

Kerstin HEIN, Berlin

## **Die Bedeutung von Zeichen für den Mathematikunterricht – eine mehrperspektivische Lesart**

Der Verwendung von Zeichen, wie die sinnlich wahrnehmbaren Signale heißen, die sich in der Regel auf Sachverhalte in der realen Welt beziehen, kommt in der Mathematik eine große Bedeutung zu. Es wird nicht nur – wie auch in anderen Wissenschaften wie etwa der Sprachwissenschaft – über allgemeine sprachliche Zeichen, sondern mit eigenen mathematischen Zeichen kommuniziert, die abstrakte Objekte repräsentieren. Mit anderen Worten müssen mathematische Objekte nicht notwendigerweise in der außermathematischen Welt existieren. Die Beschäftigung mit der Mathematik besteht im Wesentlichen im Handeln mit Zeichen, die im Mathematikunterricht nach und nach eingeführt werden und die sich auf abstrakte mathematische Objekte beziehen. Die mathematischen Objekte sind sogar „nur über Zeichen ‚denkbar‘“ (Fischer 2006, S. 181). Obwohl das Verwenden von Zeichen das Wesen der Mathematik ausmacht, wird im Kontext des Mathematikunterrichts nur selten über jene reflektiert.

Die Semiotik, die Lehre von den Zeichen, beschäftigt sich interdisziplinär mit Zeichen und deren Verwendung. Sie schafft eine andere Sichtweise auf die Mathematik und ihre Didaktik und wurde in den letzten Jahren als Zugang zur Mathematik diskutiert. Insbesondere Dörfler betont die Notwendigkeit der Zeichen zum Verständnis von abstrakten, mathematischen Objekten. Mit Hilfe der Semiotik können daher zentrale Probleme des Mathematikunterrichts produktiv untersucht werden (Dörfler 2012).

Je nach Forschungsinteresse bieten sich unterschiedliche Zeichenmodelle und –auffassungen an, die vor allem durch das triadische Zeichenmodell von Peirce und das dyadische Zeichenmodell von de Saussure geprägt sind (Nöth 2000, S. 60). Peirce ging von einem dreigliedrigen Zeichenmodell aus, das das Objekt, das Zeichen als Repräsentant und das Interpretamen, also die geistige Vorstellung vom Objekt, umfasste. Da er hierbei nicht davon ausging, dass das Objekt außerhalb der Zeichen existieren muss und darüber hinaus der Interpretationsvorgang thematisiert wird, ist dieses Modell für unterschiedliche Betrachtungen mathematischer Zeichen geeignet (ebd., S. 62f.). Bei de Saussure hingegen bestand ein Zeichen aus der Vorstellung und dem Lautbild. Obwohl de Saussure das Zeichen ausschließlich als mentale Konzeption verstand, bezog er sich dabei auf sprachliche Zeichen, die in der Regel Referenzobjekte in der Realität haben und deren Interpretation häufig unproblematischer ist als die Interpretation mathematischer Zeichen (ebd.,

S. 71ff.). Obwohl dieses Zeichenmodell zur Erklärung mathematischer Interpretationsvorgänge weniger geeignet scheint, da es von einer klar zugeordneten und leicht erfahrbaren Vorstellung ausgeht, erlaubt es, die Probleme der Schüler und Schülerinnen leichter zu verstehen, denn es entspricht eher deren Alltagsverständnis. Zur Vereinfachung ist im Folgenden mit dem Begriff ‚Zeichen‘ der schriftliche Repräsentant gemeint, auch wenn jener je nach Zeichenmodell anders definiert wird.

