

Einflussfaktoren beim Validieren von Allaussagen

Das Validieren mathematischer Aussagen, also das Einschätzen, ob eine Aussage in einer Rahmentheorie gültig ist, ist eine zentrale mathematische Tätigkeit. Entsprechend wird „das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen“ (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 14) nicht nur in den deutschen Bildungsstandards, sondern auch international als Teil mathematischer Argumentationskompetenz betont (z. B. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). Insbesondere für den Studienbeginn sind entsprechende Kompetenzen bedeutsam, da das Untersuchen und Beweisen von Aussagen einen großen Teil des Mathematikstudiums ausmachen. Erfolgsquoten beim Validieren von Aussagen variieren zwischen etwa 30 und 100 % (z.B. Barkai et al., 2002; Ko, 2011; Zeybek Simsek, 2021). Gründe für diese große Varianz werden unter anderem in Kontextmerkmalen wie der Gültigkeit der Aussage vermutet (z.B. Barkai et al., 2002, Zeybek Simsek, 2021). Lernende scheinen insbesondere bei der Validierung von falschen Aussagen (z.B. Zeybek Simsek, 2021) Schwierigkeiten zu haben. Als eine Erklärung hierfür wird genannt, dass in der Schule bzw. Universität überwiegend dazu aufgefordert wird, wahre (All-)Aussagen zu beweisen und seltener falsche Aussagen zu widerlegen (Buchbinder & Zaslavsky, 2007; Ko, 2011). Jedoch gibt es auch Studien, die keinen erkennbaren Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der Aussage und den Erfolgsquoten beim Validieren fanden (Ko, 2011). Auch die *Vertrautheit* mit Aussagen wird als wichtiger Einflussfaktor auf die Leistung bei beweisbezogenen Aktivitäten angenommen (z.B. Hanna, 1989; Stylianides, 2007). Neben Kontextmerkmalen wurde in Studien auch untersucht, *wie* Lernende beim Validieren mathematischer Aussagen vorgehen und welche *Arten von Argumenten* (wie empirische Argumente, generische oder traditionelle Beweise) sie konstruieren. Empirische Argumente werden zur ersten Exploration besonders häufig genutzt (z.B. Buchbinder & Zaslavsky, 2007; Ko, 2011). Teilweise versuchen Lernende auch Muster oder Strukturen zu identifizieren, eher selten werden deduktive Argumente herangezogen (z.B. Ko, 2011). Inwiefern das Lesen verschiedener Arten von Argumenten Einfluss auf das Validieren von Aussagen hat, wurde bisher nicht systematisch untersucht. Da mathematische Beweise das zentrale Kriterium für die Gültigkeit einer mathematischen Aussage sind, sollte das Lesen und Validieren solcher Argumente hier einen positiven Einfluss haben.

Erkenntnisinteresse

Dieser Beitrag untersucht den Einfluss der *Art der Aussage* (Gültigkeit und Vertrautheit) sowie den des Lesens bzw. Konstruierens verschiedener *Arten von Argumenten* (empirische Argumente, generische und traditionelle Beweise) auf das Validieren mathematischer Allaussagen. Als Teil des abgeschlossenen Dissertationsprojekt (Damrau, 2023) wurden konkret folgende Fragen untersucht:

- Wie erfolgreich validieren Studienanfänger*innen mathematische Allaussagen und inwiefern hängt dies von der *Art der Aussage* ab?
- Inwiefern beeinflusst das Lesen bzw. Konstruieren unterschiedlicher *Arten von Argumenten* den Erfolg beim Validieren von Allaussagen?

Methodik

In zwei Erstsemestervorlesungen wurde im November 2020 online eine experimentelle Fragebogenstudie mit 430 Lehramts- und Mathematikstudierende einer deutschen Universität in Nordrhein-Westfalen durchgeführt. Die Teilnehmenden bearbeiteten nacheinander fünf Allaussagen (zwei von ihnen aus der Geometrie und aus der Schule bekannt, zwei von ihnen aus der elementaren Zahlentheorie und unbekannt und eine falsch). Sie wurden zufällig in vier Gruppen eingeteilt und erhielten davon abhängig keine Argumente zur Begründung der Aussagen (Gruppe A), empirische Argumente in Form von Beispielen (Gruppe B), generische Beweise (Gruppe C) bzw. traditionelle Beweise (wie sie typischerweise von Mathematiker*innen konstruiert würden, Gruppe D). Die Teilnehmenden lasen die Aussagen sowie die ggf. dazugehörigen Argumente und wurden dann gebeten, die Gültigkeit der Aussagen einzuschätzen. Die Antwortoptionen boten die Möglichkeit sowohl absolute als auch relative Sicherheit bei der Validierung auszudrücken (Weber & Mejía Ramos, 2015). Die Teilnehmenden der Gruppe A wurden dazu aufgefordert, selbst zu begründen, warum die Aussagen richtig/falsch sind. Diese Begründungen wurden mit Hilfe eines Kodierungsschemas basierend auf Harel und Sowder (1998) kodiert. Für die Auswertung der Daten wurden neben deskriptiven Analysen logistische Regressionsanalysen mit CLMMs (kumulative Mischmodelle für ordinale Daten) genutzt. Für multiples Testen wurde mit der Holm's Methode korrigiert.

