PLACK, Julian
Siegen

Der Grenzwertbegriff in Lehrbüchern der Schule und Hochschule - erste Betrachtungen zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden

„[…] doch der Limesbegriff ist sehr wichtig, und Sie [Studierende] sollten sich beharrlich um ein Verständnis bemühen, wenn diese Definition [des Grenzwerts] eingeführt wird“ (Alcock, 2017, S. 53).

Der Übergang von der Schule zur Hochschule in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen wird von vielen Studierenden als große Herausforderung beschrieben. Die sogenannte Übergangsproblematik ist facettenreich und wird auf verschiedenen Ebenen sehr unterschiedlich dargestellt. Während die einen eher ein sprunghaft steigendes fachliches Niveau in den Blick nehmen, beschreiben andere den Übergang als fundamentalen Auffassungswechsel. Der Begriff des „Grenzwerts“ ist nun einer, so meine These, der genau an dieser Schnittstelle des Mathematiklernens liegt: Einerseits handelt es sich um einen fundamentalen Begriff der (Hochschul-)Analysis derart, dass die Diskussion von Grenzprozessen mitunter eines der wichtigsten Prinzipien der Mathematik, insbesondere der Analysis darstellt (z.B. Königsberger, 2004). Andererseits wird dieser in Einklang mit den Lehrplänen in der Schule nur implizit und präformal thematisiert. Laut Kernlehrplan für die Sekundarstufe II (Gymnasium/Gesamtschule) in Nordrhein-Westfalen unter "Funktionen und Analysis" ist die Untersuchung des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ als ein inhaltlicher Schwerpunkt erwähnt. Im Rahmen der Differentialrechnung soll mittels eines propädeutischen Grenzwertbegriffs der Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate erläutert und die lim-Schreibweise benutzt werden. Innerhalb der Integralrechnung steht der Übergang von der Produktsumme zum Integral im Vordergrund (MSB NRW, 2023).

Forschungsfrage des vorangestellten Dissertationsprojekts ist: Inwiefern unterscheidet sich nun die Thematisierung des Grenzwerts im Schul- und Hochschulbuch und welche Rückschlüsse können daraus für die Übergangsproblematik gezogen werden?

Die erste Näherung besteht aus einer explorativen Analyse zweier Lehrbücher aus Schule und Hochschule. Auf Seiten der Hochschule wird das weitverbreitete Buch Analysis I (Königsberger, 2004), auf Seiten der Schule der Lambacher Schweizer (Freudigmann et al., 2012) zum Untersuchungsgegenstand. Die Vorstudie konnte herausstellen, dass der Grenzwert einerseits unterschiedlich eingeführt wird (1). Andererseits erscheint auffällig, dass die

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Reihenfolge der behandelten Themen unter Bezugnahme des Grenzwertbegriffs fundamental unterschiedlich ist (2).

(1) Der Zugang zum Grenzwertbegriff findet im Lambacher Schweizer mittels eines Sachkontextes aus der Physik im Rahmen der Momentangeschwindigkeit statt. Anhand von Strecken und Zeiten (Funktion: $s(t) = 0{,}3 \cdot t^2$) werden über Änderungsraten Geschwindigkeiten in immer kleiner werdenden Intervallen berechnet und für verschiedene h-Werte, absolute und relative Änderungsraten tabellarisch dargestellt. Abschließend wird festgehalten, "dass sich der Differenzenquotient sowohl für positives als auch für negatives h dem Grenzwert 0,6 nähert" (Freudigmann, 2012).

Im Lehrbuch Analysis I von Königsberger beginnt die Einführung des Grenzwertbegriffs ohne jegliche ontologische Bindung an die Realität und wird rein formal eingeführt. Im Kapitel zu Folgen findet zusätzlich eine kurze geschichtliche Einordnung statt, dass bereits die Griechen Grenzprozesse für die Berechnung von Flächen verwendeten und Grenzprozesse elementar gerade im Bereich der Analysis sind. Darauf folgt die klassische Hochschuldefinition der Konvergenz einer Folge, in welcher der Grenzwertbegriff Verwendung findet: "Die Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Folge […]" (Königsberger, 2004).

