Leander KEMPEN, Paderborn

Generische Beweise in der Hochschullehre

Um Erstsemesterstudierenden den Übergang in die Hochschulmathematik zu erleichtern wurde durch die AG eMath (eLearning in Mathematik und mathematische Vor- und Brückenkurse) des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) eine neue obligatorische Brückenkursvorlesung an der Universität Paderborn entwickelt, welche sich an Lehramtsstudierende des Bachelorstudiengangs Haupt- und Realschule richtet. In dieser Veranstaltung sollen die Studierenden explizit auf ihr vorhandenes schulmathematisches Wissen zurückgreifen, welches im Verlauf der Veranstaltung mit der „neuen“ Hochschulmathematik verbunden werden soll. Im Kontext von mathematischen „Forschungsprojekten“ sollen Betrachtungen von Beispielen und beispielgebundenen Beweisen (hier: operative und generische Beweise) den Übergang zum formalen Beweisen bereiten. Im Folgenden werden die Ergebnisse von Hausaufgabenanalysen von Studierenden zum beispielgebundenen und formalen Beweisen aus den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 dargestellt und miteinander verglichen.

1. Theoretischer Hintergrund

1913 beschreibt Branford in seinen Beweisstufen die *intuitive Ableitung*, welche sich auch auf „Postulate der sinnlichen Erfahrung“ berufen kann (S. 103). „Sie [die intuitive Beweisstufe] kann allgemeine […] Wahrheiten aufstellen und kann zu dem wissenschaftlichen Evidenzideal die Anregung geben“ (S. 239). Diese Idee von *inhaltlich-anschaulichen* Beweisen (Wittmann & Müller, 1988) wurde später von verschiedenen Mathematikdidaktikern aufgegriffen und unter verschiedenen Aspekten beleuchtet (etwa: Semadeni, 1974; Kirsch 1979). Während Wittmann (1985) in *operativen Beweisen* die Wirkungen von Handlungen (algebraischen Operationen u.a.) untersucht, betonen etwa Rowland (2002) und Mason und Pimm (1984) das generische Moment von Beispielbetrachtungen, um daraufhin die Beweisidee auf einen formalen Beweis übertragen zu können. Auch Padberg (1997) nutzt diesen Übergang vom beispielgebundenen Beweis zum formalen Beweis innerhalb seiner Beweisniveaus, um Studierende an das formale Beweisen heranzuführen.

2. Forschungsfragen

Für die Untersuchung dieses didaktisch motivierten Einsatzes von beispielgebundenen Beweisen wurden die folgenden Forschungsfragen formuliert:

a) Wie argumentieren die Studierenden, wenn sie aufgefordert werden einen operativen (generischen) Beweis zu führen?

b) Nutzen Sie ihre Argumentation aus dem operativen (generischen) Beweis auch im formalen Beweis?

3. Design der Studie

In den ersten beiden Vorlesungssitzungen wurden die Studierenden mit operativen und formalen Beweisen vertraut gemacht. Nachdem sie eine Übung zu dieser Thematik besucht hatten, mussten sie die erste Hausaufgabe abgegeben; das Erreichen von 50 % der möglichen Punkte war hierbei die Voraussetzung für die Zulassung zu der Modulklausur. Die Studierendenbearbeitungen zu der in Abschnitt 4 beschriebenen Aufgabe wurden eingescannt und analysiert. Die gewonnenen Ergebnisse dieser Untersuchung wurden im nächsten Durchgang der Vorlesung berücksichtig. Somit ergaben sich in der Lehrveranstaltung im WS 2012/13 die folgenden Veränderungen: Es fand eine Umbenennung des operativen Beweises hin zum „generischen Beweis“ statt, um Missverständnissen vorzubeugen und um zu betonen, dass nach der Beispielbetrachtung eine explizite Erklärung dafür erfolgen muss, warum das identifizierte Argument zum Beweis der Behauptung gültig und verallgemeinerungsfähig ist. Des Weiteren wurde innerhalb der Vorlesung konkret auf typische Fehlvorstellungen zur Thematik eingegangen, welche explizit an den oben dargestellten Kategorien verdeutlicht wurden. Zusätzlich wurden Abschnitte zur „Reflexion“ eingefügt, um Inhalte auf einer Meta-Ebene reflektieren zu können. Die Tutoren wurden fachlich geschult und neue Übungsaufgaben in den Tutorien eingesetzt.

