Kapitel 7

Beispiele

Im Kapitel 3 sowie im Anhang A sind die Spannungs- und Materialtensoren isotroper, hyperelastischer Materialien für unterschiedliche Problemstellungen angegeben worden. Die Umsetzung in eine effektive Finite-Elemente-Formulierung basiert auf den Darstellungen der Abschnitte 2.5, 2.6 und des Kapitels 4.

Die dort angegebenen Formulierungen sind vollständig in das Forschungsprogrammpaket INA–OPT implementiert worden und zeigen die erwünschten guten, d.h. quadratischen Konvergenzeigenschaften. Weiterhin bilden sie die Grundlage einer erfolgreichen Sensitivitätsanalyse, die ebenfalls für die Gesamtheit der angegebenen Darstellungsarten sowohl in variationeller als auch in diskreter Form realisiert wurde. Die Vollständigkeit der Implementation wurde an repräsentativen Testbeispielen mit kleiner Elementanzahl sowohl durch Vergleich mit der vollständig numerischen Sensitivitätsanalyse als auch mit den Varianten der semi-analytischen Gradientenermittlung nachgewiesen.

Zur Darstellung der Leistungsfähigkeit des Gesamtalgorithmus´ Optimale Formgebung und damit auch der hierin enthaltenen Strukturanalyse und Sensitivitätsanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien wurden beispielhaft zwei geometrische Grundformen, die Scheibe mit Loch und der S2-Normzugstab, untersucht.

Die Auswahl der unterschiedlichen Optimierungsaufgaben für diese Geometrien berücksichtigt das nichtlineare Materialverhalten unter großen Verzerrungen und umfaßt

- die Gewichtsminimierung bei Veränderung der geometrischen Form (Abschnitt 7.1),
- die Identifikation von Materialparametern und geometrischer Form aus dem Deformationsverhalten einer Struktur (Abschnitt 7.2),
- die Anwendung der Formoptimierung auf die praxisrelevante Problemstellung der Verminderung von Spannungskonzentrationen (Abschnitt 7.4).

Darüberhinaus wird im Abschnitt 7.3 die Anwendungsmöglichkeit der entwickelten Methodik innerhalb der Reifenkonstruktion beispielhaft anhand einer praxisnahen Fragestellung dargestellt.

Die quantitativen Beispieldaten werden, soweit nicht explizit genannt, alle dimensionsbehaftet in Newton $[N]$ und Millimeter $[mm]$ angegeben.

7.1 Eine Formoptimierung der Scheibe mit Loch

Am Beispiel der Formoptimierung einer Scheibe mit Loch soll der Ablauf der Sensitivitätsanalyse verdeutlicht werden. Entsprechend der unterschiedlichen Modelle (siehe Kapitel 6) ergeben sich verschiedene Darstellungen des Problems, zwischen denen der Übergang sichergestellt werden muß. Die umfangreichen Darstellungen zu diesem Beispiel sollen das Verständnis der Erläuterungen der bisherigen Kapitel erleichtern.

7.1.1 Die Problemstellung

Betrachtet wird eine rechteckige Scheibe der Dicke $d = 1\,mm$ mit den Seitenlängen $a = 36\,mm$ und $b = 20\,mm$, in deren Mitte sich ein kreisrundes Loch mit Radius $r = 5\,mm$ befindet.

