

GASTEIGER, Hedwig; JENSEN, Solveig; LÜKEN, Miriam;
PETER-KOOP, Andrea; GROMMÉ, Eva & NONTE, Sonja
Universität Osnabrück, Universität Bielefeld

„Abziehen mit Entbündeln“ und „Ergänzen mit Erweitern“: Eine vergleichende Studie zu den beiden Subtraktionsverfahren

Theoretischer und empirischer Hintergrund

Die KMK-Bildungsstandards 2022 sehen vor, dass Grundschul Kinder bis Ende Jahrgangsstufe 4 die Kompetenz erworben haben, schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation zu verstehen, den Algorithmus zu beschreiben, diesen geläufig auszuführen und ihn bei geeigneten Aufgaben anzuwenden (KMK, 2022). Dabei besteht in Deutschland Einigkeit darüber, wie die Verfahren der schriftlichen Addition und Multiplikation unterrichtet werden. Hinsichtlich der schriftlichen Subtraktion gibt es jedoch verschiedene Verfahren, die in der Fachdidaktik zum Teil kontrovers diskutiert werden (vgl. Padberg & Benz, 2020; Wittmann & Müller, 2018) und im Unterricht zum Einsatz kommen. Die Verfahren unterscheiden sich in Bezug auf die Differenzbildung - Abziehen oder Ergänzen - und in Bezug auf die Bewältigung des Stellenübergangs - Entbündeln, Erweitern oder Auffüllen (Details zu den Verfahren s. Padberg & Benz, 2011). Das Ergänzungsverfahren mit Erweitern war lange Zeit in Deutschland vorgeschrieben. Mittlerweile ist es den Schulen in fast allen Bundesländern freigestellt, welches Verfahren sie im Unterricht thematisieren. In Schulbüchern, die in Deutschland Verwendung finden, werden im Wesentlichen die Verfahren Abziehen mit Entbündeln und Ergänzen mit Erweitern thematisiert. In der Regel entscheiden die Lehrkräfte oder die Fachkonferenzen über das Verfahren, das an der Schule unterrichtet wird. Bislang gibt es vergleichsweise wenige Studien, die Erkenntnisse darüber liefern, welches Verfahren von den Kindern besser verstanden wird, besser beschrieben und besser geläufig ausgeführt werden kann (vgl. KMK, 2022). Die vorliegenden Studien liegen viele Jahre zurück (Brownell & Moser, 1949; Johnson, 1938), haben eine geringe Stichprobe für mindestens eine Vergleichsgruppe (Mosel-Göbel, 1988; Fiori & Zuccheri, 2005) bzw. berücksichtigen nicht den Unterricht im deutschsprachigen Kontext nach aktuellen fachdidaktischen Grundsätzen. Ziel des Forschungsprojekts SuVe (Subtraktionsverfahren in der Grundschule) ist es daher, eine wissenschaftliche Entscheidungsgrundlage für Lehrkräfte für die Auswahl des Verfahrens bereitzustellen. Deshalb soll unter einer Kontrolle des Unterrichts folgende Forschungsfrage mit einer Längsschnittstudie beantwortet werden:

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

Inwiefern zeigen sich Unterschiede im Beherrschen des schriftlichen Subtraktionsverfahrens und im Beschreiben bzw. Erklären des Algorithmus je nach unterrichtetem Verfahren (Abziehen mit Entbündeln vs. Ergänzen mit Erweitern) unmittelbar nach der Einführung sowie ein Jahr danach?

Forschungsdesign

Auswertbare Daten liegen (nach einer Bereinigung aller Daten, s.u.) von 415 Schülerinnen und Schüler aus Niedersachsen und NRW vor.

