

FABIAN, Melina & KORTENKAMP, Ulrich
Potsdam

Fehlen, Brauchen, Nicht-Vorhandensein – Wie Lernende eine defizitäre Sichtweise auf negative Zahlen versprachlichen

Zu Beginn des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe werden die negativen Zahlen häufig als ‚neue‘ Zahlen eingeführt, die Situationen beschreiben sollen, welche zuvor mithilfe von natürlichen Zahlen und positiven Bruchzahlen nicht beschrieben werden konnten. Diese – gewissermaßen ‚nachträgliche‘ – Erweiterung des Zahlbegriffs ist für viele Lernende mit Herausforderungen verbunden, wenn sie versuchen, ihre bisher aufgebauten Vorstellungen und bekannten Gesetzmäßigkeiten auf die negativen Zahlen zu übertragen. Hinweise auf diese kognitiven Herausforderungen können auch im Sprachgebrauch der Lernenden gefunden werden: In einer Studie von Fabian (2023) verwendeten die Lernenden Sprachmittel wie ‚Minuszahlen‘ und ‚weniger als nichts‘, um zu erklären, was sie unter dem Begriff ‚negative Zahlen‘ verstehen. Es zeigte sich, dass die Sprache der Lernenden an vielen Stellen nicht anschlussfähig an die zentralen Grundvorstellungen ist und dass die kardinale Zahlvorstellung im Verständnis der Lernenden nach wie vor stark verankert zu sein scheint. Im Sinne eines sprachbildenden Vorstellungsaufbaus ist nun umgekehrt gefragt, mit welchen Sprachmitteln man den Aufbau von tragfähigen Vorstellungen unterstützen kann.

Zwei Vorstellungen, die für die Einführung negativer Zahlen als zentral gelten, finden sich in ihrer Funktion zur Beschreibung von *Zuständen* und *Veränderungen* (Kirsch, 1977). Während die Sachkontexte, die im Unterricht herangezogen werden, negative Zahlen häufig als Ausdruck von Zuständen (z.B. Temperaturen unter 0°C, Schulden) in den Blick nehmen, birgt besonders das Beschreiben von Veränderungen durch negative Zahlen großes Potenzial: Veränderungen als umkehrbare natürliche Prozesse (z.B. Wegnehmen, Rückwärtsgehen) sind den Lernenden bekannt und zudem leichter zu beschreiben und einfacher vorstellbar als ‚weniger als nichts‘. Sie können eine inhaltliche Deutung des Konzepts ermöglichen, die nicht auf einer ‚defizitären‘ Sichtweise beruht. Der vorliegende Beitrag setzt im Zusammenspiel aus sprachlichen und fachlichen Überlegungen an und soll einen Einblick in eine qualitativ-empirische Studie geben, die untersucht, welche sprachlichen Ressourcen zur Beschreibung von Zuständen und Veränderungen Lernende der 8. Klasse bereits aktivieren können. Mit dem Ziel, Anknüpfungspunkte für die sprachliche Unterstützung des Vorstellungsaufbaus zu identifizieren, wird die folgende Forschungsfrage gestellt: Wie beschreiben Lernende Zustände und Veränderungen, wenn sie Beispiele für die Verwendung und Funktion negativer Zahlen erläutern?

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Zum methodischen Vorgehen

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden insgesamt neun halbstrukturierte Einzelinterviews mit Lernenden der 8. Klasse aus fünf verschiedenen Brandenburger Gesamtschulen und Gymnasien geführt. Für alle Teilnehmenden war die Einführung der negativen Zahlen bereits in der 7. Klasse unterrichtet worden. Es ist also davon auszugehen, dass die Lernenden zum Interviewzeitpunkt auf vorab erworbene themenspezifische Sprachmittel zugreifen konnten und bereits Gelegenheit hatten, Vorstellungen zum Konzept der negativen Zahlen aufzubauen. Für diesen Beitrag wird nur der erste Teil des Interviews berücksichtigt: In diesem sollten die Lernenden erklären, was sie unter dem Begriff ‚negative Zahlen‘ verstehen, sowie Beispiele und Verwendungszwecke für negative Zahlen anführen.