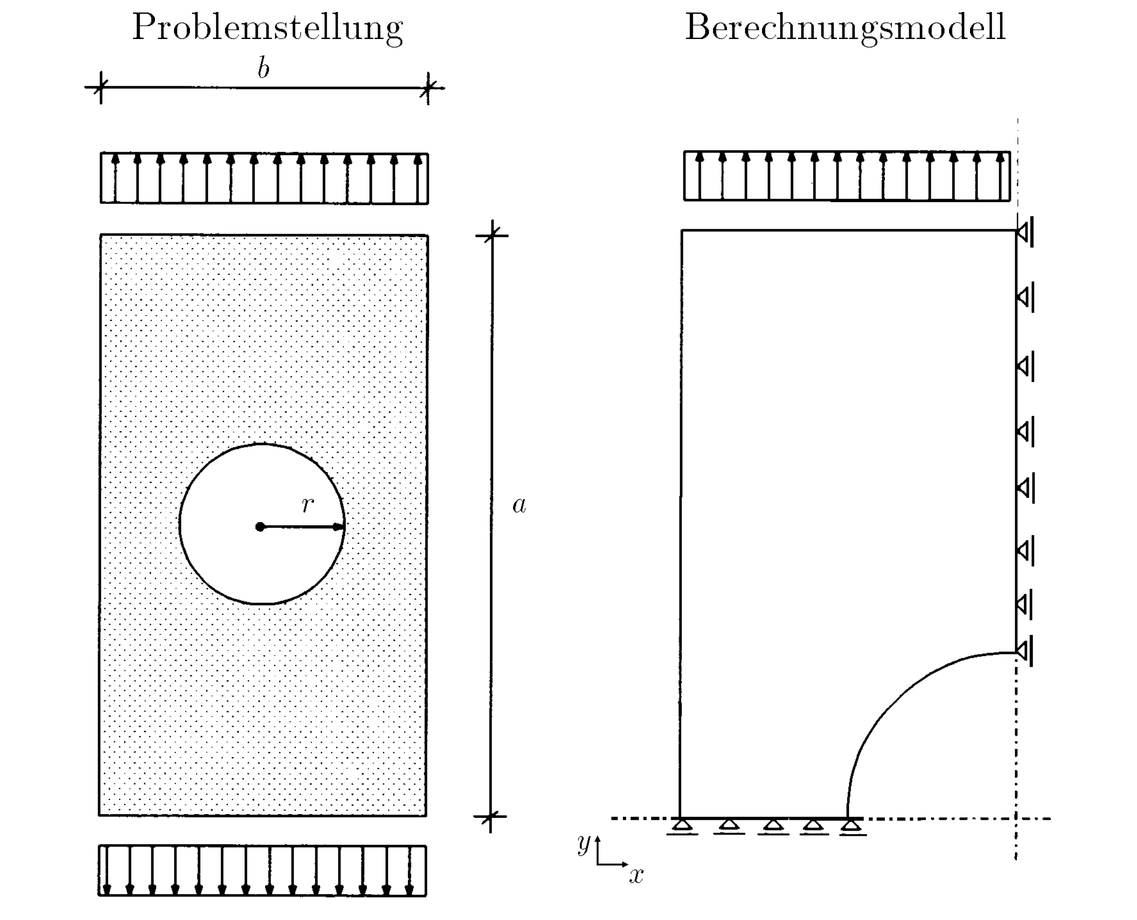


Abbildung 7.1: Problemstellung und Berechnungsmodell

Die Scheibe besteht aus einem inkompressiblen Synthesekautschuk, dessen Materialverhalten durch das Ogden-Material-Gesetz beschrieben ist (siehe Abbildung 7.8). Aufgrund der Symmetriebedingungen wird nur ein Viertel des Systems verschiebungsgesteuert bis zu einer Gesamtverschiebung des Steuerknotens 4 (siehe Abbildung 7.3) von $36\,mm$ auf die dreifache Länge deformiert.

7.1.2 Das Optimierungsmodell

Für die Untersuchung der Problemstellung „Formoptimierung Scheibe mit Loch“ ist die Angabe des Optimierungsziels, der Nebenbedingungen und der veränderbaren Designvariablen notwendig.

Die Optimierungsaufgabe bestehe darin, mit der Veränderung der geometrischen Form, d.h. in diesem Fall wahlweise der Modifikation des Kreisradius´ r und der äußeren Kontur der Scheibe, das Gewicht der Scheibe zu minimieren. Maßgebend für die Beanspruchung ist die maximale Hauptnormalspannung, die unterhalb einer materialabhängigen Schranke bleiben soll. Weiterhin sind die Verschiebungen signifikanter Geometriepunkte beschränkt.

