HELLWIG, Lukas & GEISLER, Sebastian
Potsdam

Konzeption eines Testinstruments zur Erhebung von Grundvorstellungen im Themengebiet Folgen und Grenzwerte

Der Themenbereich Folgen und Grenzwerte ist von zentraler Bedeutung in der Analysis (Forster, 2016). Auch ist er in den Anforderungen zur Gestaltung des Lehramtsstudiums aller Sekundarstufen direkt erwähnt (Kultusministerkonferenz, 2019, S. 39). Dabei zeigen Studien immer wieder, dass Fehlvorstellungen und Fehlkonzepte in diesem Themengebiet verbreitet und schwer zu verändern sind (Ostsieker, 2020; Skutella & Weygandt, 2021).

Derartige Konflikte lassen sich mithilfe von Grundvorstellungen lösen, denn sie bilden das vermittelnde Element von mathematischer Stoff- zur individuellen Verständnisebene (vom Hofe, 1995). Sie sind damit zentral für das Verständnis mathematischer Inhalte. Grundvorstellungen lassen sich schon im Laufe eines Semesters durch gezielte Intervention in geringem Maße beeinflussen (Ableitinger et al., 2022), wobei für einen rechtzeitigen Eingriff eine Diagnose ihrer Defizite notwendig ist. Dieser Beitrag skizziert die Erstellung eines Instruments zur Diagnostik bezüglich der Grundvorstellungen zu Folgen und Grenzwerten.

Grundvorstellungen zu Folgen und Grenzwerten

Bei der Erstellung des Instruments wurden die von Greefrath et al. (2016) beschriebenen normativen Grundvorstellungen zu Folgen und Grenzwerten zugrunde gelegt. Die Autoren unterscheiden als Grundvorstellungen für Folgen die *Reihenfolgenvorstellung*, *Zuordnungsvorstellung*, *Kovariationsvorstellung* und die *Objektvorstellung* (ebd., S. 94 ff.). Die Reihenfolgenvorstellung beschreibt eine Folge „als Aneinanderreihung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge“ (ebd., S. 94). Die Zuordnungsvorstellung betont eine Folge als Abbildung aus den natürlichen Zahlen in eine (unbestimmte) Bildmenge (ebd., S. 95 f.). Die Kovariationsvorstellung beschreibt, „wie sich Werte von einem Folgenglied zum nächsten ändern.“ (ebd., S. 96). Die Objektvorstellung stellt die Sicht auf eine Folge als mathematisches Objekt, mit dem operiert werden kann, heraus (vgl. ebd., S. 96).

Für Grenzwerte beschreiben sie die *Annäherungsvorstellung*, *Umgebungsvorstellung* und *Objektvorstellung* (ebd., S. 106 ff.). Die Annäherungsvorstellung beschreibt ein dynamisches mentales Abgehen der Folgenglieder, die sich dem Grenzwert sukzessive annähern (vgl. ebd., S. 105 f.). Die Umgebungsvorstellung liegt vor, wenn Studierende argumentieren, dass für jede beliebig kleine Umgebung um den Grenzwert unendlich viele Folgenglieder in ihr enthalten sind (vgl. ebd., S. 105). Die Objektvorstellung betont die

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Sicht auf einen Grenzwert als mathematisches Objekt, das „durch eine Folge konstruiert oder definiert wird“ (ebd., S. 106).

Forschungsziele

Zunächst soll der Beitrag beispielhaft die Übersetzung der Grundvorstellungen in ihnen entsprechende Items demonstrieren. Dabei steht das erste Forschungsziel im Mittelpunkt: Die Operationalisierung von Grundvorstellungen zu Folgen und Grenzwerten im Hochschulkontext.

Dann soll der Beitrag erste Resultate zum zweiten Forschungsziel aufführen, der Validierung des Instruments. Er beantwortet die Frage: Lassen sich die in erster Iteration erstellten Items anhand ihrer Sichtstruktur validieren?

Instrumentkonstruktion

Bei der Konstruktion des Instruments wurden alle oben genannten normativen Grundvorstellungen berücksichtigt. Da diese für die Anwendung im Unterricht mit Kompetenzvorschlägen für Schüler*innen formuliert wurden (Greefrath et al., 2016), mussten sie für die hier beschriebene Studie dem Hochschulkontext angepasst werden. Im Folgenden wird dies anhand zweier Beispielitems demonstriert.

So fehlt zum Beispiel bei der Objektvorstellung von Grenzwerten die Nutzung der Beziehung des Grenzwerts als Funktion konvergenter Folgen. Aus dieser lassen sich zahlreiche Eigenschaften (beispielsweise die eindeutige Zuordnung eines Grenzwerts zu einer konvergenten Folge) schließen. Dies ist im Schulkontext nicht weiter verwunderlich, da Existenz und Eindeutigkeit von Grenzwerten konvergenter Folge zugunsten des Anwendungsbezugs der Grenzwertberechnung in den Hintergrund treten.

Im Hochschulkontext bemüht man sich im Sinne der Wissenschaft Mathematik die Beweisbedürftigkeit dieser Eigenschaften herauszustellen und die Grenzen dieser Aussagen zu beleuchten. Insofern muss das Wissen um diese Eigenschaften des Grenzwerts Teil der operationalisierten Kompetenzen sein. Entsprechend ist das in Abbildung 1 dargestellte Item formuliert.

Aufgabe 60
Gibt es konvergente (reelle) Folgen ohne einen (reellen) Grenzwert?
- Ja, wenn man beim Grenzübergang durch 0 teilen würde.
- Ja, weil es viel mehr konvergente Folgen als reelle Zahlen gibt.
- Nein, da die Konvergenzdefinition die Existenz eines Grenzwertes vorschreibt.
- Nein, da man stets das letzte Glied einer Folge als Grenzwert definieren kann.

