Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Von der Schwierigkeit der Vermittlung zwischen Mathematik und dem Rest der Welt

1. Von der Existenz zweier Welten

Die Einsicht in die Nützlichkeit der Mathematik für praktische konkrete Fragestellungen des Alltags ist für uns Menschen keineswegs selbstverständlich (Wigner, 1960). Insbesondere scheint es sehr schwer zu fallen, Mathematik auf die erfahrbare Welt beziehen zu können. Mathematische Objekte existieren in unserem Kopf, sie sind geistige Entitäten. Ein idealer Kreis existiert in der erfahrbaren Welt genauso wenig wie ein idealer Würfel oder die Zahl drei. Mathematische Begriffe sind idealisierte Konstrukte. Mathematik existiert somit ausschließlich im Reich unserer Ideen und Vorstellungen. Diesem gegenüber steht das Reich der sinnlich erfahrbaren Welt, in dem es bestenfalls dünne Anhäufungen von Blei um einen gegebenen Punkt herum (aber keine Kreise), drei Äpfel und drei Bleistifte (aber keine Zahl drei an sich) und schon gar keine idealen Zufallsgeneratoren gibt. Als Wissenschaft hat die Mathematik mit einigen Geisteswissenschaften wie etwa der Philosophie und der Theologie gemeinsam, dass die Gegenstände, mit denen sie sich vordringlich befassen in einem idealisierten Universum, nicht aber in der empirisch erfahrbaren Welt existieren. Stehen sich hier zwei getrennte Welten gegenüber, ähnlich wie in Martin Luthers (schon auf Augustinus zurückgehender) Zwei-Reiche-Lehre, wonach der Christ in zwei Reichen lebt (Althaus, 1957): dem unvollkommenen *Weltlichen Reich* und dem vollkommenen *Reich Gottes* oder *Geistlichen Reich*? Wie können wir für Lernende den Gegensatz zwischen dem Reich der Mathematik und der erfahrbaren Welt überbrücken?

2. Von der Kluft zwischen mathematischem Modell und Realität

Zwischen der „Welt“, d.h. dem innerweltlichen Problem und seinem mathematischen Repräsentation klafft immer eine Kluft. Mathematisches Modell und Realität sind nicht identisch. Das ist vielleicht die wichtigste Lektion, wenn Schülerinnen und Schüler lernen, wie man Mathematik auf Probleme dieser Welt anwendet. Die Realität ist oft so komplex, dass sie sich einer exakten mathematischen Beschreibung entzieht, während jeder beobachtete Sonderfall stark mit einzigartigen Besonderheiten versehen ist. Die mathematische Beschreibung zielt hingegen auf eine allgemeinere Gültigkeit ab. Modelle sind naturgemäß nicht die Wirklichkeit, sondern eine Vereinfachung des Durcheinanders, das die Realität uns präsentiert. Um die Realität zu vereinfachen, opfern Modelle Details und machen im Idealfall den Blick frei für das Wesentliche. Bei der Betrachtung realer Daten, d.h.

in der Welt tatsächlich gemessener Werte, wird man immer wieder Abweichungen zwischen Daten und Modell feststellen. Es ist ja gerade die Absicht der Modellbildung einen idealisierten Zusammenhang herzuleiten, bei dem man von unwesentlichen Details absieht. Die Mathematik kann zu einem tieferen Weltverständnis maßgeblich beitragen. Das gelingt aber nur, wenn das nach neuen Erkenntnissen suchende Subjekt (d.h. der Modellierer) sich des dialektischen Verhältnisses zwischen Mathematik und dem Rest der Welt bewusst ist und die beiden Welten miteinander in einen Dialog bringt.

3. Forschungsfrage:

Um zu sehen, wie Lernende mit der Diskrepanz zwischen Daten und mathematischem Modell umgehen und wie sie argumentieren, haben wir 119 Studierende aufgefordert, eine vorgegebene Modellierung schriftlich zu kommentieren.

3.1 Fragestellungen:

- Nehmen Lernende die Kluft zwischen Mathematik und Rest der Welt als konstitutives Element der Modellbildung wahr?
- Diskutieren Sie plausible sachbezogene Gründe für Abweichungen zwischen Modell und Daten?
- Beurteilen sie die Angemessenheit eines Modells im Wechselspiel zwischen Mathematik und Sachkontext?
- Ziehen sie Alternativmodelle in Betracht?

3.2. Stichprobe:

119 Studierende für Lehramt Sekundarstufe I (Haupt- und Realschule), davon 73 *vor* und 46 *nach* Besuch der Vorlesung „Anwendungsorientierte Mathematik“ im Sommersemester 2012 bzw. Wintersemester 2012/2013

3.3. Methode:

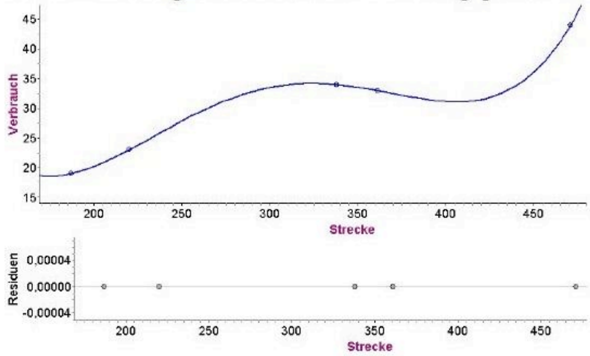
Vorgegeben war eine ausgearbeitete Modellierung des Zusammenhangs zwischen Spritverbrauch und Länge einer mit PKW gefahrenen Strecke.

