NIEDERQUELL, Julia & KEMPEN, Leander
Universität Greifswald

Die Verwendung von generischen Beispielen in Conjecturing-prozessen von Lernenden

Vermuten wird als ein zentraler Bestandteil von mathematischen Begründungsprozessen betrachtet und ist eng mit diesen verbunden (Reiss & Ufer, 2009). Es ist jedoch unklar, wie man Lernende beim Vermuten anleiten und unterstützen kann, damit sie ihre Vermutungen anschließend mathematisch begründen können (u.a. Cañadas et al., 2007). Speziell stellt sich die Frage, wie der Übergang vom Vermuten zum Begründen gestaltet werden soll (Morselli, 2006). In der mathematikdidaktischen Forschung wurde diesbezüglich die Verwendung von Beispielen bei Vermutungsprozessen auf universitärer Ebene hervorgehoben (ebd., 2006). In diesem Beitrag wird die Frage thematisiert, wie Lernende während eines 'Conjecturingprozesses' besonders beim Übergang zum Begründen mit generischen Beispielen umgehen. Dazu werden ausgewählte Ergebnisse einer Fallstudie vorgestellt und weitere Forschungsbedarfe aufgezeigt.

Schlüsselwörter: Conjecturing, generische Beispiele, Begründen

Theoretischer Hintergrund

Der Begriff Conjecturing umfasst Aktivitäten bei denen eine „als (plausible) Vermutung zu formulierende Regelmäßigkeit gesucht oder eine vorgegebene Vermutung […] geprüft und gegebenenfalls angepasst bzw. korrigiert wird.“ (Reiss & Ufer, 2009, S. 157). Die mentale Aktivität des Aufstellens von Vermutungen wird als Prozess beschrieben, der auf der Grundlage des vorhandenen Wissens geschieht. Hierzu werden in der Literatur verschiedene Modelle vorgestellt, die diesen Prozess mehrschrittig konzeptualisieren und in verschiedene Aktivitäten untergliedern (z. B. Cañadas & Castro, 2007). Conjecturing wird dabei mit dem Ziel beschrieben, die aufgestellte Vermutung anschließend zu begründen. Ein 'Conjecturing*prozess*' wird daher im vorliegenden Beitrag als übergreifender Prozess mit den Bestantdteilen Exploration, Conjecturing und Begründen betrachtet. Gerade der Übergang vom Conjecturing zum Begründen birgt jedoch für Lernende und Lehrende diverse Herausforderungen. Cañadas et al. (2007) sowie Morselli (2006) betonen, dass es noch unklar ist, wie dieser Übergang gestaltet werden sollte und wie man die Lernenden beim Conjecturing anleiten kann, damit sie ihre Vermutungen anschließend mathematisch begründen können. Eine Unterstützung könnte diesbezüglich der Einbezug generischer Beispiele darstellen, da diese als konkrete Beispiele so dargestellt werden, dass ihre Rolle als Träger des Allgemeinen deutlich wird (Leron & Zaslavsky,

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

2013). Den Lernenden wird so ermöglicht, sich mit den Schlüsselideen eines (generischen) Beweises in einem intuitiven und vertrauten Kontext auseinanderzusetzen. Mögliche Hindernisse wie der Anspruch auf Vollständigkeit der Allgemeinheit, Formalismus und Symbolik werden dabei noch ausgeblendet, was den Einstieg in einen Begründungsprozess und den Übergang zu einer formaleren Beweisstruktur erleichtern kann (ebd.). Das generische Beispiel könnte somit beim Übergang zum Begründen als Anstoß für den Begründungsprozess dienen und verallgemeinernde Schritte erleichtern.