Die genaue quantitative Definition des hier nur verbal beschriebenen Optimierungsproblems wird im Abschnitt 7.1.5 angegeben. An dieser Stelle erfolgt zunächst nur die qualitative Zuordnung der genannten Zielfunktionen, Nebenbedingungen und Designvariablen, d.h. des Optimierungsmodells, auf die Teilmodelle gemäß der nachfolgenden Abbildung.

Modell der Optimalen Formgebung

Entwurfsvariablenmodell:	Radius r des Loches
CAD–Modell:	Darstellung der äußeren Linie als Freiformkurve
FEM–Modell:	Spannungen, Verschiebungen
Technologiedaten:	(Materialparameter, Lastfaktoren)

Abbildung 7.2: Optimierungs–Modell der Scheibe mit Loch

Es soll nochmals (siehe auch Kapitel 6) betont werden, daß sich das Optimierungsmodell nur aus der Auswahl geeigneter Informationen der einzelnen Modelle zusammensetzt und mit dem Optimierungsmodell keine neuen Strukturen definiert werden. Die gesamten Informationen zur Problembeschreibung werden für dieses Beispiel aufbereitet und den einzelnen Modellen zugeordnet.

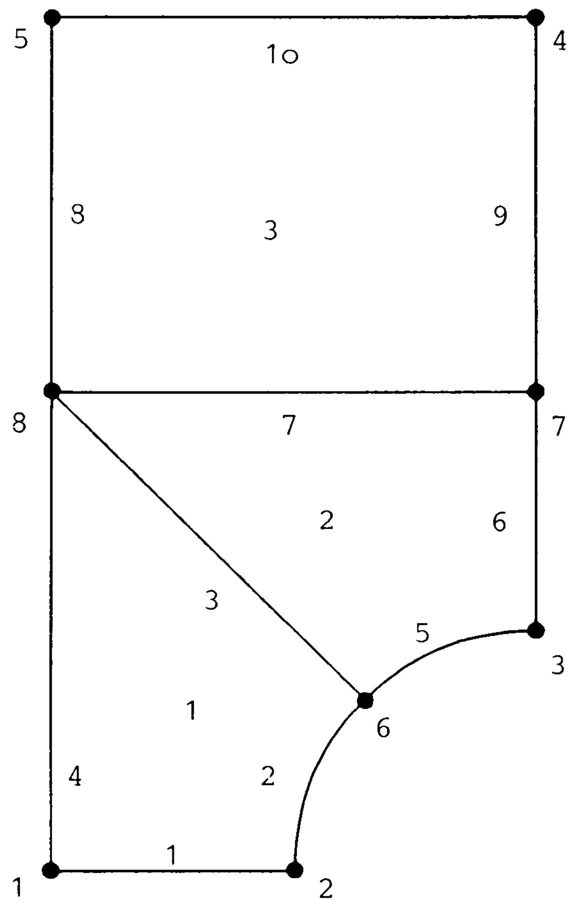
7.1.3 Die Modelle innerhalb der Prozeßkette

7.1.3.1 Das Topologiemodell

Für die Scheibe mit Loch werden die topologischen Elemente Punkte, Linien und Flächen eingeführt, deren topologischen Zusammenhänge in dem Topologiemodell nach Abbildung 7.3 zusammengefaßt sind.

Die Definition des Optimierungsmodells orientiert sich in der Eingabe und in der Problemdarstellung an der obigen Struktur.

Hierarchisches Topologiemodell



Dimension	Objekte	Nummer des Objekts	definiert durch
0	**Punkte**	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	
1	**Linien**	1	Randpunkte: 1, 2
1	**Linien**	2	Randpunkte: 2, 6
1	**Linien**	3	Randpunkte: 8, 6
1	**Linien**	4	Randpunkte: 1, 8
1	**Linien**	5	Randpunkte: 6, 3
1	**Linien**	6	Randpunkte: 7, 3
1	**Linien**	7	Randpunkte: 8, 7
1	**Linien**	8	Randpunkte: 8, 5
1	**Linien**	9	Randpunkte: 7, 4
1	**Linien**	10	Randpunkte: 5, 4
2	**Flächen**	1	Randlinien: 1, 2, 3, 4
2	**Flächen**	2	Randlinien: 3, 5, 6, 7
2	**Flächen**	3	Randlinien: 7, 9, 10, 8