Nach Morris kann die Betrachtung von Zeichen in folgende Untersuchungsaspekte unterschieden werden: *Semantik*, *Syntax* und *Pragmatik* (Bußmann 2002, S. 595). Klaus erweiterte diese semiotischen Dimensionen um den Aspekt der *Sigmatik* (Nöth 2000, S. 91). Die Linguistik analysiert innerhalb der Semantik die Bedeutung von Zeichen. Bei sprachlichen Zeichen gibt es teilweise eindeutige Objekte, die den Zeichen zugeordnet werden können und in der realen Welt existieren wie z.B. ein Baum, das prototypische Beispiel de Saussures. Bei mathematischen Zeichen hingegen fehlt fast immer das Referenzobjekt in der außermathematischen Welt. Die Syntax untersucht Anordnung und Beziehung verschiedener Zeichen zueinander. Innerhalb der Sprache kann beispielsweise das Wort ‚Weg‘ kontextabhängig unterschiedliche Bedeutungen annehmen, wie durch die Gegenüberstellung der Aussagen ‚Weg war er!‘ und ‚Der Weg war sehr beschwerlich.‘ deutlich wird. Auch innermathematisch hat z.B. das Zeichen ‚-‘ je nach Kontext die Bedeutung eines Vorzeichens oder die Bedeutung eines Operators. Unter dem Begriff der Pragmatik wird die Beziehung zwischen Zeichen und Zeichenbenutzer unter Einbeziehung der Äußerungssituation betrachtet. So ist beispielsweise die Bedeutung des Begriffs ‚Funktion‘ abhängig vom Kontext außerhalb der Zeichen. Wird dieser Begriff im Alltag verwendet, bezeichnet er in der Regel die Aufgabe eines Objektes, wohingegen er innerhalb der Mathematik wiederum ein zentraler Begriff ist, der die Abbildung bezeichnet, die jedes Element einer Menge einem Element einer anderen Menge zuordnet. In der Sigmatik, die mitunter auch als Teilaspekt der Semantik betrachtet wird, wird das Verhältnis zwischen den (sprachlichen) Zeichen „und den durch sie bezeichneten Objekten bzw. Sachverhalten der realen Welt“ (Bußmann 2000, S. 599) untersucht. Dabei ist beispielsweise bedeutsam, ob Zeichen mehr oder weniger Merkmale mit den repräsentierten Objekten gemein haben. Dieser Untersuchungsaspekt ist insbesondere innerhalb der Mathematik problematisch – und dadurch aber auch besonders interessant –, da die mathematischen Objekte in der Regel nicht in der realen Welt existieren.

Unsere Studie ‚Zeichen im Kontext einer Geraden‘ wurde angeregt durch Fischer, die den Einsatz von Zeichen bei Mathematikstudierenden untersuchte (Fischer 2006). Nach Fischer betont die Verwendung von bestimmten

Zeichen die unterschiedlichen Bedeutungen mathematischer Objekte. Beispielsweise wird bei der Darstellung der Restklasse ‚zwei modulo fünf‘ durch die Schreibweise  $\{5z+2 \mid z \in \mathbb{Z}\}$  die Bedeutung betont, dass die Zahlen mit Rest zwei zusammengefasst werden (ebd., S. 187).

Die nachfolgend dargestellte Studie wurde gemeinsam mit Inga Refle entworfen und in einem mathematikdidaktischen Seminar an der Freien Universität Berlin (Sommersemester 2012) durchgeführt. Die zwölf Studierenden und deren Dozent erhielten dabei die Aufgabe, über das ihnen vorgelegte Zeichen einer Geraden einen Aufsatz zu schreiben. Um die unterschiedlichen Sichtweisen der Teilnehmenden abzubilden, wurden sie gebeten, die Aspekte Eigenschaften, Lage im Raum und mögliche Rechenoperationen zu berücksichtigen. Als Grafik war das Zeichen für eine Gerade bei einem Teil der Studierenden mit und bei dem anderen Teil der Studierenden ohne Koordinatensystem beigelegt.

Die Auswertung unter den vier sprachwissenschaftlichen Untersuchungsaspekten (Semantik, Syntax, Pragmatik, Sigmantik) ergab Folgendes: Innerhalb der Semantik kristallisierte es sich heraus, dass Studierende, deren Grafik ein Koordinatensystem enthielt, schwerpunktmäßig eher Aspekte der Analysis betrachteten, wohingegen Studierende, deren Grafik kein Koordinatensystem enthielt, ihren Betrachtungsschwerpunkt eher auf die analytische Geometrie legten. Das Beifügen bzw. Weglassen des Koordinatensystems, was syntaktisch einen Unterschied darstellt, hatte großen Einfluss auf die Aufsätze der Studierenden. Diese unterschieden sich nicht nur im Bedeutungsschwerpunkt, denn bei der Aufgabestellung ohne Koordinatensystem wurden deutlich mehr inhaltliche Aspekte und zum Teil auch eigene grafische Ergänzungen angeführt. Trotz des mathematikdidaktischen Kontextes wurde das Zeichen auch als ‚Strich‘ bzw. ‚Linie‘ bezeichnet. Unter dem Aspekt der Pragmatik kann man dies so deuten, dass dafür die Aufgabenstellung verantwortlich sein könnte – auf der anderen Seite zeigt dies aber auch, dass den Studierenden das mathematische Zeichen gleichzeitig auch in seiner Verwendung als außermathematisches Zeichen präsent war. Unter dem Aspekt der Sigmantik wurde deutlich, dass die mathematischen Zeichen in der Regel auf Objekte außerhalb der sinnlich wahrnehmbaren Welt verweisen. Interessanter Weise wurde in nur einem Fall – im Zusammenhang mit Modellierungsmöglichkeiten – auf die außermathematische Welt Bezug genommen. Welche Erkenntnisse lassen sich aus dieser Studie für den Mathematikunterricht ableiten?

