Agnis ANDŽĀNS, Līga RAMĀNA, Riga, Lettland

Zusammenhänge zwischen der Invarianten-Methode und der Mittelwert-Methode

In den osteuropäischen Ländern, also auch in Lettland fanden in den letzten 50 Jahren viele Bildungsreformen statt. Zur Sowjetzeit waren diese zwar oft ideologisch belastet, aber der Schwerpunkt lag auf den exakten Disziplinen (Mathematik und Naturwissenschaften). Seit 1991 war das Bestreben, das Bildungssystem „humanistisch" zu gestalten. Leider wurde „humanistisch" mit „geisteswissenschaftlich" gleichgesetzt, sodass die exakten Disziplinen heute nicht mehr Spitzenreiter sind.

In dieser Situation sind Mathematik-Olympiaden und Mathematik-Wettbewerbe in Lettland außerordentlich wichtig. Ihr hohes Anspruchsniveau ist durch die Bildungsreformen nicht beeinträchtigt worden. Die Lehrer haben bei der Vorbereitung ihrer Schüler auf diese Wettbewerbe klare Zielvorgaben, und die Ergebnisse ermöglichen einen Vergleich zwischen den Mathematiklehrern und den Schulen. An der ersten Stufe, der sog. Schulolympiade, nehmen etwa 20% aller lettischen Schüler teil, danach an den Bezirksolympiaden sind es etwa 12000 Schüler, aus denen dann ungefähr 300 Schüler für die Endrunde ausgewählt werden. Unabhängig davon kommen jedes Jahr am letzten Sonntag im April circa 3500 Schüler nach Riga, um an der Offenen Mathematik-Olympiade Lettlands teilzunehmen. Durch Zeitungen und das Internet werden auch Fernwettbewerbe organisiert. Im Sommer werden in Riga mathematische Ferienlager abgehalten.

In einem solchen System von Wettbewerben und deren Vorbereitung entstehen viele neuartige Mathematikaufgaben. (Wirklich ganz neue Olympiadeaufgaben entstehen weltweit pro Jahr nur etwa 10 Stück!) In Lettland werden jedes Jahr fast 300 Wettbewerbsaufgaben gebraucht. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, eine Klassifikation der Aufgaben und ihrer Lösungsmethoden zu entwickeln.

Die wichtigste Methode beim Lösen von Olympiadeaufgaben ist die sog. kombinatorische Methode. Insbesondere bei jüngeren Schülern, deren Kenntnisse in Algebra und Geometrie noch nicht sehr groß ist, bietet die kombinatorische Methode viele Möglichkeiten interessante Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zu stellen. Die kombinatorische Methode umfasst die Vollständige Induktion, die Mittelwert-Methode, die Invarianten-Methode, die Methode des extremalen Elements und die Interpretationsmethode, vgl. [1] und [2].

Bis zu 80% aller kombinatorischen Wettbewerbsaufgaben können mit diesen Methoden gelöst werden, und zwar auch die der Internationalen Mathematik-Olympiade und anderer prestigeträchtiger Wettbewerbe. Zum Beispiel haben wir beim Mannschafts-Wettbewerb des „Baltic Way“ die folgenden drei Jahr analysiert: Warschau 1998, Riga 2003 und Vilnius 2004. Bei jedem dieser Wettbewerbe werden 5 algebraische, 5 geometrische, 5 zahlentheoretische und 5 kombinatorische Probleme gestellt, vgl. [4].

In Warschau waren Nr. 16 und 20 durch die Invarianten-Methode lösbar, bei Nr. 17 und 18 war es im Wesentlichen die Vollständige Induktion und bei Nr. 19 war es die Mittelwert-Methode (Schubfachprinzip), was auch bei Nr. 17 zur Lösung geführt hätte.

In Riga führte die Mittelwert-Methode bei Nr. 6, 7 und 10 zur Lösung, die Invarianten-Methode war entscheidend bei Nr. 8 und 9 - wie immer bei Problemen, bei denen ein induktiver Algorithmus zu konstruieren ist.

In Vilnius war die Invarianten-Methode das Hauptinstrument bei den Problemen Nr. 11, 12, 14 und 15, bei Nr. 13 und auch dem zahlentheoretischen Problem Nr. 9 war es die Mittelwert-Methode.

Ein ähnliches Ergebnis zeigte die Untersuchung der Aufgaben aus den letzten acht Jahren der Internationalen Mathematik-Olympiade. Dort gibt es jedes Mal ein oder zwei Aufgaben, die mit der kombinatorischen Methode lösbar sind:

Jahr	Problemen	Methode
1997	N° 4	a) Invarianten b) Induktion
	N° 6	a) Induktion b) Invarianten
1998	N° 2	Mittelwert-Methode
1999	N° 3	Mittelwert-Methode
2000	N° 3	Invarianten
	N° 4	Induktion
2001	N° 3	Mittelwert-Methode
	N° 4	Mittelwert-Methode
2002	N° 1	Induktion
2003	N° 1	Mittelwertsmethode
2004	N° 3	Invarianten

Es gibt zwar mehr „Mittelwert-Probleme“, aber diese wechseln sich mit den „Invarianten-Problemen“ ab, sodass man mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten kann, dass für die IMO 2005 ein „Mittelwert-Problem“ ausgewählt werden wird!