Abbildung 7.3: Das hierarchische Topologiemodell

7.1.3.2 Das Entwurfsvariablenmodell

Mit der obigen Beschreibung ist die Ausgangsgeometrie des Problems vollständig erfaßt, und das Modell der Scheibe mit Loch besteht in diesem Fall aus der Angabe der vier Entwurfsvariablen a, b, d und r sowie der zusätzlich definierten Attribute und Relationen. Für die äußere Linie wird dabei G^1-Stetigkeit gefordert (siehe hierzu z.B. *Bletzinger* [19]). Weiterhin sollen die Randlinien im gemeinsamen Knoten senkrecht aufeinander stehen.

Entwurfsvariablen	Attribute, Relationen
• Länge a	• Die äußere Linie a ist G^1-stetig.
• Länge b	• Die Randlinien stehen im gemeinsamen Knoten senkrecht aufeinander
• Radius r	
• Dicke d	

Abbildung 7.4: Das Entwurfsvariablenmodell der Scheibe mit Loch

Wesentlich für die Problemformulierung ist die Tatsache, daß der genaue Verlauf der äußeren Linie als Freiformkurve nicht aus dem Entwurfsvariablenmodell beschrieben werden kann.

7.1.3.3 Das parametrische Geometriemodell

Zur weiteren Bearbeitung dieser Problemstellung sind die Angaben der Entwurfsvariablen nicht ausreichend, so daß ein parametrisches CAD–Modell eingeführt wird. Dies bedeutet, daß für die Linien und Flächen eine parametrische Darstellung in Form der Gleichung (6.2)

$$\mathbf{X} = \psi_\circ(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) = \sum_{i=1}^{n} \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)\, \mathbf{Y}_i$$

aufgebaut und in der Datenbasis gespeichert werden muß.

In diesem Beispiel sind die Linien mit den Nummern 1, 3, 6, 7, 9 und 10 (siehe Abbildung 7.3) Geraden, deren Parametrisierung in der Form

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_a + t\ (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_a) \tag{7.1}$$

für $\Theta^1 = t \in [0, 1]$ erfolgt. Die zu dieser Beschreibung notwendigen Informationen sind in der Datenbasis des Geometriemodells vorhanden. Die Nummern der Anfangs- und Endpunkte sind dem Topologiemodell zu entnehmen, womit zum einen der Durchlaufssinn definiert ist und zum anderen über die Koordinaten der Punkte auch die Werte $\mathbf{X}_a$ und $\mathbf{X}_e$ zur Verfügung stehen. Über eine Kennung bei der Geometrieeingabe ist die Linie als Gerade zu definieren. Für die weiteren inneren Punkte (in diesem Fall nicht vorhanden) und die FE-Knoten auf der Linie sind bei der Netzerzeugung bzw. -verfeinerung die konvektiven Koordinaten (hier $\Theta^1 = t$) zu speichern.

Die Linien 4 und 8 sind Freiformkurven. Der topologische Zusammenhang (Nummern der Endpunkte, Durchlaufsinn, innere Punkte) sind dem Topologiemodell zu entnehmen. Eine Kennung bei der Eingabe definiert diese Linie als Freiformkurve, so daß anschließend die hierzu notwendige Definition erfolgen muß. Im Programmsystem INA–OPT ist die Darstellung dieser Linienart in der *Bernstein*–Form des Bézier–Polynoms

$$\boxed{\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \hat{M}_i^n(t)\ \mathbf{Y}_i} \tag{7.2}$$

realisiert, siehe hierzu *Farin* [39]. Dabei gilt für die Gestaltsfunktionen der Zusammenhang

$$M_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^i. \tag{7.3}$$

Diese Situation ist in der Darstellung 7.5 aufgezeigt.

