Ende des Lernprozesses. Für die Subtraktion gelten dabei fünf halbschriftliche Strategien als Standard, zu denen die Eigenproduktionen der Kinder im Sinne fortschreitender Mathematisierung kategorisiert werden können: Neben den Strategien Schrittweise und Stellenweise die als elaborierter geltenden Strategien Hilfsaufgabe, Vereinfachen (zusammen: Variieren) und Ergänzen. Während Variieren auf der Anwendung des Gesetzes der Konstanz der Differenz beruht, wird Ergänzen zumeist als Auffüllvorgang vom Minuenden zum Subtrahenden aufgefasst und erfolgt als einzige der fünf Strategien additiv. Ergänzen erfordert daher einen Wechsel der Grundvorstellung, derer zwei für die Subtraktion in der didaktischen Literatur existent sind: Wegnehmen (der Subtrahend wird vom Minuenden abgezogen) und Ergänzen (die Spanne zwischen Subtrahend und Minuend wird ermittelt). Damit ist ein Dilemma offenbar: „Ergänzen“ bezeichnet sowohl die in der Regel als schrittweise additives Auffüllen thematisierte halbschriftliche Strategie der Subtraktion, als auch die zugehörige Grundvorstellung, die aber wesentlich mehr umfassen kann, als das additive Auffüllen (s.u.) – zur Unterscheidung und zur inhaltlichen Erweiterung wird daher hier der Begriff Komplementbildung für diese Grundvorstellung verwendet.

Mathematisch betrachtet ist die Subtraktion die inverse Operation der Addition, zusätzlich kann die indirekte inverse Operation jedoch in zwei Formaten dargestellt werden (Campbell, 2008; vgl. Tab. 1). Auch mengentheoretisch lässt sich die Verwendung des Begriffs Komplement legitimieren: Seien A und B Mengen und A Teilmenge von B , dann gilt für das Komplement

Operation	Beispiel	Grundvorstellung	Format	Kontext
Direkte Subtraktion	$624 - 293 = \underline{\quad}$	Wegnehmen	Subtraktion	Wegnehmen
Indirekt mit dem Invers	$293 + \underline{\quad} = 624$	Komplementbildung	Addition	Auffüllen
	$624 - \underline{\quad} = 293$		Subtraktion	Entleeren

Tab. 1: Operation und Format

ment $A^C := B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$, der Komplementbildungsprozess als solcher kann hier kontextuell sowohl durch Auffüllen von A zu B als auch durch Entleeren von B zu A erfolgen. Festzuhalten bleibt: Die Grundvorstellung Komplementbildung beinhaltet mehr als das schrittweise additive Auffüllen, wenn auch das subtraktive Entleeren bis jetzt wenig gebräuchlich ist.

MA^*		Grundvorstellung	Wegnehmen	Komplementbildung	
		Format	Subtraktion	Addition	Subtraktion
Strategie	Schrittweise		$\frac{83-79=??}{83-70=13}{13-9=4}$	$\frac{79+??=83}{79+1=80}{80+3=83}$	$\frac{83-??=79}{83-3=80}{80-1=79}$
		Stellenweise	$\frac{83-79=??}{80-70=10}{3-9=-6}$	$\frac{79+??=83}{70+10=80}{9-6=3}$	$\frac{83-??=79}{80-10=70}{3+6=9}$
	Variieren	Hilfsaufgabe	$\frac{83-79=??}{83-80=3}{3+1=4}$	$\frac{79+??=83}{80+3=83}{3+1=4}$	$\frac{83-??=79}{83-10=73}{73+6=79}$
		Vereinfachen	$\frac{83-79=??}{84-80=4}$	$\frac{79+??=83}{80+4=84}$	$\frac{83-??=79}{84-4=80}$

Tab. 2: Strategien in Matrixdarstellung, *Mentale Arithmetik (nach Selter, Prediger, Nührenböcker & Hussmann 2012, modifiziert und ergänzt um das Subtraktionsformat)

Daher plädieren einige Autoren in aktuellen Texten (Peltenburg et al. 2011; Selter et al. 2012), bei den halbschriftlichen Strategien den Grundvorstellungswechsel und die Strategien als Matrix zu betrachten (vgl. Tab. 2). Auch wenn einige der in dieser Tabelle abgebildeten Strategievarianten, wie die Autoren zu Recht anmerken, sehr ungebräuchlich sind, so sind sie doch denkbar. Die klassische Strategie „Ergänzen“ mit schrittweise additivem Auffüllen deckt zumindest nur eine der acht theoretisch möglichen

Mentale Arithmetik: 707 Dokumente, davon mit mindestens einer Rechnung:							
Komplementbildend: 266				Wegnehmend: 495			
Add.format: 217		Sub.: 60					
Schr	St	Hi	V	Schr	Ste	Hi	Ver
237	2	26	3	272	162	102	192

Tab. 3: Verteilung (Strategien Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe, Vereinfachen) Die Zahlen dieser Auswertung sind noch vorläufig, können sich ggf. noch leicht ändern.

266 mindestens eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung, 495 eine des Wegnehmens. Abb. 1 (Bildschirmfoto der Auswertungssoftware) zeigt dabei die schülerbezogene Verteilung dieser Dokumente über die Unterrichtsblöcke. Hierbei zeigte sich, dass das komplementbildende Rechnen in Clustern auftritt, dieses stark im explorativen Block und vor der Einführung der schriftlichen Subtraktion (hier zur Herleitung benutzt) vertreten ist, aber auch dazwischen und danach seinen Stellenwert behält.

The image shows four lines of handwritten math on a grid background. The first line is $624 - 487 = 137$. The second line is $624 - 500 = 124$. The third line is $124 + 13 = 137$. The fourth line is $500 - 13 = 487$. The numbers 124 and 487 are underlined.

Abb. 2: K-Hilfsaufgabe, Subtraktionsformat

Tabelle 3 zeigt weitere Verteilungen: Das Subtraktionsformat trat dabei von Anfang an auf Schülerdokumenten auf, ohne von außen angeregt worden oder vorher bekannt gewesen zu sein. Neben dem schrittweisen Rechnen (in dem „Ergänzen“ thematisiert wurde, ähnlich stark wie beim Wegnehmen) traten weitere Varianten komplementbildenden Rechnens auf, wenn auch wesentlich seltener als in der Grundvorstellung Wegnehmen.

4. Zur Diskussion

Es zeigen sich Indizien, dass eine Strategie „Ergänzen“ als schrittweises, additives Auffüllen die Strategieviefalt der in dieser Studie stark vertretenen Grundvorstellung Komplementbildung nicht umfasst. In der Zukunft könnte der Grundvorstellungswechsel bewusster angeregt und weitere als nur schrittweise Strategien auch dort thematisiert werden. Das Subtraktionsformat scheint zu existieren, komplementbildendes Rechnen könnte Kindern also in beiden Formaten möglich sein. Auf andere Befunde dieser Studie kann hier aus Platzgründen leider nicht weiter eingegangen werden.

Literatur

- Campbell, J. (2008). Subtraction by addition. *Memory & Cognition*, 36(6), 1094-1102.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier Spektrum Akad. Verl.
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung (4. erw., stark überarb. Aufl.). Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.
- Peltenburg, M., Robitzsch, A. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 - A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 351-369.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hussmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 389-408.