Empirische Einblicke

Morselli (2006) untersuchte die Rolle von Beispielen beim Conjecturing und Beweisen in der elementaren Zahlentheorie. In der Studie wurde deutlich, dass die Generierung bzw. Betrachtung von Beispielen zwar das Erkennen von Mustern förderte, dies jedoch oft unzureichend für folgende Beweisprozesse war. Knipping und Reid (2010) arbeiteten heraus, dass die Überbetonung spezifischer Beispiele zu Schwierigkeiten führen kann. Lehrkräfte sollten allerdings die Lernenden darin unterstützen, die Rolle von Vermutungen und Beispielen beim mathematischen Argumentieren zu verstehen und besonders den Übergang von konkreten Beispielen hin zu allgemeinen Beweisen fördern. In der Forschung bzgl. der Verwendung von generischen Beispielen als didaktisches Mittel wird betont, dass die Auseinandersetzung mit diesen gewinnbringend sein kann (Leron & Zaslavsky, 2013). So kann zum Beispiel das Diskutieren oder selbständige Erzeugen eines generischen Beispiels dabei helfen, sich von der Wahrheit einer Aussage zu überzeugen sowie eine Beweisidee zu erhalten.

Forschungsinteresse und Fallstudie

Ausgehend von den beschriebenen theoretischen und empirischen Aspekten, wurde der weitere Forschungsbedarf im Bereich des Conjecturings herausgestellt und folgende Forschungsfragen formuliert: *1. Wie verwenden Lernende ein generisches Beispiel in einem Conjecturingprozess? 2. Wie beeinflusst die Verwendung eines generischen Beispiels den Conjecturingprozess von Lernenden?* Für diese Untersuchung wurde eine Fallstudie mit sechs Lernenden der neunten Klasse eines Gymnasiums durchgeführt. Die Lernenden wurden in einer Laborumgebung gefilmt, während sie in Zweiergruppen an einer Lernumgebung zum Conjecturing arbeiteten. Im Rahmen dieser Lernumgebung (zum Änderungsverhalten quadratischer Funktionen) durchliefen die Lernenden in einem lebensweltlichen Kontext zu Bremswegen (Faustformel: $f(x) = \frac{x^2}{100}$) einen Conjecturingprozess. Nach dem finalen Aufstellen einer Vermutung, wurden sie mit einem generischen Beispiel konfrontiert (s. Abb. 2). Die darin enthaltene Rechnung kann insofern als generisch betrachtet werden, als dass der Änderungsfaktor (grau markierte '2'), die Geschwindigkeit (40) und die Umformungen paradigmatisch für den allgemeinen Zusammenhang verstanden werden können: $f(a \cdot x) = \frac{(a \cdot \mathrm{x})^2}{100} = \frac{\mathrm{a}^2 \cdot \mathrm{x}^2}{100} = \mathrm{a}^2 \cdot \frac{\mathrm{x}^2}{100}$. Die Erstautorin beobachtete die Bearbeitung, meist ohne Eingriff. Die Aufnahmen wurden transkribiert und mit Fokus auf die Forschungsfragen mit einer zusammenfassende Inhaltsanalyse betrachtet (Mayring, 2015).

Ausgewählte Ergebnisse der Fallstudie

$f(x) = \frac{x^2}{100} \cdot m^2$ m = wie oft man vervielfacht

Abb 1.: Vermutung Gruppe 1

Im Folgenden wird die Bearbeitung von einer Gruppe (Tanja und Paula) exemplarisch vertieft, um die spezielle Rolle des generischen Beispiels in ihrem Conjecturingprozess zu verdeutlichen. Die Schülerinnen begannen ihre Exploration, indem sie verschiedene Beispiele konstruierten. Sie betrachteten drei verschiedene Fälle (Geschwindigkeit verdoppeln, verdreifachen und vervierfachen) und erkannten erste Muster der quadratischen Änderung der zugehörigen Bremswege. Tanjas und Paulas erster verallgemeinernder Schritt war die Formulierung von 'Regeln' für die einzelnen Fälle. Paula fiel dabei ein weiteres Muster auf, woraufhin sie eine allgemeinere Vermutung formulierte: „wie oft man die Geschwindigkeit multipliziert [...], die Zahl wird dann quadriert." Um dies weiter zu generalisieren, stellte die Gruppe eine (wie sie meinte) dazu passende Formel auf (Abb.1) und verifizierte diese mit zwei Beispielen. Da die beiden signalisiert hatten, dass sie sich sicher seien, dass ihre Vermutung immer gelte, erhielten sie das generische Beispiel.