Die Untersuchungsergebnisse aus der Semantik zeigen, dass es notwendig ist, die Bedeutungsschwerpunkte, die mit unterschiedlichen Schreibweisen einhergehen, deutlich herauszuarbeiten und den Schülern und Schülerinnen

die Möglichkeit zur Reflexion zu geben – beispielsweise mittels Lerntagebüchern. Die Betrachtung von mathematischen Zeichen im syntaktischen Kontext lässt darauf aufmerksam werden, wie wichtig ein sensibler Umgang mit Zeichen und Zeichenkombinationen unter anderem in unterschiedlichen Versionen von Klassenarbeiten oder generell bei der Unterrichtskonzeption ist. Aufgaben können durch das Hinzufügen oder Weglassen einzelner Zeichen einen mehr oder weniger offenen Charakter erhalten. Mit dem pragmatischen Blick wird die Frage aufgeworfen, wie im Mathematikunterricht mit Begriffen aus dem Alltag umgegangen werden sollte. Mit Wagenschein sollte vor der ‚Sprache des Verstandenen‘ bei Lernprozessen eine ‚Sprache des Verstehens‘ zugelassen werden (Ruf & Gallin 2011, S. 25). Beim Übergang zur mathematischen Fachsprache sollte auch deren Notwendigkeit thematisiert werden. Betrachtet man mathematische Zeichen aus der Perspektive der Semiotik, so wird deutlich, dass selten eine Referenz in die reale Welt existiert. In der Sprachwissenschaft wird das Objekt als das Primäre betrachtet, demgegenüber können abstrakte Objekte nur über die Zeichen verstanden werden. Daher müssen Lernende „zwangsweise den umgekehrten Weg gehen: von den Darstellungen zur Idee und zum abstrakten Objekt“ (Dörfler 2006, S.1). Da sich Lernenden der mathematische Hintergrund eines Zeichens mitunter nicht sofort erschließt, sollte zunächst auch das ausschließliche Operieren mit den Zeichen zugelassen werden. Durch das Handeln mit den Zeichen können dann die Eigenschaften des abstrakten Objektes erschlossen und als mentales Konstrukt aufgebaut werden.

Der Mehrwert der sprachwissenschaftlichen Betrachtung liegt darin, dass sie auf die Probleme, die bei dem Umgang mit mathematischen Zeichen auftreten können, aufmerksam macht und Anstöße für weitere Forschungen gibt. Der Zeichenbegriff von de Saussure ist sicherlich nicht hinreichend für das Verständnis mathematischer Interpretationsvorgänge, zeigt jedoch die Problemstellen von Lernenden auf.

## **Literatur**

- Bußmann, H. (Hrsg.) (2002): Lexikon der Sprachwissenschaft. Stuttgart: Kröner.
- Dörfler, W. (2006): Keine Angst – Mathematik ist nicht nur abstrakt. In: BzMU 2006, Hildesheim: Franzbecker Verlag, 71-74.
- Dörfler, W. (2012): Was und wie wird in der Mathematik konstruiert. In: BzMU 2012, Münster: WTM Verlag, 217-220.
- Fischer, A. (2006): Der Einsatz von Zeichen als Werkzeuge zur mentalen Konstruktion abstrakter Objekte. In: JMD 27 (2006) 3/4, 180-199.
- Nöth, W. (2000): Handbuch der Semiotik. Stuttgart: Metzler.
- Ruf, U., Gallin, P. (2011): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Seelze: Friedrich Verlag.