Wilfried HERGET

Funktionen – immer wieder überraschend!

Die Leitidee *Funktion* ist uns Lehrkräften wohlbekannt; da wird manch eigentlich Erstaunliches schnell *trivial*. Doch das Vertraute wird nicht langweilig, wenn uns das Besondere bewusst bleibt. Für die Schülerinnen und Schüler bieten sich hier immer wieder Überraschungen – wie in (Herget 2013) noch weitergehend ausgeführt.

Verschieben, Stauchen, Strecken

Ein klassisches Unterrichtsthema sind die Zusammenhänge zwischen Veränderungen am Funktionsterm und entsprechenden Veränderungen des Graphen. Bei den *linearen Funktionen* geht es zunächst um das Verschieben in y-Richtung und um die Graphen-Geraden-Steigung. Dass selbst hier Überraschendes passieren kann, greift die folgende Aufgabe auf, die sich auch zu einem späteren Zeitpunkt zum Üben gut eignet (Pinkernell 2009):

> Konrad verschiebt den Graphen zu $y = f(x) = 2 \cdot x$ um 3 Einheiten nach rechts und um 6 Einheiten nach oben.
>
> Überrascht stellt er fest: „Der Graph hat sich überhaupt nicht verändert!"
>
> Er hat Recht! Wie kommt das? Erkläre anhand des Terms.

Spätestens bei den *quadratischen Funktionen* gilt es, nicht nur Verschiebungen in der y-Richtung, sondern auch Verschiebungen in der x-Richtung zu untersuchen. Dabei kommt es zu einer überraschenden Entdeckung:

> Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$ z. B. um 3 Einheiten in y-Richtung, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = x^2 + 3$.
>
> Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$ aber um 3 Einheiten in x-Richtung, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = (x - 3)^2$.
>
> Wieso in dem ersten Fall „+ 3", aber im zweiten Fall „– 3"?

Die quadratischen Funktionen haben etwas Besonderes: Deren Graphen sind „unverbiegbar", wenn man zum Funktionsterm irgendeinen linearen Term addiert (Herget/Jahnke/Kroll 2001, S. 98). Wie kommt das?

Die *Exponentialfunktionen* halten noch eine Überraschung für uns bereit, und zwar auch hier gerade dann, wenn man schon glaubt, alles zu wissen (vgl. vom Hofe 2001):

> Bei den Graphen zu $y = f(x) = 2^x$, $y = g(x) = 0{,}1 \cdot 2^x$, $y = h(x) = 0{,}01 \cdot 2^x$ bedeuten die Termveränderungen jeweils eine Stauchung – aber augenscheinlich entstehen die Graphen durch Verschieben in x-Richtung ... Wie lässt sich das erklären?

Wie bei der Parabel-und-Geraden-Addition kann die Auflösung hier über die Umformung der jeweiligen Funktionsterme gelingen, verbunden mit einer bewussten Reflexion zu der *merk-würdigen* Überraschung.

Die umgekehrte Aufgabe: Koordinatensystem gesucht!

Eine *umgekehrte Aufgabe* kann eine attraktive Herausforderung sein, wie die folgende Idee von Hans-Karl Eder zeigt (Herget 2005):

> Auf ein leeres, unliniertes Blatt Papier ist irgendeine Gerade gezeichnet. Die Gerade soll die Gleichung $f(x) = 2x + 3$ besitzen.
>
> Zeichne dazu ein passendes Koordinatensystem!

Diese Aufgabe findet sich auch in (Herget/Strick 2011, S. 47; Reiss/Hammer 2012, S. 71) einschließlich verschiedener Lösungsideen, ebenso entsprechende Aufgaben zu Parabeln; und naheliegenderweise lässt sich dies analog auch für die Exponential- und die Winkelfunktionen nutzen.