Abb. 1: Beispielitem zur Erhebung der ausgebauten Objektvorstellung eines Grenzwerts

In diesem Item deutet der zweite Distraktor auf die Fehlvorstellung einer bijektiven Zuordnung von konvergenten Folgen und Grenzwerten hin. Diese ist insofern problematisch, als dass ein Weg der Konstruktion reeller Zahlen über Äquivalenzklassen von (Cauchy-)Folgen genau dieser Fehlvorstellung widerspricht. Der vierte Distraktor greift die Fehlvorstellung auf, dass der Grenzwert das letzte Glied der Folge sei (Ableitinger et al., 2022). Der Erste dagegen beleuchtet die begriffliche Unterscheidung zwischen bestimmt divergenten und konvergenten Folgen.

Einige Kompetenzen sind aber auch in den Hochschulkontext direkt übertragbar. Das Wissen um Folgeneigenschaften wie Monotonie gehört zum Beispiel dazu. Diese wurde vor allem der Kovariationsvorstellung zugeordnet, weil die Kompetenz die Entwicklung der Folgenglieder im Verlauf der Folge anspricht. In diesem Sinne wurde das in Abbildung 2 dargestellte Item formuliert.

Aufgabe 21
Welche Aussage trifft auf eine streng monoton wachsende Folge zu?
- Verringere ich den Folgenindex n, so verringert sich der Wert des entsprechenden Folgenglieds a_n.
- Vergrößere ich den Folgenindex n, so verringert sich der Wert des entsprechenden Folgenglieds a_n.
- Verringere ich den Folgenindex n, so vergrößert sich der Wert des entsprechenden Folgenglieds a_n.
- Vergrößere ich den Folgenindex n, so vergrößert sich der Wert des entsprechenden Folgenglieds a_n oder bleibt gleich.

Abb. 2: Item zur Erhebung der Kovariationsvorstellung im Kontext der Monotonie

Dieses Item spricht die Kovariationsvorstellung ganz explizit an, da die Antwortmöglichkeiten nach den Konsequenzen der Veränderung des Folgenindex fragen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 96). Die Herausforderung des Items besteht darin, die korrekte mentale Repräsentation vom Verändern des Folgenindex und Wert des Folgenglieds gleichzeitig abzurufen und mit der Erwartung an monotone Folgen abzugleichen. Darüber hinaus ist die Einschränkung auf strenge Monotonie eine zusätzlicher Wissenstest, da die mögliche Gleichheit im vierten Distraktor dadurch ausgeschlossen wird.

Validierung des Instruments

Neben den Gezeigten wurden 64 weitere Items entwickelt. Um deren Sichtvalidität zu prüfen, wurden die Items drei Experten mit Publikationen zu Grundvorstellungen zur Zuordnung zu einzelnen Grundvorstellungen vorgelegt. Diese beurteilten in einem Blind-Rating die in den Items abgebildeten Grundvorstellungen und deren Eignung zur Diagnostik.

Bei der Zuordnung der Items zu den Grundvorstellungen lag Inter-Rater-Übereinstimmung für Fleiss' Kappa (Davies & Fleiss, 1982) bei $\kappa = 0{,}54$. Legt man die Orientierungswerte von Landis und Koch (Landis & Koch, 1977) zugrunde, entspricht das einer mittleren Zustimmung.

In Auswertung dieser Ratings wurden vier Items verworfen, 23 umkodiert. Jede Grundvorstellung blieb mit mindestens vier Items vertreten. Nur unter den 27 Items, welche der Zuordnungsvorstellung zugeordnet wurden, gab es Redundanz. Diese soll im weiteren Verlauf der Validierung empirisch gestützt abgebaut werden.

Ausblick

Für die weitere Verbesserung des Instruments soll dieses im Jahr 2024 mit Studierenden pilotiert werden. Ziele der Folgeuntersuchungen sind, für einzelne Grundvorstellungen redundante Items zu identifizieren, deren Diagnosekraft mittels Faktoranalysen zu prüfen und empirische Schwierigkeitswerte der Items zu berechnen, um letztlich eine Rasch-Skalierung zu ermöglichen. Das erstellte Testinstrument befindet sich damit noch in der Anfangsphase eingehender Überprüfung und Verbesserung, bei deren Gelingen es zu einem handhabbaren und zuverlässigen Diagnosewerkzeug zu werden verspricht. Mit dem Instrument könnten nicht nur konzeptbezogene Rückmeldungen für Studierende und Lehrende im Semesterverlauf ermöglicht werden, sondern dies erlaubte in zukünftigen Studien auch den Einsatz zur Prädiktion von Leistung und Studienerfolg.

Literatur

Ableitinger, C., Götz, S., & Steinbauer, R. (2022). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. *mathematica didactica, 45*, 1–21.

Davies, M., & Fleiss, J. L. (1982). Measuring Agreement for Multinomial Data. *Biometrics, 38*(4), 1047–1051. https://www.jstor.org/stable/2529886

Forster, O. (2016). *Analysis 1* (12. Aufl.). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11545-6

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer.

Kultusministerkonferenz. (2019). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung*. Sekretariat der Kultusministerkonferenz. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics, 33*(1), 159–174. https://about.jstor.org/terms

Ostsieker, L. (2020). *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs*. Springer. http://www.springer.com/series/11974

Skutella, K., & Weygandt, B. (2021). Grenzwert und Stetigkeit – Was am Ende (des Studiums) übrig bleibt. In B. Girnat (Hrsg.), *Mathematik lernen mit digitalen Medien und forschungsbezogenen Lernumgebungen* (S. 97–127). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32368-4_5

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Springer.