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern
Teilstichprobe	64	76
Niedersachsen	5 Klassen (5 Lehrkräfte)	6 Klassen (4 Lehrkräfte)
Teilstichprobe	167	108
NRW	9 Klassen (9 Lehrkräfte)	6 Klassen (5 Lehrkräfte)
Gesamt	231	184

Tabelle 1: Stichprobe SuVe

Die Studie (Ablauf s. Abb. 1) startete im Januar/Februar 2022 mit Vorerhebungen in Jahrgangsstufe 3.

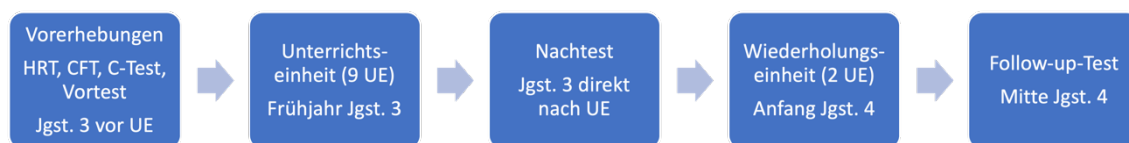


Abb. 1: Ablauf der Studie

Erhoben wurden die allgemeine Mathematikleistung (Heidelberger Rechen-test: Haffner et al., 2005), kognitive Grundfähigkeiten (CFT: Weiß & Osterland, 2013) und textintegratives Verständnis (C-Test: Bochnik, 2017). Zudem wurde ein Vortest mit Aufgaben zum Entbündeln und zur Konstanz der Differenz durchgeführt, um die für beide Verfahren erforderlichen Vorkenntnisse zu erheben. Um bestmögliche Vergleichbarkeit zwischen den Gruppen zu gewährleisten, wurde im bundeslandübergreifenden Forschungsteam zu jedem Verfahren eine Unterrichtssequenz à 9 Einheiten zur Erarbeitung des Verfahrens entwickelt. Beide Sequenzen fokussierten eine verständnisbasierte Thematisierung des jeweiligen Verfahrens mit Dienes-Material. Das Zahlenmaterial sowie die verwendeten Arbeitsblätter und Hausaufgaben wurden parallelisiert. Beide Sequenzen starteten mit einer Unterrichtseinheit (UE) zum Sichern der Vorkenntnisse (Entbündeln vs. Konstanz der Differenz). Es folgten fünf UE zur Erarbeitung der Verfahren mit Stellenübergängen, zwei UE zu Fehlern und spezifischen Schwierigkeiten und eine UE zur Fehlerkontrolle bzw. zum Abschätzen von Ergebnissen.

Die Sequenz gab Impulse und Arbeitsanweisungen genau vor. Die Lehrkräfte wurden an einem Nachmittag in die Unterrichtssequenz und in die Materialhandlungen eingewiesen. Zu verwendendes Material (Dienes-Material in Papierform für die Kinder, magnetisch für die Tafel) wurde in ausreichenden Mengen bereitgestellt. Unmittelbar nach der Unterrichtseinheit erfolgte ein Nachtest, bestehend aus 16 Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 und zwei offenen Aufgaben zum Beschreiben bzw. Erklären des Verfahrens. Der Test wurde so erstellt, dass je eine vergleichbare Anzahl an Aufgaben mit verfahrenstypischen Fehlern (Jensen & Gasteiger, 2019) enthalten war. Zu Beginn von Jgst. 4 führten die Lehrkräfte zwei ebenfalls geskriptete und parallelisierte Wiederholungsstunden durch. Mitte Jahrgangsstufe 4 erfolgte ein Follow-up-Test - analog zum Nachtest, allerdings mit 16 Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100.000.