(2) Ufer (2022) fasst mit Blick auf die Lehrpläne zusammen, dass das Grenzwertkonzept in der Schule zumeist nur informell zum Gegenstand des Unterrichts wird und die Sichtweisen der Grenzwerte von Folgen und Funktionen fehlen.

Auch unter diesem Aspekt werden die beiden Lehrbücher betrachtet. In Abbildung 1 ist für beide Bücher das Auftreten des Grenzwertbegriffs im Zusammenhang unterschiedlicher Inhalte schematisch dargestellt und die entsprechende Seitenzahl im Buch angegeben.

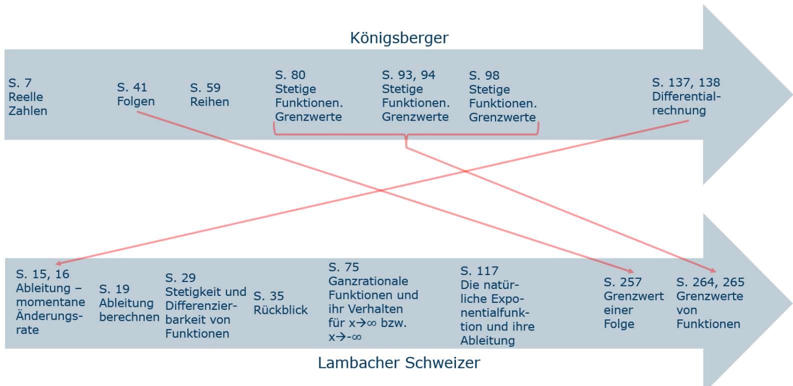

Abb.1: Grenzwerte im Schulbuch und Hochschulbuch (eigene Darstellung)

Die roten Pfeile markieren die jeweiligen Sprünge der Inhaltsbereiche im Hinblick auf die Reihenfolge in den Büchern: Wohingegen Folgen und deren

Grenzwerte im Hochschulwerk unmittelbar aufeinander folgen, werden diese im Schulbuch erst am Ende betrachtet. Nach der Erörterung Grenzwerte für Folgen und Reihen wird das Konzept im 'Königsberger' auf Funktionen ausgeweitet. Im Schulbuch 'Lambacher Schweizer' wird dieser Aspekt erst am Ende des Themenbereichs über die Grenzwerte von Folgen behandelt. Wie bereits erwähnt, startet das Schulbuch also mit der Differentialrechnung über das Schlüsselkonzept der Ableitung im physikalischen Kontext. Im universitären Lehrbuch hingegen wird dieses Thema erst nach den Kapiteln über Folgen, Reihen sowie Funktionen und deren Grenzwerten behandelt.

Diese Zusammenschau macht deutlich, dass sich die inhaltliche Abfolge in den beiden Lehrbüchern für die Schule und die Hochschule stark unterscheidet.

Im weiteren Verlauf soll sich den zu Beginn formulierten Fragen mittels qualitativer Instrumente (z.B. Mayring, 2022) genähert werden. Der theoretische Ausgangspunkt zur Bildung von Kategorien ergibt sich aus den vier Kategorien 'Formalismus', 'Anwendung', 'Prozess' und 'Schema' nach Grigutsch et al. (1998). Der 'Formalismus' spiegelt dabei eine strenge deduktive Methode wider, deren besonderes Merkmal in den Punkten Exaktheit und Präzision liegt. 'Anwendung' charakterisiert die Wichtigkeit der Mathematik für das spätere Berufsleben sowie einen grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft. Der 'Prozess' hebt hervor, dass Mathematik einerseits eine Tätigkeit ist, über Probleme nachzudenken und andererseits wird damit die dynamische Sicht von Mathematik ausgedrückt. Die Dimension 'Schema' eröffnet eine Perspektive auf Mathematik als Werkzeugkasten und Formelpaket. Die Tätigkeit besteht im Einsatz von Algorithmen und Routinen (Grigutsch et al., 1998).