Diese und ähnliche Regularitäten zu eine Idee können uns bringen, die unterliegende Ideen beiden Methoden zu erforschen, sogar rheine mathematische Interesse nicht in Betracht ziehen. Es herausstellt – unerwartet genug – daß beide Methoden auf dieselben Prinzipen basiert sind, und die Invariantenmethode „mehr fundamental" als die Mittelwertsmethode ist.

Im Folgenden sollen nun die wesentlichen Merkmale der beiden Methoden beschrieben werden:
Gegeben ist eine Menge K. Jedes Element e aus K kann durch eine Vorschrift L in ein anderes Element e´ aus K transformiert werden. Eine Funktion I auf K heißt invariant, wenn I(e)=I(e´) gilt. Wenn I(e´)≥I(e) bzw. I(e´)≤I(e) gilt, heißt I semi-invariant. Wenn I invariant ist und $I(e_1)\neq I(e_2)$ gilt, dann kann e_2 nicht durch L aus e_1 erreicht werden. Dies gilt auch, wenn I ein nicht-wachsende semi-invariant ist und $I(e_2)>I(e_1)$ gilt. (Semi-Invarianten werden oft auch Potentiale genannt.) In dieser Form sind die Invarianten wichtige Hilfsmittel für Unmöglichkeitsbeweise und zur Analyse von Algorithmen. Ein Beispiel dafür ist Problem Nr. 3 der IMO 2000 in Korea:

„Sei n≥2 eine natürliche Zahl. Am Anfang sitzen n Flöhe auf einer horizontalen Geraden t, und zwar nicht alle auf demselben Punkt. Für eine positive reelle Zahl *k* sei eine *Operation* folgendermaßen definiert:
Wähle zwei Flöhe in den Punkten A und B, wobei A links von B liegt; der Floh in A springe zum Punkt C auf t rechts von B mit BC = *k*·AB.
Bestimme alle *k* so, dass für jeden Punkt M auf t und jede Anfangsverteilung der n Flöhe, es eine endliche Folge von Operationen gibt, die alle Flöhe auf Punkte rechts von M bringt."

Im Gegensatz zur offiziellen Lösung, die lang und kompliziert ist, ergibt sich eine einfache und klare Lösung, wenn man die Semi-Invariante $(x_1+x_2+\ldots x_n) - nx_i$ untersucht, dabei sind $x_1,\ldots,x_n$ die Koordinaten der n Flöhe und x_i ist die Koordinate des am weitesten rechts sitzenden Flohs. Die Lösung ist $k \geq \frac{1}{n-1}$.

Mit der Mittelwert-Methode wird die Lösung noch einfacher: Wenn $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq S$ gilt, dann gibt es ein x_i, so dass $x_i \geq \frac{S}{n}$ gilt. Wenn alle x_i ganze Zahlen sind, folgt die Lösung mit Hilfe des Schubfachprinzips. Für Verallgemeinerungen dieses Problems vgl. [3] .

Wir vermerken daß diese Behauptung aus einen Invarianzprinzip folgt: das Resultat des Summierens ist invariant wenn man das Folge des Summierens verändert. Das ist klar wenn wir der Beweis des

Schubfachprinzip und seine analogen betrachten. Auch dieses „Algemeines Invariant“ ist sehr nützlich wenn man das Existenz / Nonexistenz der Konfigurationen analisiert. Wann wir die Prozessen analysieren, man muß für jede Probleme einen speziellen Invariant zu konstruieren. Für Konfigurationen, das Resultat der Summierens gilt als Invariant in 99%.

So haben wir eine Behauptung, daß die Mittelwert-Methode und die Invarianten-Methode beide die Konsekvenzen aus mehr generalen Eigenschaften der entforschenden Objekten sind. Eine indirekte Bestätigung kommt aus „Große Mathematik“ und theoretische Computerlehre. Beide Methoden sind umfangreich anwendbar, aber nur in deren Gebieten, wo ein Analog der „absoluten Konvergenz“ feststelt ist. Das zeigt, daß die Zusammenhang zwischen diesen Konzepten tief genug ist.

Wir sind der Ansicht, dass die Einübung der kombinatorischen Methode schon in jüngeren Klassen beginnen müsste und die zugehörigen Probleme regelmäßig in Wettbewerben auftauchen sollten. Viele solcher Beispiele findet man in [4] (in Lettisch). In [5] steht ein interaktives mathematisches Wörterbuch in Lettisch / Deutsch / Englisch / Französisch / … (11 Sprachen) zur Verfügung.

Danksagung

Die Autoren danken der DFG, der Universität Bielefeld und dem Europäischen Sozialfond für ihre Unterstützung. Wir danken auch Hern Prof. Gunter Stein für seine Hilfe in der Vorbereitung der deutschen Version des Artikels.

Literatur

1. L. Ramāna. The Method of Invariants in Elementary Mathematics. – Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, 1998, pp. 519 – 522.
2. R. Bodendiek, G. Burosch. Streifzüge durch die Kombinatorik. Spektrum, 1995.
3. http://www.liis.lv/NMS/
4. A. Andžāns, J. Čakste, T. Larfeldts, L. Ramāna, M. Seile. Die Mittelwert-Methode (in Lettisch). Rīga, Mācību Grāmata, 1996.
5. http://www.lanet.lv/miv/