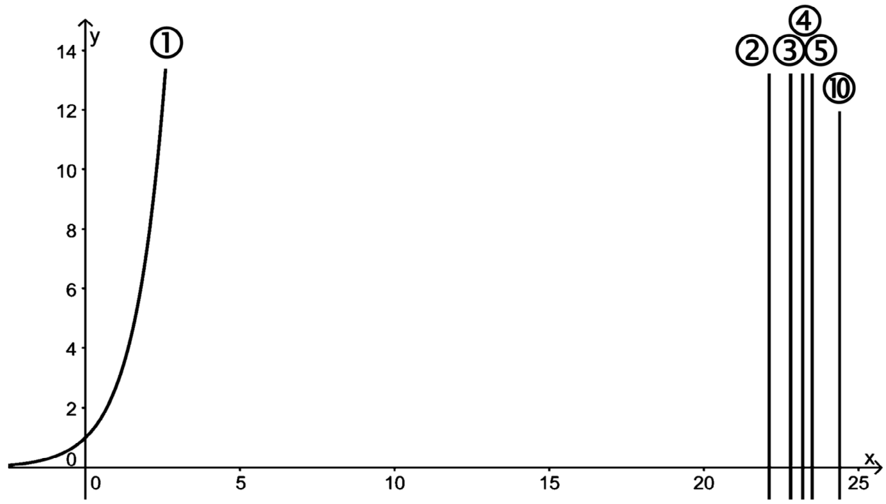
Die überraschende Exponentialfunktion

Exponentielles Wachstum wird bekanntlich unterschätzt. Also ein guter Grund, einmal „bis zum Mond zu falten“ (etwa Beutelspacher/Wagner 2008, Schmitt-Hartmann/Herget 2013)). Es ist – zumindest für Nicht-Mathematiker – unglaublich: Nach nur 42-maligem Falten (zumindest in Gedanken ...) würde der „Papierturm“ bis zum Mond reichen!

Wie dramatisch schnell Exponentialfunktionen wachsen, zeigt die folgende Idee (angeregt durch die „unschlagbar langsam“ wachsende Logarithmusfunktion in Baierlein/Barth/Greifenegger/Krumbacher 1981, S. 129):

> Wir verfolgen den Graphen von $y = \mathrm{e}^x$, der ja im üblichen Koordinatensystem schnell „nach oben verschwindet“, weiter auf seinem Weg. Wir orientieren das Koordinatensystem so, dass die y-Achse genau zum Nordpol weist, skalieren wie üblich (1 Einheit = 1 cm) und lassen nach rechts etwas mehr Platz als sonst – erst einmal bis $x = 25$, das geht noch gut im A4-Querformat. Angenommen nun, wir hätten einen (nach oben!) *sehr* langen Papierstreifen, der über den Nordpol weiter zum Südpol und wieder zu uns zurück einmal um die Erde reicht: Wo würde der Graph von $y = \mathrm{e}^x$ diesen Koordinatensystem-Streifen *nach rechts* verlassen? Schätzen Sie!

Tatsächlich würde der Graph von $y = \mathrm{e}^x$ nach dem langen Weg über beide Pole noch deutlich *innerhalb* unseres Streifens wieder „vorbeikommen“! Und wir schicken den Graphen gleich weiter, noch einmal über beide Pole ... usw. Immer dichter liegen die „Spuren“, und erst der Durchgang Nr. 19 liegt jenseits von $x = 25$.



... mit dem Rechner

Dank Grafikrechner und Funktionenplotter ist es möglich, experimentell etwas ausgesprochen Überraschendes zu erforschen:

> Jede (noch so schwach wachsende) Exponentialfunktion mit $y = a^x$ $(a > 1)$ „überholt" schließlich jede (noch so schnell wachsende) Potenzfunktion mit $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Auch das *Funktionen-Mikroskop* (Kirsch 1979, 1980) ist heute bequem mit Funktionenplotter zu realisieren – und lässt, durchaus überraschend, erkennen: Vergrößert man die Umgebung eines Graphenpunktes immer mehr, so wird der Graph nicht dicker (wieso eigentlich nicht?), aber mehr und mehr gerade, bis er nicht von einer Geraden zu unterscheiden ist! Dieser Zugang zur Ableitung über die lokale Linearisierung (was natürlich nur für „friedliche" Funktionen funktioniert ...) ergänzt die anderen, üblichen Zugänge.

