BIKNER-AHSBAHS, Angelika & SCHOU, Marit Hvalsøe
Kiel, Odense

Wie Lernende Formeln „sehen“

Es gibt kein einheitliches Verständnis dessen, was eine Formal sein soll (Leon et al., 2021), obgleich Vorschläge dazu gemacht worden sind (Schou & Bikner-Ahsbahs, 2022; Janvier, 1996). In vielen Arbeiten sind es algebraische Ausdrücke, die für etwas stehen, z.B. für eine Rechenregel, ein Theorem, einen mathematischen Zusammenhang oder auch für das Volumen eines geometrischen Körpers. Allen gemeinsam ist ihre algebraische Form. Verstehen, Entwickeln, Lesen, Interpretieren und Anwenden von Formeln ist aber in allen Klassenstufen schwer.

In den letzten Jahren ist der Gebrauch mathematischer Formeln in den oberen Klassen der Sekundarstufe in den Blick mathematikdidaktischer Forschung genommen worden. Hoch und Dreyfus (2005) etwa weisen auf Schwierigkeiten im Umgang mit algebraischen Termen hin und verorten diese Schwierigkeiten im unzureichend ausgebildeten algebraischen Struktursinn. Die Analysen von Novotná and Hoch (2008) zeigen, dass eine angemessene Ausbildung des algebraischen Struktursinns hochrelevant für die weiterführende Mathematik ist, sogar für das Verstehen formaler algebraischer Strukturen universitärer Algebra. Eines der zentralen Probleme ist der Doppelcharakter eines algebraischen Ausdrucks als mathematisches Objekt und operativen Zusammenhang (Arzarello et al., 2001). Nach Leong et al. (2021) sind rein operative Wiederholungen der Anwendung von Formeln unzureichend, um Formeln flüssig nutzen zu lernen. Mit der Wortkomposition „recognize-apply“ (S. 108) plädieren sie dafür, Erkennen der Form von Formeln inclusive wesentlicher Strukturelemente und Anwenden der Formeln zusammenzuführen.

In jedem Fall ist der Umgang mit Formeln zum Ende der Schulzeit für alle Gebiete hoch relevant. Wie ein angemessener Umgang mit Formeln im Unterricht gefördert werden kann, ist nicht abschließend geklärt. Die Ergebnisse von Kop et al. (2021) legen jedoch nahe, graphisches Darstellen per Hand zu nutzen. Sie zeigen etwa, dass Lernende auf diesem Wege leichter Strukturen in Formeln für Funktionsfamilien erkennen und verstehen können, d.h. Lernende entwickeln dabei „insight into algebraic formulas, that is, the ability to *look through a formula.*“(S. 126, Betonung im Original).

All die angesprochenen Ansätze ringen mit Schwierigkeiten, die Lernende im Umgang mit Formeln zeigen. Sie fragen aber nicht danach, wie Lernende überhaupt Formeln wahrnehmen, wenn sie mit ihnen in Kontakt kommen. Genau dieser Betrachtung wendet sich das Projekt *Views on Formula* zu

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

(Schou und Bikner-Ahsbahs, 2022). Es geht der Frage nach, wie so genannte „views on formula“ sich zeigen, wie sie Schwierigkeiten im Umgang mit Formeln erklären können und wie damit Ansätze zu einem verstehenden Umgang mit Formeln entwickelt werden können.

Views on Formula

Wie Formeln gesehen werden, ist nicht direkt beobachtbar. Beobachtbar aber sind die Wirkungen dieser *Views* auf den Umgang mit Formeln. *Views on formula* zeigen sich durch lokal kohärente Muster sich wiederholenden mathematischen Verhaltens. Dabei verstehen wir unter *kohärent*, dass das Muster für eine gewisse Zeit anhält, und unter *lokal* verstehen wir, dass das kohärente Verhaltensmuster für den Augenblick im entsprechenden Kontext spezifisch ausgeprägt ist. Wenn Lernende etwa eine sehr undifferenzierte Sichtweise auf Formeln haben, dann *identifizieren* sie häufig die Formel mit dem Objekt, für das die Formel steht. Zum Beispiel wurde ein Zylinder wiederholt als „Base times height“ (Grundfläche mal Höhe) bezeichnet, ohne von einer Volumenformel zu sprechen. Das Gleichheitszeichen wird dabei ignoriert.

In einer empirischen Studie mit einer Oberstufenklasse in Dänemark konnten wir acht „views on formula“ zu Formeln geometrischer Körper rekonstruieren. Identifikation ist eine davon. Weitere „views on formula“ sollen nun am Beispiel eines Zylindertubus vorgestellt werden.