Die sich hieran anschließende Episode interpretieren wir wie folgt: Tanja und Paula identifizierten die grau markierte '2' als Änderungsfaktor und erkannten den allgemeinen Charakter des Faktors im Sinne einer Variablen. Sie diskutierten daraufhin strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen dem Änderungsfaktor im generischen Beispiel und dem Faktor, den sie selbst als *m* (s. Abb. 1) bezeichnet hatten. Dabei argumentierten sie, dass ihre Formel zwar anders notiert, aber ebenso korrekt sei: „dann haben wir das da *(zeigt auf m)* außen hingeschrieben […] das geht auch". Sie ergänzten eine Klammer im generischen Beispiel, um zu zeigen, dass beide Formeln ihre ‚allgemeine Vermutung' korrekt ausdrücken. „Wir sagen nicht mal 2 hier, sondern danach mal 2 hoch 2", führte Paula als Argument für eine inhaltliche Übereinstimmung

$$f(40) = \frac{40^2}{100} = 16$$

$$f(2 \cdot 40) = \frac{(2 \cdot 40)^2}{100} = \frac{2^2 \cdot 40^2}{100} = 2^2 \cdot \frac{40^2}{100} = 2^2 \cdot 16$$

Abb. 2: generisches Beispiel

an, die ihre Überzeugung bzgl. der Gültigkeit der eigenen Vermutung stärkte. Die Gruppe setzte schließlich einen Term ihrer Beispielrechnung mit einem Term aus dem generischen Beispiel gleich. Die beiden bestätigten mit der daraus resultierenden wahren Aussage für sich, dass auch ihre Formel korrekt sein müsse und sahen anscheinend keine Notwendigkeit für weitere Verifizierungen. Das generische Beispiel stellte eine gewisse 'Autorität' dar, dessen Gültigkeit durch Gleichsetzen auf ihre Vermutung übertragen wurde.

Fazit

Die Analyse der Episode von Tanja und Paula zeigt erste Anhaltspunkte, dass generische Beispiele eine unterstützende Rolle beim Conjecturing spielen können. Im Beispiel wurde allerdings nur eine subjektive Überzeugung geleistet, eine mathematische Verifikation des Sachverhalts blieb weitestgehend aus. Es deutet sich an, dass Lernende auch im Conjecturingprozess von der aktiven Auseinandersetzung mit generischen Beispielen profitieren können, da diese z. B. das Diskutieren und Nutzen allgemeiner Strukturen als Argumente für die allgemeine Gültigkeit anregen. Zusätzlich zeigten sich in den anderen Gruppen weitere Funktionen des generischen Beispiels, wie die Anregung eines Verständnisses für das Änderungsverhalten. Insgesamt bieten diese ersten Erkenntnisse über die Funktionen generischer Beispiele im Conjecturingprozess einen wichtigen Ausgangspunkt für zukünftige Forschungen, insbesondere auch, um zu verstehen, ob und wie generische Beispiele für den Übergang zum Begründen eingesetzt werden können.

Literatur

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A Proposal of Categorisation for Analysing Inductive Reasoning. PNA: *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática 1*. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5(*1), 55-72.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 24-30.

Morselli, F. (2006). Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Vol. 4, pp. 185-192). PME.

Reid, D. A. & C. Knipping (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching.* Sense Publishers.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Lernen von Argumentationen, Begründungen und Beweisen. In *Jahresbericht der DMV* (Vol. 111, pp. 155–177). Deutsche Mathematiker-Vereinigung.