GÜNTER GRAUMANN, Bielefeld

Abbildungen in der Geometrie - Spiegelungsrechnen und dessen Analogien

Die kongruenten Abbildungen der ebenen elementaren Geometrie sind schon aus dem 5./6. Schuljahr bekannt. In der Universität im Lehramtsstudium sollte man sich damit aber systematisch befassen. So ist oft den Studierenden nicht klar, warum die bekannten Abbildungen wie Spiegelungen, Drehungen, etc. überhaupt kongruente Abbildungen sind und wie man alle kongruenten Abbildungen erfassen kann.

Eine ***kongruente Abbildung*** der Ebene bzw. des Raumes auf sich ist üblicherweise eine Bijektion, die zusätzlich die Geradentreue, Parallelitätstreue, Winkelmaßtreue und Längentreue erfüllt. Wegen der beweistechnischen Ökonomie [*ein wichtiges allgemeines Prinzip in der Mathematik*] ist es gut, zunächst den folgenden ***Hilfssatz*** zu beweisen: Allein die Bijektivität und die Längentreue reichen aus, eine kongruente Abbildung zu definieren.
Der Beweis für die Geradentreue benutzt die Charakterisierung der Nicht-Kollinearität über die Dreiecksungleichung. [*Ein einfacher aber immer wieder wichtiger Satz der Dreieckslehre wird hier wieder aufgefrischt.*] Die Parallelitätstreue folgt dann allein aus der Bijektivität und der Geradentreue [*und kann damit auch bei der Definition von Affinitäten in beliebigen affinen Räumen weggelassen werden*]. Der Beweis der Winkelmaßtreue kann über den Kongruenzsatz sss erfolgen. [*Die Kongruenzsätze sind ebenfalls wichtige Sätze der Dreieckslehre, die man immer im Hinterkopf haben sollte.*]
Ein einfach zu beweisender, aber weitreichender ***Satz über die Zusammensetzung (Hintereinanderausführung) von kongruenten Abbildungen*** sagt, dass die Eigenschaften der Bijektivität, Geradentreue, Parallelitätstreue, Winkelmaßtreue und Längentreue sich übertragen bei Hintereinanderausführung von Abbildungen, die eine (oder alle) dieser Eigenschaften besitzen. [*Eine solche Aussage sollte dann später bei der Behandlung von Ähnlichkeitsabbildungen und affinen Abbildungen selbst gefunden und die Analogie erkannt werden.*]
Über einen Widerspruchsbeweis unter Benutzung der definierenden Eigenschaften einer kongruenten Abbildung kann man leicht zeigen, dass die ***inverse Abbildung einer kongruenten Abbildung*** (die wegen der Bijektivität existiert) wieder eine kongruente Abbildung ist. [*Auch dieser Satz gilt analog für Ähnlichkeitsabbildungen und Affinitäten.*] Berücksichtigt man nun noch, dass die identische Abbildung alle definierenden

Eigenschaften einer kongruenten Abbildung erfüllt und dass die Hintereinanderausführung immer assoziativ ist (eine Klammerung hat keine Bedeutung), so erhält man den Satz, dass die Menge aller kongruenten Abbildungen [*und ebenso die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen bzw. die Menge aller Äffinitäten*] eine ***Gruppe*** bildet.
Vertieft werden kann dieser Aspekt dadurch, dass bestimmte Teilmengen, wie etwa die Menge aller eigentlichen (Orientierung erhaltenden) kongruenten Abbildungen oder die Menge aller Verschiebungen oder die Menge aller Deckabbildungen einer Figur ebenfalls Gruppen bilden.