Formel als Zeichenfolge, als Gleichung und als zu lesender Text

Abb. 1: Zylindertubus

$V = \pi \cdot h\ (R^2 - r^2)$ ist die Volumenformel eines Zylindertubus mit R als Außenradius und r als Innenradius, sowie der Höhe h. Das mathematische Verhaltensmuster beim *Lesen dieser Formel* wäre*, Zeichen zu identifizieren, und diese sowie deren Komposition mit Bezug auf den Körper zu interpretieren*. Das ist in diesem Fall aber fehleranfällig, weil die Differenz R^2- r^2 allein eher zum Flächeninhalt eines quadratischen als zum Flächeninhalt eines kreisförmigen Rahmens führt. Als die Lernenden im Projekt dem Exponenten 2 keinen Sinn zuweisen konnten, wurde R^2- r^2 kurzerhand als Tubusdicke gedeutet, die Exponenten also ignoriert. Für eine Umdeutung hätten die

Lernenden die Zeichenfolge ändern müssen, und den Term, wie etwa in algebraischen *Gleichungen* üblich, *ohne Bezug zum Zylindertubus äquivalent umformen* müssen. So wäre in der äquivalenten Formel $V = h \cdot (\pi R^2 \text{-} \pi r^2)$ die Klammer leichter als Flächeninhalt des Kreisrahmens interpretierbar und in der Formel $V = \pi R^2 h \text{ - } \pi r^2 h$ könnte man das Tubusvolumen als Differenz der Volumina von äußerem und innerem Zylinder deuten.

Die obigen drei Formeln zum Volumen des Zylindertubus sind äquivalent. Lernende, die *Formeln als Zeichenketten wahrnehmen, sehen die feste Gestalt und vergleichen die Formeln Zeichen für Zeichen.* Um Formeln mit unterschiedlichen Zeichenketten als äquivalent sehen zu können, reicht eine Art, Formeln zu erfassen, nicht aus.

Formel als Blaupause, als Rezept und als Ko-Veränderung

In manchen Aufgaben sollten die Lernenden Formeln zu einem geometrischen Körper aufstellen. Beim Volumen des Zylindertubus geschah dies dadurch, dass sie den inneren Zylinder aus dem äußeren entfernten. Die Lernenden erhielten am Ende die Formel $V_2 - V_1 = V$ als *Blaupause für einen Bauplan mit den physischen Objekten. Durch schrittweises Übersetzen einer verbalen Beschreibung des Herstellens des Differenzobjektes gelangten sie über graphische Darstellungen zur symbolischen Darstellung.* Zuweilen werden Zwischenschritte durch das Lesen der aktuellen Formelbeschreibung überprüft. Eine Formel als Blaupause und eine Formel als Text zu sehen, können sich im Bearbeitungsprozess gegenseitig kontrollieren.

Die Volumenformel als *Rezept* ist die übliche Funktion, die man Formeln zuweist. Ausgehend von messbaren Größen eines Körpers gelangen die Lernenden durch *Einsetzen und Berechnen* zum Maß einer anderen Größe, etwa zum Wert eines Zylindervolumens. Die Formel als Rezept wird dann als Rechenverfahren gedeutet.

Bei der *Ko-Veränderung* betrachten Lernende in einer Formel die veränderlichen Größen und konstanten Parameter und wie sie operativ zusammengesetzt sind. Dabei stehen die veränderlichen Größen in Beziehung zueinander und dies hat Konsequenzen darauf, ob Lernende auch die geometrischen Körper als variabel, aber mit einer geometrischen Kernstruktur ansehen können. Zuweilen sind es funktionale Beziehungen, die sich auch graphisch darstellen lassen. Das mathematische Verhaltensmuster besteht in der *Betrachtung von Kovariationen von Größen.*

Formel als Text zum erfindenden Lesen

Die noch fehlende Art eine Formel wahrzunehmen, trat in unseren Daten nur ansatzweise auf. Die Volumenformel $V = G \cdot h$ eines Zylinders etwa kann auch als Volumenformel für andere Körper gelesen werden, z.B. für Prismen oder Quader. In diesem Fall *wandelt* man den Körper gedanklich *erfindend um.* Genau solch eine Metamorphose deutete sich in den Daten als alternative Interpretation der obigen Volumenformel an.

Relevanz der „views on formula"

Diese acht rekonstruierten Sichtweisen können als diagnostisches Werkzeug genutzt werden. Damit Lernende angemessen mit Formeln umgehen können, müssen sie all diese Sichtweisen aktivieren und nutzen können, und zwar flexibel. Sie müssen auch für Bearbeitungsschritte notwendige Sichtwechsel erkennen können. Zuweilen sind bestimmte Sichtweisen dominant, insbesondere kann eine feste Zeichenfolge andere Sichtweisen von Formeln dominieren und so zu Fehldeutungen führen.

Literaturverzeichnis

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on school algebra* (S. 61–81). Kluwer Academic Press. https://doi. org/10. 1007/0-306- 47223-6_4

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, S. 145–152). Melbourne, Australia: PME.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Hrsg.), *Approaches to algebra* (S. 225–236). Kluwer Academic Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_17

Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P.H. M., & van Driel, J. H. (2021). Promoting insight into algebraic formulas through graphing by hand, *Mathematical Thinking and Learning, 23*(2), 125-144. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1765078

Leong, Y. H., Cheng, L. P., Toh, W., Y. K. Kaur, B., & Toh, T. L. (2021). Teaching students to apply formula using instructional materials: a case of a Singapore teacher's practice. *Mathematics Education Research Journal, 33*, 89–111. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00290-1

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*, 93–104. https://doi.org/10.1007/BF03217479

Schou, M.H., & Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 639–659. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10092-7