Aufgabe:
Bei fünf Fahrten mit dem PKW (Opel Zafira mit Flüssiggas) wurde der verbrauchte Sprit (Flüssiggas) und die gefahrenen Kilometer gemessen, um ein Modell für den Zusammenhang zwischen diesen beiden Variablen zu erhalten. Die Daten stehen in nebenstehender Tabelle.
Als Modell hierfür wurde folgendes Polynom 4. Grades vorgeschlagen

	Strecke	Verbrauch
1	187 KM	19 L
2	220 KM	23 L
3	338 KM	34 L
4	361 KM	33 L
5	471 KM	44 L

$$y=\frac{38972834203}{873796484616677160}x^4-\frac{56951151413}{1057864993482660}x^3+\frac{20217831117400793}{873796484616677160}x^2-\frac{256287712573314827}{62414034615476940}x+\frac{9590260999286308}{34840370200027}$$

Folgende Abbildung zeigt die Daten in einem Streudiagramm mitsamt eingepasster Kurve sowie im unteren Teil ein Residuendiagramm. *Das Residuendiagramm ist eine Darstellung der Abweichungen der Daten von der eingepassten Funktion.*



Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Verbrauch und gefahrenen Kilometern für diesen Autotyp. Ist dieses mathematische Modell geeignet oder können Sie gegebenenfalls ein besseres Modell vorschlagen.
Begründen Sie möglichst präzise!

4. Resultate

Eine ausführliche Darstellung Analyse der Antworten ist Gegenstand einer kommenden Publikation. Hier können nur stellvertretend ein paar typische Reaktionen der Studierenden (im Originalwortlaut) wiedergegeben werden. Einige Studierende schauen ausschließlich auf die mathematische Seite der Aufgabenstellung und stellen keinen Bezug zum Sachkontext her.

- *Dieses Modell passt sehr gut, ist geeignet, da das Residuendiagramm keine größeren Ausschreitungen der einzelnen Punkte aufzeigt. Die Punkte liegen alle auf einer Linie.*

Ein anderes Argumentationsmuster stellt zwar einen Bezug zum Sachkontext her, nimmt die Realität jedoch sehr verzerrt war, damit sie sich der mathematischen Sichtweise ganz anpasst.,

- *Das Modell mit den dazugehörigen Daten passt hervorragend, da es keinerlei Abweichungen auf dem Residuendiagramm gibt. Da dieses Modell die Wirklichkeit widerspiegelt, sind die Werte nicht linear, wie es eigentlich sein müsste, da der Verbrauch bei gleichbleibendem Streckenverhältnis und zunehmender Distanz linear steigen müsste ..*

Viele Studierende können sich nicht von den konkret vorliegenden Daten lösen. Sie sind dann sogar bereit, das Modell für das vorliegende Fahrzeug zu akzeptieren ohne den nicht-monotonen Kurvenverlauf in Frage zu stellen. Sie sind aber nicht bereit, die Abweichungen zwischen Modell und Daten aufgrund nicht erhobener Verzerrungen (Fahrstil etc.) als für das Modell unerhebliche Zufallseffekte zu akzeptieren.

- *Dieses Modell ist nicht gut geeignet für die Bestimmung des Verbrauchs, da bei <u>anderen Autos</u> die Kurve wieder ganz anders aussehen könnte. Somit kann man auch <u>keine Voraussagen</u> treffen. Außerdem reichen nicht 5 Daten aus, um ein gutes Modell zu bestimmen.*

- *Meiner Meinung nach wurde hier schlecht modelliert. Man kann nicht entnehmen wo das Auto fuhr (Stadt, Landstraße). Auch die Steigung wurde außer Acht gelassen. Das Modell ist somit nur sehr schlecht in die Realität übertragbar. Monotone Tendenzen, welche einen Durchschnitt beschreiben sind hier sinnvoller ..., da man so Voraussagen durchschnittlich treffen kann*

- *Dieses Modell ist sehr gut den Daten angepasst, jedoch unbrauchbar, da das Modell keinen Sinn ergibt. Diese Kurve passt nur genau zu diesen Daten (also diesem Auto) ist jedoch für keine Aussage eines anderen Wagens brauchbar.*

Bei einer Gesamtbetrachtung der Antworten aller Studierenden lassen sich einige Trends identifizieren, die sich in vielen Bearbeitungen finden. Das Wechselspiel zwischen Mathematik und dem Rest der Welt wird oft nicht bedacht. Auch nach Besuch der Vorlesung zur Anwendungsbezogenen Mathematik wird der Sachkontext nicht unbedingt stärker berücksichtigt. Der Umgang mit Abweichungen zwischen Modell und Daten ist oft deterministisch geprägt. Ein gutes mathematisches Wissen alleine genügt nicht um das hier vorgestellte Modell angemessen validieren zu können. Es kann sogar schaden, wenn die Realität nur noch durch die Brille gewisser mathematischer Methoden wahrgenommen wird. (Meta-)Wissen um Sinn und Zweck des Modellbildens ist zentral.

Literatur

Althaus, P. (1957). Luthers Lehre von den beiden Reichen im Feuer der Kritik.*Luther-Jahrbuch*, S. 42.

Wigner, E. (1960).The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics,* Vol. 13. New York: Wiley