4. Die hier betrachtete Aufgabe

„Beweisen Sie die nachfolgende Behauptung mit einem operativen [im WS 12/13: generischen] Beweis und einem formalen Beweis. Formulieren Sie vor dem formalen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen:

Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.“

Eine mögliche Lösung, die dem Wissensstand der Studierenden entspricht und mit der sozio-mathematischen Norm der Vorlesung vereinbar ist, wäre:

Operativer/ generischer Beweis:

$1 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3 \qquad 3 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 5 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$

Man erkennt, dass das Ergebnis immer das Dreifache der Ausgangszahl ist. Da das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Formaler Beweis: (in Anlehnung an den beispielgebundenen Beweis)
Sei $a \in N$ eine beliebige aber feste, ungerade Zahl. Dann ist $a + 2a = 3a$. Da das Dreifache einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ist damit die Behauptung bewiesen.
[Natürlich sind hier auch andere (formalere) Beweisführungen und Argumentationen möglich, diese sollen hier aber nicht aufgeführt werden.]

5. Das Kategoriensystem

Um die Argumentationsqualität der Beweisbearbeitungen der Studierenden analysieren zu können, wurden die folgenden Kategoriensysteme entwikkelt:

Das Kategoriensystem zu dem beispielgebundenen Beweis:

E0: Der „operative/ generische Beweis” beinhaltet Beispiele, die nicht zu der Behauptung passen.

E1: Der „operative/ generische Beweis” besteht nur aus einer Verifikation durch verschiedene Beispiele, ohne dass allgemeingültige Prinzipien benannt werden.

G1: In den Beispielen innerhalb des „operativen/ generischen Beweises“ werden allgemeingültige Operationen und Umformungen deutlich, welche allerdings nicht expliziert werden.

G2: In den operativen/ generischen Beweisen werden allgemeingültige Prinzipien deutlich, die benannt und in der folgenden Argumentation zum Beweisen der Behauptung genutzt werden.

Das Kategoriensystem zu dem formalen Beweis:

P1: Die Argumentation im Beweis ist logisch und korrekt.

P2: Die Argumentation im Beweis enthält Lücken und/ oder es werden Argumente genutzt, die nicht allgemeingültig sind.

P3: Die Beweisführung beinhaltet keine Argumentation.

P4: Diverses (unverständlich, falsch, ziellos, ...)

6. Ergebnisse

In den Abbildungen 1 und 2 werden die Ergebnisse der Studierendenbearbeitungen zum beispielgebundenen und zum formalen Beweis aus den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 dargestellt:

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12 (n = 53)	WS 12/13 (n = 114)
E0	3 (6 %)	4 (4%)
E1	36 (68 %)	32 (28 %)
G1	8 (15 %)	30 (26 %)
G2	6 (11 %)	48 (42 %)

Abb. 1: Ergebnisse zum beispielgebundenen Beweis

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12 (n = 56)	WS 12/13 (n = 118)
P1	29 (52 %)	48 (41%)
P2	18 (32 %)	21 (18 %)
P3	8 (14 %)	38 (32 %)
P4	1 (2 %)	11 (9 %)

Abb. 2: Ergebnisse zum formalen Beweis

Von den 14 Studierenden, deren beispielgebundenen Beweise im WS 11/12 in die Kategorien G1 und G2 eingeteilt wurden, konstruierten elf einen formalen Beweis und acht übertrugen ihre vorherige Argumentation auf ihren formalen Beweis. Im WS 12/13 lag die Quote einer entsprechenden Argumentation in beiden Beweisformen bei 61,25 %.

7. Fazit

Für viele Studierende scheint die Unterscheidung zwischen der Verifikation einer Behauptung durch Beispiele und einem allgemeingültigen beispielgebundenen Beweis problematisch. Auch im WS 12/13 wurden in 32 % aller Bearbeitungen zum generischen Beweis ausschließlich Beispiele präsentiert (E0+E1). Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der prozentuale Rückgang der Kategorie P1 im zweiten Durchgang. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass viele Studierende ihre Beweisidee aus dem beispielgebundenen Beweis auf den formalen Beweis übertragen, dort aber nicht explizit ihre vollständige Argumentation wiederholen.

Literatur

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Leipzig und Berlin: Teubner.

Padberg, F. (1997). *Einführung in die Mathematik 1 - Arithmetik*. Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (Eds.), *Beweisen im Mathematikunterricht* (pp. 261-274). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Mason, J., &Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory* (pp. 157- 183). Westport, Connecticut: Ablex.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematiklehren, 11*, 7 - 11.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (pp. 237-257). Berlin: Cornelsen.