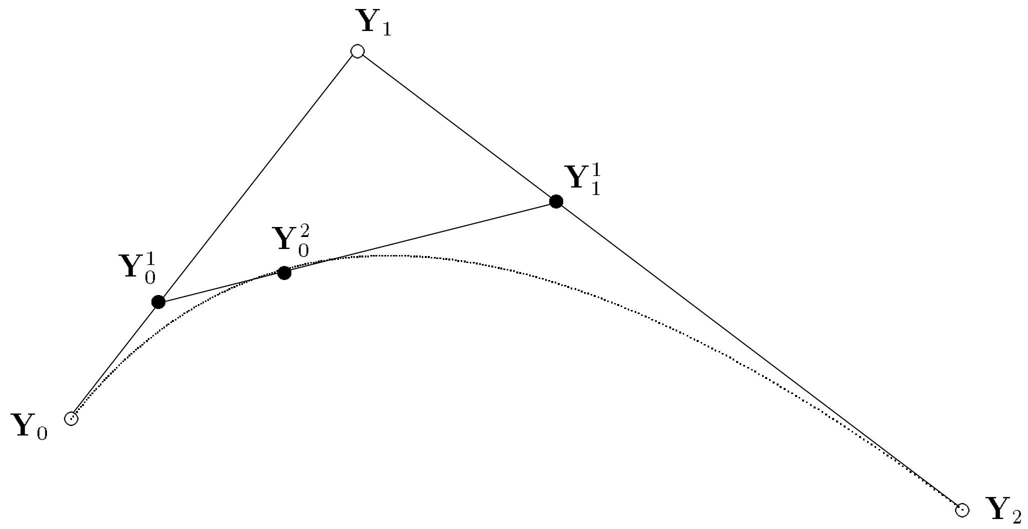


Abbildung 7.5: Darstellung einer Bézier–Kurve

Für die Freiformkurven ist die Angabe von Entwurfsvariablen nicht sinnvoll, und die Definition der Kurve erfolgt unmittelbar in den Größen des parametrischen Geometriemodells. Dieser Zusammenhang ist bei der Optimierung zu beachten.

Die Linien 2 und 5 stellen Kreissegmente dar, die aufbauend auf der topologischen Darstellung durch die Angabe der Entwurfsvariablen, d.h. in diesem Fall durch die Angabe der definierender Variablen

1.) Parameter der beschreibenden Gleichung 2. Ordnung oder

2.) Kreismittelpunkt und Radius oder

3.) Nummern von drei Punkten auf dem Kreis exakt beschrieben werden kann. Die Eingabe kann in der jeweils einfachsten Form erfolgen, da intern zwischen den Darstellungsarten umgerechnet wird.

Aus dem Entwurfsvariablenmodell ist das parametrische CAD-Modell herzuleiten, das in drei verschiedenen Formen erfolgen kann.

1. Die analytische Beschreibung der Punkte auf dem Kreis in Abhängigkeit der natürlichen Parametrisierung durch den Winkel

$$X^1 = X^1_m + r\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad X^2 = X^2_m + r\cos\varphi.$$

2. Exakte parametrische Beschreibung durch rationale Bézier-Kurven.

3. Approximative parametrische Beschreibung durch Bézier-Kurven.

Der Übergang von den Entwurfsparametern zu der dritten, approximativen Darstellung wird beispielhaft für den Kreisbogen dargestellt. In diesem Fall sei die Darstellung der Lage der Kontrollpunkte für einen Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel $\varphi_\circ$ gemäß Abbildung 7.6 dargestellt.