Wir haben bislang immer nur allgemeine Aussagen über Abbildungen aufgrund deren Definitionen hergeleitet. Man sollte sich deshalb jetzt erst einmal um Beispiele kümmern. Dazu beweisen wir zunächst [*und das ist keine Selbstverständlichkeit und auch kein Axiom*], dass eine ***Achsenspiegelung der Ebene eine kongruente Abbildung*** ist.
Eine Achsenspiegelung ist offensichtlich bijektiv, da sie zu sich selbst invers ist. Wegen des obigen Hilfssatzes braucht man deshalb nur noch die Längentreue beweisen. Für eine Strecke auf der Achse ist das trivial. Sei nun P ein Punkt auf der Spiegelachse und Q ein Punkt außerhalb sowie Q* der Bildpunkt von Q und F_Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QQ^*}$, der auf der Spiegelachse liegt. Aufgrund der Definition der Spiegelung sind dann die Dreiecke PF_QQ und PF_QQ^* nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent und es ist |PQ| = |PQ*|. Liegen P und Q nicht auf der Achse und schneidet die Gerade PQ die Achse im Punkt S, so folgt wie eben |SQ| = |SQ*| und |SP| = |SP*|. Damit ist dann aber |PQ| = |P*Q*|. Ist schließlich die Strecke $\overline{PQ}$ parallel zur Spiegelachse, so bildet PP*Q*Q ein Rechteck und es ist |PQ| = |P*Q*|, was zu beweisen war.

Aufgrund des Satzes über die Zusammensetzung von kongruenten Abbildungen erhalten wir nun aus der Zusammensatzung von Achsenspiegelungen neue kongruente Abbildungen. Hierbei ist nun der ***Zweispiegelungssatz und seine Umkehrung*** fundamental:
Die Zusammensetzung zweier Achsenspiegelungen $Sp_b \circ Sp_a$ ist die identische Abbildung (wenn a = b) oder eine Drehung um den Schnittpunkt von a und b mit dem doppelten Winkel von a nach b als Drehwinkel (wenn a und b sich schneiden) oder eine Verschiebung senkrecht zu den Achsen mit dem doppelten Vektor des Abstandsvektors von a nach b (wenn a parallel zu b ist).
Umgekehrt kann die identische Abbildung und jede Drehung und jede Verschiebung als Doppelspiegelung dargestellt werden, wobei eine der beiden Achsen noch bestimmte Freiheiten der Wahl hat.

Wir können den Beweis hier aus Platzgründen nicht beschreiben, man findet ihn aber in allen einschlägigen Büchern. [*Bemerkenswert ist, dass aufgrund dieses Satzes nicht mehr die Bilder und Bild-Bilder einzelner Punkte oder Figuren betrachtet werden müssen, sondern dass man mit den Spiegelachsen wie mit algebraischen Objekten rechnen kann, dem sog.* ***Spiegelungsrechnen***.]

Ein erster Satz hierbei ist der ***Dreispiegelungssatz***: Die Verknüpfung dreier Achsenspiegelungen ergibt wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen durch einen Punkt gehen oder alle drei zueinander parallel sind.
Zum Beweis ersetzt man die beiden ersten Achsen durch zwei Achsen, die die gleiche Drehung bzw. Verschiebung ergeben, wobei die zweite Achse gleich der dritten Achse ist, so dass jetzt die zweite und dritte Spiegelung zusammen die identische Abbildung ergeben.
Auf ähnliche einfache Weise kann man auch beweisen, dass zwei Punktspiegelungen zusammen eine Verschiebung ergeben und dass eine Punktspiegelung zusammen mit einer Verschiebung eine Punktspiegelung ergibt. Mit etwas mehr Aufwand kann man dann aber auch zeigen, dass eine Dreifachspiegelung eine Gleitspiegelung ist, wenn die drei Achsen nicht durch einen Punkt gehen und auch nicht zueinander parallel sind. Weiterhin kann man mittels Spiegelungsrechen zeigen, dass eine Vierfachspiegelung gleich einer Doppelspiegelung ist, so dass man durch Kombination von mehr als drei Achsenspiegelungen keine neuen Typen von kongruenten Abbildungen erhält. Darüber hinaus kann man mittels Spiegelungsrechnen beliebige Verknüpfungen der bisher erhaltenen Typen kongruenter Abbildungen ermitteln. Diese sind immer Achsenspiegelungen, Zweifachspiegelungen oder Gleitspiegelungen.