Datenaufbereitung und -auswertung

Fehlende Daten wurden mit Mplus 8.5 (Muthén & Muthén, 1998–2020) imputiert. Fälle, bei denen entweder Testdaten zum HRT oder CFT-Test bzw. entweder zum Nachtest oder Follow-up-test fehlten, wurden vorher ausgeschlossen. Zur Überprüfung der Testgüte und der Messinvarianz werden mit Mplus konfirmatorische Faktorenanalysen durchgeführt unter Kontrolle der Gruppenzugehörigkeit (Verfahren). Im nächsten Schritt werden die binär kodierten Testitems (0=falsch, 1=richtig) als dichotomes Rasch-Modell (Steyer & Eid, 1993) in ConQuest (Wu et al., 1997) skaliert. Um zu überprüfen, ob Nach- und Follow-up-Test für beide Verfahrensgruppen ein faires Testinstrument darstellen, werden zudem DIF-Analysen durchgeführt. Es ist davon auszugehen, dass einzelne Items für die beiden Verfahrensgruppen unterschiedlich schwierig sind - also eine hohe Form von DIF aufweisen, da dies Teil der Testkonzeption war - es muss jedoch gewährleistet werden, dass der Test insgesamt fair für beide Gruppen ist. Im Anschluss werden die Daten mit Mehrgruppenanalysen (MGCFA, Asparouhov & Muthén, 2012) vergleichend analysiert, um Aussagen darüber treffen zu können, ob es Unterschiede zwischen den beiden Gruppen hinsichtlich des Beherrschens der schriftlichen Subtraktion gibt. Die beiden offenen Aufgaben zum Beschreiben und Erklären des Verfahrens werden mit qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) ausgewertet. Dazu wurde mit induktiver Kategorienbildung ein Bewertungsschema gebildet. Mittels der Kategorien mechanisch/falsch, unpräzise, präzise wird bewertet, inwiefern die beiden Kernideen der Verfahren „Entbündeln“ und „gleiche Veränderung von Minuend und Subtrahend“ in den Antworten enthalten sind. Die qualitativen Daten werden im Anschluss quantifiziert.

Ergebnisse und Ausblick

Erste Analysen zeigen, dass es gelungen ist, mit Vor-, Nach- und Follow-up-Test für beide Gruppen reliable und faire Testinstrumente zu entwickeln. So ist es mithilfe der Testinstrumente möglich, vergleichende Aussagen dazu zu treffen, wie gut die Schülerinnen und Schüler in beiden Gruppen das Verfahren der schriftlichen Subtraktion beherrschen. Die Auswertung der Kontrollvariablen zeigen signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen in der allgemeinen Mathematikleistung, nicht jedoch in den kognitiven Grundfähigkeiten und im C-Test. Die Daten befinden sich derzeit noch in der genaueren Auswertung. Ergebnisse werden bei der Tagung berichtet und diskutiert.

Literatur

- Asparouhov, T. & Muthén, B. O. (2012). *Multiple Group Multilevel Analysis*. Mplus Web Notes. <https://www.statmodel.com/examples/webnotes/webnote16.pdf>
- Bochnik, K. (2017). *Sprachbezogene Merkmale als Erklärung für Disparitäten mathematischer Leistung*. Waxmann.
- Brownell, W. A. & Moser, H. E. (1949). *Meaningful vs. mechanical learning: A study in grade III subtraction*. Duke Univ. Press.
- Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 323–331.
- Haffner, J., Baro, K., Parzer, P. & Resch, F. (2005): *Heidelberger Rechentest*. Hogrefe.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematikdidaktik* 40(2), 135–167.
- Johnson, J. T. (1938). *The relative merits of three methods of subtraction*. Teachers college, Columbia University.
- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Mosel-Göbel, D. (1988). Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschulern. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, 12(16), 554–559.
- Muthén, B. & Muthén, L. K. (1998-2020). *Mplus* (Version 8.5).
- Padberg, F. & Benz, C. (2020). *Didaktik der Arithmetik*. Spektrum.
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. Spektrum.
- Weiß, R. & Osterland, J. (2013). *CFT 1-R. Grundintelligenztest Skala 1*. Hogrefe.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band II: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Klett.
- Wu, M. & Adams, J. R., Wilson, M. R. (1997). *ConQuest*. Camberwell.