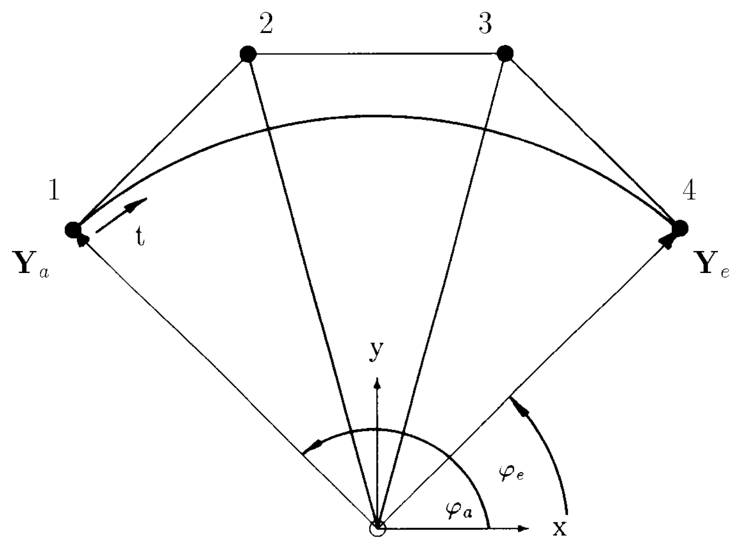


Abbildung 7.6: Approximation eines Kreisbogens durch eine Bézier–Kurve

Der Kreis besitzt den Radius r und sein Mittelpunkt befindet sich im Punkt (X^1_m, X^2_m). Für den Anfangs- und Endwinkel φ_a bzw. φ_e des Kreisbogens gilt

$$\varphi_a = \arctan\frac{X^2_a - X^2_m}{X^1_a - X^2_m} \qquad \text{und} \qquad \varphi_e = \arctan\frac{X^2_e - X^2_m}{X^1_e - X^1_m}.$$

Der Öffnungswinkel ist durch $\varphi_\circ = \varphi_a - \varphi_e$ gegeben. Aus der Darstellung ist die Abhängigkeit der Kontrollpunkte $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_a, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ und $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_e$ von den Koordinaten

(X_m^1, X_m^2) und vom Radius r in der Form

$$
\begin{aligned}
Y_i^1 &= X_m^1 + r\ \cos\varphi_i && \text{für} \quad i = 1,4 \\
Y_i^1 &= X_m^1 + \overline{r}\ \cos\varphi_i && \text{für} \quad i = 2,3 \\
Y_i^2 &= X_m^2 + r\ \sin\varphi_i && \text{für} \quad i = 1,4 \\
Y_i^2 &= X_m^2 + \overline{r}\ \sin\varphi_i && \text{für} \quad i = 2,3
\end{aligned}
$$

mit der Abkürzung

$$\overline{r} := \frac{r}{\cos\frac{\varphi_o}{3}}$$

gegeben. Dabei bezeichnet φ_i den zum Kontrollpunkt $\mathbf{Y}_i$ gehörenden Winkel. Mit diesen Beziehungen können die partiellen Ableitungen der Kontrollpunktkoordinaten nach dem Radius r berechnet werden und es gilt

$$\frac{\partial Y_i^1}{\partial r} = \begin{cases} \cos\varphi_i & \text{für} \quad i = 1,4 \\ \dfrac{\cos\varphi_i}{\cos\frac{\varphi_o}{3}} & \text{für} \quad i = 2,3 \end{cases} \tag{7.4}$$

sowie entsprechend für die Y^2-Koordinate

$$\frac{\partial Y_i^2}{\partial r} = \begin{cases} \sin\varphi_i & \text{für} \quad i = 1,4 \\ \dfrac{\sin\varphi_i}{\cos\frac{\varphi_o}{3}} & \text{für} \quad i = 2,3 \end{cases} \tag{7.5}$$

Weitere Ableitungen können in analoger Weise hergeleitet werden. Damit ist die parametrische Darstellung der Linien dieses Beispiels dargestellt worden.

Für die parametrische Darstellung der Flächen sind folgende Lösungen in INA–OPT implementiert (siehe hierzu auch die Anmerkungen zum Programmpaket CARAT in den Arbeiten von *Bletzinger*, *Kimmich*, *Ramm*, z.B. [19], [54], [21]):

- Bilineare Lagrange-Elemente (Vorbelegung, falls keine weitere Definition erfolgt),
- Quadratische Lagrange-Elemente,
- Bézier-Flächen-Darstellung,
- Coons-Flächen-Darstellung und die
- Lofted-Surfaces-Flächen-Darstellung.