Bevor die Kategorien an das Material herangetragen werden besteht der nächste Schritt darin, das System induktiv zu ergänzen, Gegenpositionen zu den vier Kategorien zu finden und ggf. zusammenzufassen. Dem 'Formalismus' wird der 'Empirismus' als Gegenposition ergänzt, bei dem die Begriffe unmittelbar mit den realen Dingen verbunden sind (Bedürftig & Murawski, 2019). Die Nähe zur 'Anwendung' steht in einem unmittelbaren Zusammenhang zu 'innermathematischen' Fragestellungen, was hier zunächst ergänzt wird (Bauer et al., 2023). Danckwerts & Vogel (2006) stellen der Mathematik als 'Prozess' die Mathematik als 'Produkt' gegenüber, in der es um die Anwendung von Kalkülen geht. Des Weiteren heben sie hervor, dass sich die Komplementarität der Produkt-Prozess-Perspektive am Grenzwertbegriff ausführen lässt. Zuletzt wird unter Bezugnahme der Dimension 'Schema' das 'Problemlösen' ergänzt. Hierbei steht vor allem die Offenheit des

Weges zum Ziel im Vordergrund (Holzäpfel, et al., 2018). Aufgrund des gleichen inhaltlichen Gerüsts der Kategorien 'Produkt' und 'Schema' werden diese beiden im Weiteren zu 'Schema' zusammengefasst. Ferner gibt es zwei weitere Anpassungen. Die beiden Kategorien 'Innermathematisch' und 'Formalismus' werden zu einer übergreifenden Kategorie 'formal-abstrakt' sowie 'Anwendung' und 'Empirismus' zu 'empirisch-gegenständlich' zusammengefasst.

Der nächste Analyseschritt besteht nun darin, dieses theoretisch entwickelte Kategoriensystem an die beiden Bücher heranzutragen und empirisch auf seine Passung zu evaluieren.

Literatur

Alcock, L. (2017). *Wie man erfolgreich Mathematik studiert: Besonderheiten eines nicht-trivialen Studiengangs* (B. Gerl, Übers.) (1. Aufl. 2017). Springer Berlin Heidelberg.

Bauer, S., Büchter, A. & Henn, H. W. (2023). Schulmathematik und Realität - Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage, S. 21–56). Springer Spektrum.

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2019). *Philosophie der Mathematik* (4., erweiterte und überarbeitete Auflage). de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110546989

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten* (1. Aufl.). MPS. Elsevier Spektrum Akademischer Verl.

Freudigmann, H., Buck, H., Greulich, D., Sandmann, R. & Zinser, M. (Hrsg.). (2012). *Lambacher Schweizer - Mathematik für Gymnasien / erarbeitet von Hans Freudigmann, Heidi Buck, Dieter Greulich, Rüdiger Sandmann, Manfred Zinser. Analysis Leistungskurs* (1. Aufl.). Ernst Klett Verlag.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3–45. https://doi.org/10.1007/BF03338859

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T. & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken* (1. Auflage). Klett/Kallmeyer.

Königsberger, K. (2004). *Analysis 1* (6. Aufl.). Springer-Lehrbuch. Springer.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (13., überarbeitete Auflage). Beltz.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2023). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen*: *Mathematik*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf

Ufer, S. (2022). Studierfähigkeit als eine Zieldimension von Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe: Konzepte, Modelle und Beitrag des Mathematikunterrichts. In T. Rolfes, S. Rach, S. Ufer & A. Heinze (Hrsg.), *Das Fach Mathematik in der gymnasialen Oberstufe*. Waxmann.