Judith AMES, Landau

Musterfolgeaktivitäten für GrundschülerInnen und Studierende

Mathematisches Tun hängt eng mit dem Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen zusammen. So schreibt beispielsweise Timo Leuders: „Die Geometrie beschäftigt sich mit den Strukturen der Form und des Maßes. Die Logik thematisiert die Strukturen des Schließens. Und als Arithmetik bezeichnen wir das Teilgebiet der Mathematik, das die Strukturen in den natürlichen Zahlen erforscht.“ (Leuders, 2010, S. 7)

Anlass der Untersuchung und Fragestellungen

Die Auffassung von Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen findet sich auch in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich in der Formulierung der Leitidee „Muster und Strukturen“ wieder. Schülerinnen und Schüler sollen unter anderem „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen [können]“ (KMK 2005, S. 10). Deutlich wird, dass hier inhaltlich sowohl die Arithmetik als auch die Geometrie angesprochen werden. Der Mathematikunterricht der Grundschule wird in den Bildungsstandards nicht mehr klassisch in die Bereiche Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen unterteilt. In der Ausbildung von Studierenden für das Lehramt Primarstufe werden Lehrveranstaltungen jedoch nach wie vor häufig genau so unterteilt. Übergreifende Muster und Strukturen werden von Studierenden dabei nicht immer bewusst wahrgenommen.

Mustererkennungs- und Strukturierungsfähigkeiten von Grundschulkindern sind mittlerweile stärker in den Fokus mathematikdidaktischer Forschung gerückt. Miriam Lüken untersuchte und bestätigte beispielsweise den Einfluss von Kompetenzen bezüglich Mustern und Strukturen auf das Rechnenlernen und zeigt, dass ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen eine wichtige Basiskompetenz ist. (vgl. Lüken, 2012)

Untersuchungen zu (elementaren) Mustererkennungs- und Strukturierungsfähigkeiten von Studierenden sind noch rar. Inwiefern sind zum Beispiel Studierende in der Lage, die oben genannte Forderung in den Bildungsstandards zu erfüllen?

Im Folgenden möchte ich einen schriftlichen Test vorstellen, der mit Studierenden für das Lehramt Primarstufe durchgeführt wurde. Damit soll untersucht werden, wie Studierende die Struktur einer vorgegebenen Musterfolge beschreiben und wie sie diese fortsetzen.

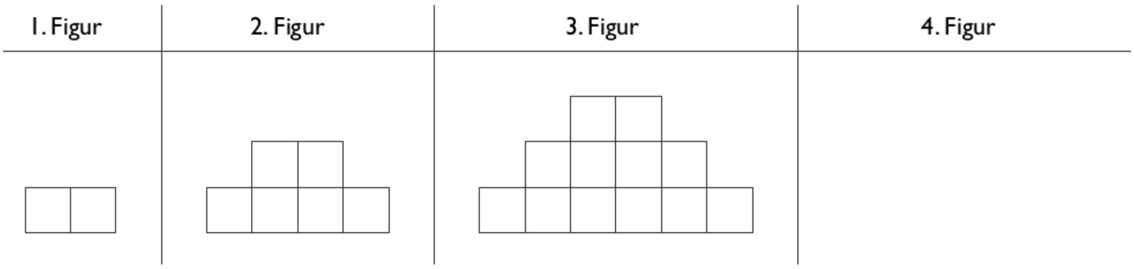
Die Auswertung des Tests ist von folgenden Fragen geleitet:

- Welche Muster und Strukturen werden wahrgenommen und beschrieben?
- Wie lassen sich Strukturierungen erkennen?
- Welche Aufgabenstellungen bewirken einen Wechsel der Strukturierung?
- Welche Rolle spielt mathematisch-formale Sprache?

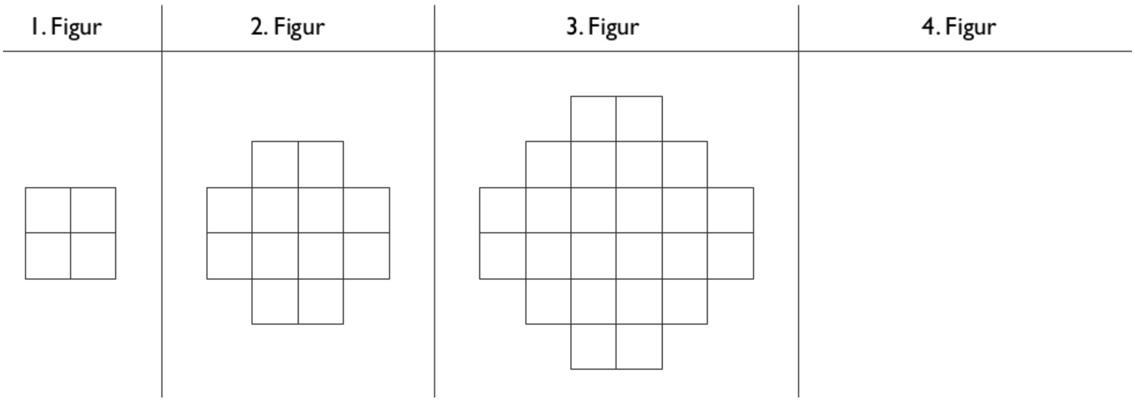
Methodisches Vorgehen und Testbeschreibung

Der Test wurde mit 308 Studierenden in zwei verschiedenen Lehrveranstaltungen durchgeführt. Die Studierenden wurden aufgefordert, drei vorgegebene Figuren (figurierte Zahlen) zeichnerisch fortzusetzen und ihre Art der Strukturierung in Textform und arithmetisch durch Terme zu beschreiben, die die Anzahl der Kästchen pro Figuren erkennen lassen. Eingesetzt wurden zwei verschiedene Musterfolgen.