In diesem Beispiel erfolgt die parametrische Flächendarstellung wahlweise nach dem Konzept Bézier-Flächen-Darstellung bzw. der Coons-Flächen-Darstellung, die durch Eingabe einer Kennung definiert wird. Das Topologiemodell liefert wieder den Zusammenhang der Flächen zu den definierenden Linien, aus der für die Randkurven bereits die parametrische Darstellung durch Vervollständigung der eindimensionalen Darstellung ermittelt werden kann. Für die Coons-Flächen-Darstellung ist die Parametrisierung innerhalb der Fläche durch die Angabe der Randlinienbeschreibung gegeben, d.h.

es sind neben der Definition der Fläche über die einzugebende Kennung keine weiteren Eingaben erforderlich.

In der Abbildung 7.7 sind die Kontrollpunkte des CAD–Modells der Scheibe mit Loch eingetragen. Für Kontrollpunkte, deren Koordinaten in den Optimierungsaufgaben als Designvariablen definiert werden, wird eine Nummerierung eingeführt. Somit ist aus dem Topologiemodell nach Abbildung 7.3 und der Darstellung der Kontrollpunkte zu erkennen, daß die Linien $1, 2, 5, 8$ gemäß Gleichung 7.2 als Bézierkurven mit $2, 3$ bzw. 4 inneren Kontrollpunkten beschrieben werden.