Zuletzt sei noch auf die Schwächen der Rechner-Pixel-Grafik verwiesen. Dies führt unvermeidbar und doch überraschend dazu, dass bei hinreichend schnell schwingenden Sinus-Graphen diese nicht mehr richtig dargestellt werden können: Auf dem TI-89 z. B. sind (bei geeigneter WINDOW-Wahl) die Graphen von $\sin x$ und von $\sin 475x$ identisch (vgl. Herget/Malitte 2001), es kommt zum sogenannten *Aliasing* (Hischer 2006).

Selbst bei schlichten Funktionen können sowohl die Pixel-Grenzen des Rechners als auch eine (un-)passende Einstellung des Graphen-Fensters zu Überraschungen führen: „Langweiler-Graphen" entstehen (der Graph sieht aus wie bei einer konstanten Funktion), sogar „Leergraphen" (nur das Koordinatensystem ist zu sehen). Solch „faule Funktionen" können Ausgangspunkt für interessante Aufgaben sein (Herget/Malitte 2002, S. 62–64; Herget/Strick 2012, S. 50–51). Dies führt übrigens bis zu grundlegenden Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit (Herget/Strick 2012, *Faule*

Funktionen & feine Fenster): Wird im Grafikfenster der x-Bereich hinreichend klein oder der y-Bereich hinreichend groß gewählt, sieht der Graph *jeder* Funktion konstant aus – vorausgesetzt, sie ist nicht zu „sprunghaft“!

Vom Staunen zum Verstehen

Überraschungen bewusst im Unterricht zu nutzen, um Aufmerksamkeit und Interesse zu wecken und nachhaltiges Lernen anzustoßen, dürfte zur pädagogischen Folklore gehören, seit es Lehren und Lernen gibt. Ideen wie die hier vorgestellten sind *produktiv* (im Sinne von Herget/Jahnke/Kroll 2011, S. 5): „Produktiver Mathematikunterricht soll heißen, dass dieser Unterricht etwas hervorbringt: eine forschende Haltung, Auseinandersetzungen, Kenntnisse, Erkenntnisse, Einsichten, Erfahrungen und Gespräche.“

Literatur

Baierlein, M.; Barth, F.; Greifenegger, U.; Krumbacher, G. (1981): Anschauliche Analysis 2. München: Ehrenwirth.

Beutelspacher, A.; Wagner, M. (2008): Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg: Herder.

Herget, W. (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung. Erscheint in: Allmendinger, H.; Lengnink, K.; Vohns, A.; Wickel, G. (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten an Schule und Hochschule. – Springer Spektrum, Berlin.

Herget, W.; Jahnke, T.; Kroll, W. (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

Herget, W.; Malitte, E. (2002): Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen. In: Herget, W.; Lehmann, E. (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/-89/-92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel, S. 57–64.

Herget, W.; Strick, H. K. (2012): Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff. Seelze: Friedrich.

Hischer, H. (2006): Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. In: Der Mathematikunterricht 52 (1), S. 18–31.

Kirsch, A. (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 25 (3), S. 25–41.

Kirsch, A. (1980): Folien zur Analysis, Serie A. Die Steigung einer Funktion. Hannover: Schroedel.

Pinkernell, G. (2009): „Wir müssen das anders machen” – mit CAS funktionales Denken entwickeln. In: Der Mathematikunterricht 55 (4), S. 37–44.

Reiss, K.; Hammer, C. (2012): Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Basel: Birkhäuser.

Schmitt-Hartmann, R.; Herget, W. (2013): Papierfalten im Mathematikunterricht. Arbeitsblätter für die Klassen 5 bis 12. Stuttgart: Klett.

vom Hofe, R. (2001): Funktionen erkunden – mit dem Computer. In: mathematik lehren, Heft 105, S. 54–58.