Musterfolge a:



Musterfolge b:



An der Untersuchung nahmen sowohl Studierende im Bachelorstudiengang als auch Studierende im Masterstudiengang für das Lehramt Primarstufe teil. Sie wurde anonym durchgeführt. Es wurde lediglich das Geschlecht der teilnehmenden Studierenden und die Selbsteinschätzung ihrer Mathematikkenntnisse erfasst und erfragt, ob sie Mathematik als Haupt- oder Pflichtfach studieren.

Testauswertung und erste Schlussfolgerungen

Auch wenn drei vorgegebene Figuren mathematisch noch keine Folge definieren, so wurde die im Test angedeutete Musterfolge von den Studierenden allergrößtenteils trotzdem in der intendierten Form aufgefasst und entsprechend fortgesetzt.

Die von den Studierenden in Textform beschriebenen Möglichkeiten, wie man aus der dritten Figur die vierte Figur erhalten kann, lassen sich bei beiden Musterfolgen im Wesentlichen in einige wenige Kategorien einteilen. Die Vielfalt der notierten arithmetischen Terme bis zur vierten Figur, die aus Sicht der Studierenden die Anzahlbestimmung der Kästchen pro Figur beschreiben, ist dagegen sehr viel größer. Aus mathematischer Sicht sind beide Beschreibungen zudem nicht immer strukturgleich, lassen daher an dieser Stelle keine Rückschlüsse auf die Art und Weise der Strukturierung durch die Studierenden zu. Fügt eine Person in Musterfolge a an die dritte Figur beispielsweise unten eine weitere Zeile hinzu, um die vierte Figur zu erhalten, so findet sich in der arithmetischen Beschreibung deswegen nicht notwendigerweise ein Term „+8 (Kästchen)“, der die Anzahl der hinzugekommenen Kästchen repräsentieren würde.

Stellten die Studierenden Terme mittels Variablen dar, begünstigte dies nur in seltenen Fällen eine korrekte verallgemeinernde Aussage über die Anzahl der Kästchen pro Figur.

Die visuelle Darstellung wurde in den allermeisten Fällen nur genutzt, um die Anzahl der Kästchen der ersten vier Figuren zu bestimmen. Weitere Fragestellungen zur Fortsetzung der Folge wurden dann meist auf rein arithmetischer Ebene bearbeitet und die ursprüngliche Veranschaulichung der Musterfolge wurde außer Acht gelassen und nicht mehr als Hilfestellung genutzt.

Studierenden, die die Anzahl der Kästchen in der vierten Figur korrekt angeben konnten, gelang es nicht immer, auch die Anzahl der Kästchen in der zehnten Figur korrekt zu ermitteln. Eine entsprechende Gesetzmäßigkeit wurde durch die Angabe der Anzahl der Kästchen in der vierten Figur also noch nicht hinreichend erkannt.

Hochschuldidaktische Konsequenzen

Aufforderungen an Lernende zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen müssen vielfältig sein und dazu auffordern, auch vermeintlich einfache Sachverhalte aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten sowie Sachverhalte zu verallgemeinern.

Die Darstellung mathematischer Sachverhalte mittels Variablen sollte in Lehrveranstaltungen immer wieder im Hinblick auf die genutzte oder die mit ihnen beschriebene Struktur reflektiert werden.

Die große Anzahl an verschiedenen Termen zur Anzahlbestimmung der Kästchen pro Figur zeigt sehr deutlich, was wir aus Untersuchungen mit Grundschulkindern bereits wissen: Veranschaulichungsmaterial (hierzu lassen sich auch die oben dargestellten Figuren zählen) führt im Kopf der Lernenden nicht immer (nur) zu den Strukturen, die wir als Lehrende erwarten (vgl. z.B. Lorenz, 2011).

Ausblick

Im weiteren Verlauf der Auswertung sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Inwiefern unterscheiden sich Studierende mit Hauptfach Mathematik von Studierenden, die Mathematik nicht als Hauptfach studieren, hinsichtlich ihrer Strukturierungsfähigkeiten?
- Welche Aufforderungen an die Lernenden bei der Beschäftigung mit der Musterfolge bewirken einen Strukturierungswechsel innerhalb ihrer Bearbeitung? Welche Bearbeitungswege lassen sich leicht oder ohne Strukturierungswechsel verallgemeinern? Sind Zusammenhänge zwischen der Selbsteinschätzung der Mathematikkenntnisse und zielführenden Strukturierungswechseln im Verlauf der Bearbeitung erkennbar?
- Lassen sich die Stellen, an denen Fehler entstehen, so clustern, dass sie Hinweise für die weitere Ausbildung liefern?

Literatur

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München: Luchterhand.

Leuders, T. (2010): Erlebnis Arithmetik zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten. Heidelberg: Spektrum.

Lorenz, J. H. (2011): Die Macht der Materialien (?) Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation. In: A. S. Steinweg (Hrsg.): Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011 (Band 1). Bamberg: University of Bamberg Press, 39-54

Lüken, M. M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Münster: Waxmann