Die Interviews wurden videographiert, transkribiert und qualitativ-inhaltsanalytisch ausgewertet. Den Ausgangspunkt der Analyse bildete die Unterscheidung zwischen *Zuständen* (Z) und *Veränderungen* (V), die als deduktive Kategorisierung an das Datenmaterial herangetragen wurde. Mit dem Ziel, die Beschreibungen der Lernenden weiter zu charakterisieren, wurden insgesamt acht Subkategorien induktiv entwickelt. Das Kategoriensystem wurde durch Doppelkodierungen der Interviewdaten validiert, wobei einzelne Unstimmigkeiten diskursiv aufgelöst wurden.

Zu den Ergebnissen: Einige Einblicke in Zustandsbeschreibungen

Insgesamt wurden für den ersten Interviewteil 50 Äußerungen der Lernenden kodiert; davon 36 in der Kategorie *Zustände* (Z) und 14 in der Kategorie *Veränderungen* (V). Die induktiv ergänzten Subkategorien können einen ersten Hinweis darauf geben, wodurch diese Zustands- und Veränderungsbeschreibungen gekennzeichnet waren: Für die kodierten Zustandsbeschreibungen wurden die vier Subkategorien *Nicht-Vorhandensein/Nicht-Haben* (Z1), *Fehlen/Brauchen* (Z2), *Negative Größe/Anzahl* und *Statische Repräsentation* (Z4) ergänzt; die Veränderungsbeschreibungen wurden mithilfe der vier Subkategorien *Zurückgeben/Neutralisieren* (V1), *Rechenoperation* (V2), *Operatoraspekt für Größenvergleich* (V3) und *Dynamische Repräsentation* (V4) weiter charakterisiert. Eine Analyse der kodierten Äußerungen gibt dann detaillierte Einblicke darin, wie die interviewten Lernenden Zustands- und Veränderungsbeschreibungen vornahmen, konkreter: welche Sprachmittel sie beim Beschreiben verwendeten, welche Situationen und Kontexte sie nutzten, inwiefern sich die kreierte Beispiele für das Beschreiben von Zuständen oder Veränderungen eigneten, an welchen Stellen die Lernenden Schwierigkeiten beim Erklären der Beispiele zu haben schienen

oder sie die Strategie (von Zustands- zu Veränderungsbeschreibung oder umgekehrt) wechselten.

In der Analyse der Interviews zeigte sich, dass die Lernenden eher Situationen konstruierten, in denen negative Zahlen zur Beschreibung von Zuständen genutzt werden (36 Kodierungen in Z), als solche, in denen Veränderungen durch negative Zahlen beschrieben werden. Nachfolgend sollen einige Beobachtungen, die für die gefundenen Zustandsbeschreibungen gemacht wurden, zusammengefasst und mit Transkriptauszügen veranschaulicht werden. Die Beispiele, die die Lernenden für die Verwendung und Funktion von negativen Zahlen erläuterten, sind vor allem durch Zustände des ‚Nicht-Vorhandenseins‘ oder des ‚Fehlens‘ gekennzeichnet. Äußerungen wie „du nimmst halt etwas, das nicht da ist“ (Z1) oder „[Man braucht negative Zahlen], um [...] darzustellen, dass etwas nicht vorhanden ist, sondern eben noch weniger“ (Z1) könnten darauf hindeuten, dass negative Zahlen im Verständnis der Lernenden als etwas konzeptualisiert werden, das eine ‚Abwesenheit‘ oder einen ‚Mangel‘ anzeigt. Negative Zahlen werden hier als Indikatoren für ‚das Fehlen‘ beschrieben; ein Zustand, der voraussetzt, dass sich ihre Bedeutung an konkreten, greifbaren Objekten aufzeigen bzw. an empirischen Sachverhalten verdeutlichen lässt. Auch mit der Äußerung „Also man bräuchte eigentlich etwas, was aber dann– was man nicht hat und das zeigt man damit an“ (Z2) wird eine defizitäre inhaltliche Deutung der negativen Zahlen versprochen. In einigen Äußerungen werden zudem negative Größen oder Anzahlen beschrieben, wie z.B. mit der folgenden Beispielsituation: „Und Lisa hat gerade absolut kein Geld, dann hat sie trotzdem minus zwanzig Geld“ (Z3). Die Vorstellung eines *absoluten* Nullpunkts (‚absolut kein Geld‘) scheint hier parallel (‚trotzdem‘) zu der Vorstellung von negativen Zahlen als Werkzeug zur Quantifizierung eines ‚Defizits‘ (‚minus zwanzig Geld‘) aufrechterhalten werden zu können.