Hiernach ist aber immer noch nicht klar, ***ob man alle möglichen Typen von kongruenten Abbildungen der Ebene erfasst hat***, denn es könnte ja noch einen völlig anderen Typ geben, der sich nicht als Zusammensetzung von Achsenspiegelungen beschreiben lässt. [*Solche Überlegungen, die nicht nur die bekannten Fälle erfasst, sind wichtig für das Lernen systematischen Denkens*.] Um dieses Problem anzugehen, überlegen wir zunächst, wie man eine kongruente Abbildung der Ebene eindeutig bestimmen („fassen“) kann. Da schon die Bestimmungsstücke von Spiegelung, Drehung und Verschiebung verschiedene geometrische Objekte enthalten, versuchen wir es doch einfach mit einem gegebenen Punkt A und seinem gegebenen Bildpunkt A*. Offensichtlich gibt es dazu verschiedene Abbildungen schon unter den bislang bekannten kongruenten Abbildungen. Also versuchen wir es mit zwei verschiedenen gegebenen Punkten A, B und ihren Bildpunkten A*, B*. Jeder Punkt X der Geraden AB ist durch die Abstände zu A und B eindeutig bestimmt. Wegen der Längentreue der kongruenten Abbildung ist dann auch der Bildpunkt X* eindeutig durch die Abstände zu A* und B* bestimmt. Ein Punkt Y außerhalb von AB ist bis auf Spiegelung eindeutig durch die Abstände zu A und B (wegen sss für das Dreieck AYB) bestimmt. Damit ist auch Y* bis auf Spiegelung an A*B* eindeutig durch A*, B* bestimmt. Wollen wir eine völlig eindeutige Bestimmung eines beliebigen Punktes und seines Bildpunktes erhalten, so müssen wir drei Punkt A, B, C, die ein Dreieck bilden, und deren Bildpunkte A*, B*, C* vorgeben.

Nun können wir damit eine ***beliebige kongruente Abbildung bestimmen***. Wir geben einfach irgendein Dreieck ABC vor und wählen dazu irgendein kongruentes Dreieck EFG mit der Vorgabe E = A*, F = B*, G = C*. Man findet dann leicht eine Zusammensetzung aus den bisher bekannten kongruenten Abbildungen (etwa mittels Verschiebung, Drehung und Spiegelung oder mittels einer Dreifachspiegelung), die A auf E, B auf F und C auf G abbildet. Damit ist dann bewiesen, dass es außer den schon bekannten kongruenten Abbildungen keine weiteren Typen gibt.

Wie oben schon angedeutet wurde, kann man analoge Überlegungen für ***kongruente Abbildungen im Raum*** machen (wobei die Bestimmung durch eine Dreieckspyramide und ihre Bildpyramide gegeben ist) und erhält dann neben den Ebenenspiegelungen die daraus zusammengesetzten Zweifachspiegelungen (Identität, Achsendrehungen und Verschiebungen), Dreifachspiegelungen (Gleitspiegelungen und Drehspiegelungen) sowie Vierfachspiegelungen (Schraubungen).

Analoge Überlegungen bei ***Ähnlichkeitsabbildungen*** führen dazu, dass jede Ähnlichkeitsabbildung (in der Ebene bzw. im Raum) sich darstellen lässt als Zusammensetzung einer kongruenten Abbildung (der Ebene bzw. des Raumes) und einer zentrischen Streckung (in der Ebene bzw. im Raum).

Schließlich kann man auch ***affine Abbildungen*** (der Ebene bzw. des Raumes) auf entsprechende Weise typologisieren, wobei die Bestimmung eines beliebigen Punktes mittels des Teilverhältnisses erfolgt. Eine affine Abbildung kann dann dargestellt werden als Zusammensetzung eine Ähnlichkeitsabbildung und einer Achsenaffinität (axiale Streckung oder Scherung) bzw. Ebenenaffinität.

Literatur

Graumann, Günter (2011[2]). Grundbegriffe der Elementaren Geometrie, EAGLE Leipzig.

Graumann, Günter (2013). Abbildungen in der elementaren und analytischen Geometrie. Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). *Erscheint demnächst*.