Ergebnisse

Die Lösungsquoten beim Validieren der Aussagen lagen zwischen ca. 45 und 70 % bzgl. absoluter Sicherheit. Etwas unerwartet waren die geringen Lösungsquoten bzgl. einer der vertrauten Aussagen – der Satz des Pythagoras – bei dem sich nur knapp 50 % absolut sicher waren, dass dieser gültig ist.

Die durchgeführten Regressionsanalysen ergaben insgesamt dennoch, dass die Vertrautheit mit der Aussage einen positiven Effekt auf den Erfolg beim Validieren der Aussagen hatte. Die falsche Aussage wurde wie vermutet seltener korrekt validiert als die wahren Aussagen. Studienteilnehmende, die empirische Argumente erhielten, validierten zudem erfolgreicher als Teilnehmende, die keine Argumente (oder Beweise) erhielten. Generische Beweise schienen einen ähnlichen, wenn auch etwas kleineren positiven Effekt zu haben, der jedoch nicht signifikant wurde. Das Lesen von traditionellen Beweisen hatte hingegen keinen positiven Effekt. Während die Teilnehmenden der Gruppe A bei den aus der Schule nicht bekannten Aussagen überwiegend empirische oder Pseudoargumente, wie etwa das Wiederholen der Aussage nutzten, bezogen sie sich bei den vertrauten Aussagen vor allem auf *Autoritäten* wie die Schule oder darauf, dass es sich um eine Regel handelt. Auch hier wurden häufig Pseudoargumente angegeben. Die meisten Teilnehmenden nutzten vor allem Gegenbeispiele, um die Gültigkeit der falschen Aussage zu widerlegen. Der Grad der Sicherheit, mit dem die Teilnehmenden die Aussagen validierten (absolut vs. relativ), scheint mit der Art der genutzten Argumente zusammenzuhängen. Die (wenigen) Teilnehmenden, die (unvollständige) deduktive Argumente heranzogen, waren sich fast alle absolut sicher, dass die Aussagen gültig sind, wohingegen die Mehrheit der Teilnehmenden, die empirische Argumente nutzten lediglich relativ von der Gültigkeit überzeugt waren.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie bestätigen experimentell Annahmen (z.B. Buchbinder & Zaslavsky, 2007; Hanna, 1989; Ko, 2011), dass sowohl die Vertrautheit mit der Aussage als auch deren Gültigkeit einen Einfluss auf das Validieren von Aussagen hat. Berücksichtigt werden muss hier, dass sich bei den Aussagen auch der Inhaltsbereich unterschied, welcher ebenfalls einen Einfluss haben kann. Dass der Satz des Pythagoras als eine der vertrauten Aussagen von vielen Studierenden nicht korrekt validiert wurde, könnte der Tatsache geschuldet sein, dass dieser in natürlicher Sprache formuliert war und von den Studierenden nicht erkannt wurde. Basierend auf den Ergebnissen sollten Lernende häufiger die Gelegenheit bekommen, auch falsche Aussagen zu validieren. Vor allem das Lesen von empirischen Argumenten (und mit Einschränkung generischen Beweise) hatte einen positiven Effekt auf das Validieren von Allaussagen. Grund hierfür könnte sein, dass das Betrachten von Beispielen die Studierenden dabei unterstützt, die Aussagen besser zu verstehen und sie dadurch eine bessere Intuition für deren Gültigkeit entwickeln. Dies sollte in der Praxis hinsichtlich der Exploration von Aussagen berücksichtigt werden. Anders als erwartet, hatte das Lesen

von traditionellen Beweisen *keinen* positiven Einfluss auf das Validieren von Allaussagen. Ursache hierfür könnte sein, dass Studierende Schwierigkeiten haben, Beweise oder ihre Funktion zu verstehen (z.B. Conradie & Frith, 2000). Dies sollte in zukünftigen Studien weiter untersucht werden. Auch wenn nur wenige Studierende deduktive Argumente konstruiert haben, ging das Konstruieren solcher Argumente mit einer absoluten Sicherheit bzgl. der Gültigkeit der Aussage einher, das Nutzen empirischer Argumente dagegen überwiegend nur mit relativer Sicherheit. Dies unterstreicht die Bedeutung dieser Differenzierung beim Untersuchen von Validierungskompetenzen, insbesondere bzgl. der Nutzung verschiedener Arten von Argumenten.

Literatur

- Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 57–64). PME.
- Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Student's ways of determining the validity of mathematical statements. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Hrsg.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 561–570).
- Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 225–235.
- Damrau, M. (2023). *Understanding the generality of universal statements. An experimental study at the transition from school to university*. Springer.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20–23.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (Vol. 7, S. 234–283). American Mathematical Society.
- Ko, Y.-Y. (2011). True or false? Pre-service secondary mathematics teachers' strategies for evaluating statements. In L. R. Wiest & T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 478–486). University of Nevada, Reno.
- Kultusministerkonferenz (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (Hrsg.). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Weber, K., & Mejía Ramos, J. P. (2015). On relative and absolute conviction in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 35(2), 15–21.
- Zeybek Simsek, Z. (2021). "Is it valid or not?": Pre-service teachers judge the validity of mathematical statements and student arguments. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 26–42.