Es zeigte sich außerdem, dass einige Lernende Beispielsituationen für die Verwendung negativer Zahlen kreierten (z.B. etwas kaufen, Geld ausgeben, etwas zurückgeben), die sich sehr gut als Veränderungen beschreiben ließen, diese Situationen dann aber mithilfe von Zustandsbeschreibungen charakterisierten. Ein Beispiel dafür liefert der folgende Interviewauszug:

- S: Hm, wenn man zum Beispiel was kaufen geht und man ha– man sich was kaufen möchte, das vielleicht 5 Euro kostet. Man hat aber nur 2 Euro zum Beispiel. [...] Und dann macht man halt Schulden, weil man 3 Euro halt noch braucht und das sind dann, wenn man’s halt ausrechnet, –3 Euro, die dann fehlen.
- I: Mhm, ok. Kannst du nochmal beschreiben, wo genau in deinem Beispiel die negativen Zahlen wichtig sind?
- S: Die sind da wichtig, weil die ja nicht da sind und die fehlen. Und weil die– Ja, ich weiß nicht genau. Äh– [4 sec] Weil man, wenn man jetzt zum Beispiel 5

Euro hätte, dann wären das halt Null, die fehlen würden. Weil da halt 3 Euro fehlen, sind das dann -3 Euro, weil die ja nicht da sind und man die bräuchte.

Bei der in diesem Transkriptauszug konstruierten Situation handelt es sich um eine Zustandsänderung, die z. B. auch durch die Rechenoperation $2 - 5 = -3$ beschrieben werden könnte. Der oder die Lernende bezieht sich hier ausschließlich auf Zustände (z. B. ‚man hat 2 Euro‘, ‚man braucht 3 Euro‘) und versucht, sie sprachlich miteinander zu verknüpfen, um die Veränderung als Ganzes zu beschreiben. Er oder sie scheint Schwierigkeiten zu haben, die Rolle der negativen Zahlen im selbst gewählten Beispiel nur über den Ausdruck von Zuständen zu erklären, was sich in mehreren Abbrüchen, Reformulierungen (‚die sind nicht da‘, ‚die fehlen‘, ‚die bräuchte man‘) und der geäußerten Unsicherheit (‚ich weiß nicht genau‘) widerspiegeln könnte. Die negative Zahl -3 scheint dabei mit dem Zustand des ‚Nicht-Vorhandenseins‘ oder ‚Fehlens‘ identifiziert zu werden, was zu fehlerhaften Situationsbeschreibungen führt (wie in der doppelten Negierung ‚das sind -3 Euro, die fehlen‘).

Zur Diskussion

In den Interviews ließ sich beobachten, dass die Lernenden selbst dann auf Zustandsbeschreibungen zurückgriffen, wenn sie Beispielsituationen kreierten, in denen durch negative Zahlen Veränderungen beschrieben werden. Dabei zeigte sich eine Herausforderung, die sowohl kognitiver als auch sprachlicher Natur ist: Das Nicht-Vorhandensein von Objekten und Anzahlen ist schwer vorstellbar und kann folglich auch schwer (als Zustand) beschrieben werden. Eine mögliche Erklärung hierfür könnte sein, dass den Lernenden die passenden Sprachmittel fehlen, um Veränderungen zu beschreiben – was zum Versuch einer Zustandsbeschreibung führen könnte, auch wenn diese für die jeweilige Situation nicht tragfähig sein mag. In den Interviewanalysen fanden sich zudem Anzeichen dafür, dass das Konzept der negativen Zahlen im Verständnis der Lernenden auf einer defizitären inhaltlichen Deutung aufbaut. Ein möglicher Ausweg könnte das Angebot von Sprachmitteln im Operatoraspekt sein, wie im Vortrag ausgeführt wird.

Literatur

- Fabian, M. (2023). ‚Less than nothing‘ – a study on student’s lexical means for negative numbers. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Hrsg.), *Proc. 46th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 315–322). PME46.
- Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik*, 5, 87–101.