Kontrollpunkte im CAD–Modell

COONS-Flächenmodell

Bézier-Flächenmodell

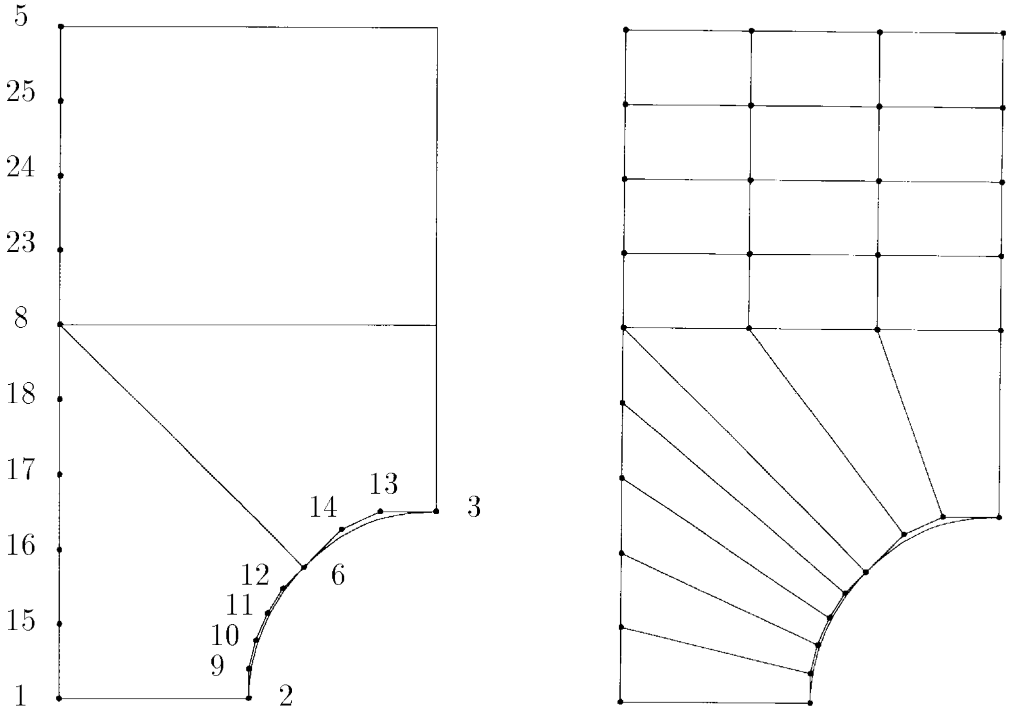


Abbildung 7.7: Kontrollpunkte im CAD–Modell der Scheibe mit Loch

Für die Formoptimierung ebener Strukturen ist in der Regel die Coons-Flächenbeschreibung effektiver einzusetzen, da in diesem Fall die Veränderung der Punkte innerhalb der Fläche eindeutig durch das Verhalten der vier Randlinien bestimmt ist. Für eine Bézier-Flächendarstellung treten zusätzliche Kontrollpunkte im Gebiet auf, deren Koordinaten während der Optimierung geeignet modifiziert werden müssen. Dieses führt in der Regel zur Einführung von zusätzlichen Nebenbedingungen, um eine akzeptable Netzgüte zu erhalten (siehe hierzu auch die Bemerkungen in Abschnitt 7.2.3).

7.1.3.4 Das Technologiemodell

Für die Strukturanalyse sind über die rein geometrischen Informationen hinaus noch weitere sogenannte „Technologiedaten" bereitzustellen. In diesem Fall sind die Angaben über das Material, die Randbedingungen und die Belastung erforderlich.

Technologiedaten

- Randbedingungen gemäß der Darstellung in Abbildung 7.1
- Lasten gemäß der Darstellung in Abbildung 7.1
- Materialgesetz: Ogden-Material nach Gleichung (2.75), d.h.

$$\overline{W} = \tilde{\overline{W}}(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3) = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left\{ \overline{\lambda}_1^{\alpha_p} + \overline{\lambda}_2^{\alpha_p} + \overline{\lambda}_3^{\alpha_p} \right\},$$

mit den Materialparametern

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1.30, & \alpha_2 &= -2.00, & \alpha_3 &= 5.0000, \\ \mu_1 &= 0.63, & \mu_2 &= -0.01, & \mu_3 &= 0.0012 \end{aligned}$$

sowie der Bedingung (2.76)

$$\sum_{p=1}^{N} \mu_p \, \alpha_p = 2\mu$$

an die Materialparameter μ_p und α_p.
Der Schubmodul beträgt damit $\mu = 0,4225 \; N/mm^2$.

Abbildung 7.8: Technologiedaten der Scheibe mit Loch

Die Definition dieser Technologiedaten erfolgt in den kommerziell verfügbaren Programmsystemen in der Regel erst mit dem Aufbau eines Berechnungsmodells im Preprozessor des FE-Programmpaketes. Viele industriell eingesetzte CAD-Systeme sowie die verfügbaren Datenschnittstellen (z.B. IGES, VDA-FS) bieten keine Möglichkeiten diese Technologiedaten bereits zu Beginn der Konstruktion eines Bauteils der Geometrie zuzuordnen.

7.1.3.5 Das Finite–Elemente–Modell

Die Analyse der durch ein Geometriemodell gegebenen und durch die Technologiedaten erweiterten Struktur wird üblicherweise durch numerische Näherungsverfahren durchgeführt. An dieser Stelle wird die Finite-Elemente-Methode betrachtet, die essentiell auf der Triangulation des Gebietes basiert. Damit stellt sich die Aufgabe, aufbauend auf dem CAD–Modell ein FE-Netz zu erzeugen. Hierbei spielt die Güte der Netze, die sich in dem Konvergenzverhalten der numerischen Lösung gegen die exakte (nicht bekannte) Lösung wiederspiegelt, eine besondere Rolle. Für die Netzverfeinerung wurde das in *Rust* [80] beschriebene und von ihm implementierte Netzadaptionsverfahren für die Verwendung in INA-OPT aufbereitet. Das in Abbildung 7.9 dargestellte Netz wurde dabei in fünf Verfeinerungsschritten auf der Grundlage einer linear-elastischen Berechnung aus dem Startnetz erzeugt. Zunächst traten zwei gleichmäßige Verfeinerungsschritte auf. Anschließend ergab die dreimalige Anwendung des Verfeinerungskriteriums nach *Zienkiewicz, Zhu* [112] mit einer Schranke von 0.8 für den normierten Fehler das dargestellte Netz, das sich nur aus 4-Knoten-Vierecks-Elementen zusammensetzt.

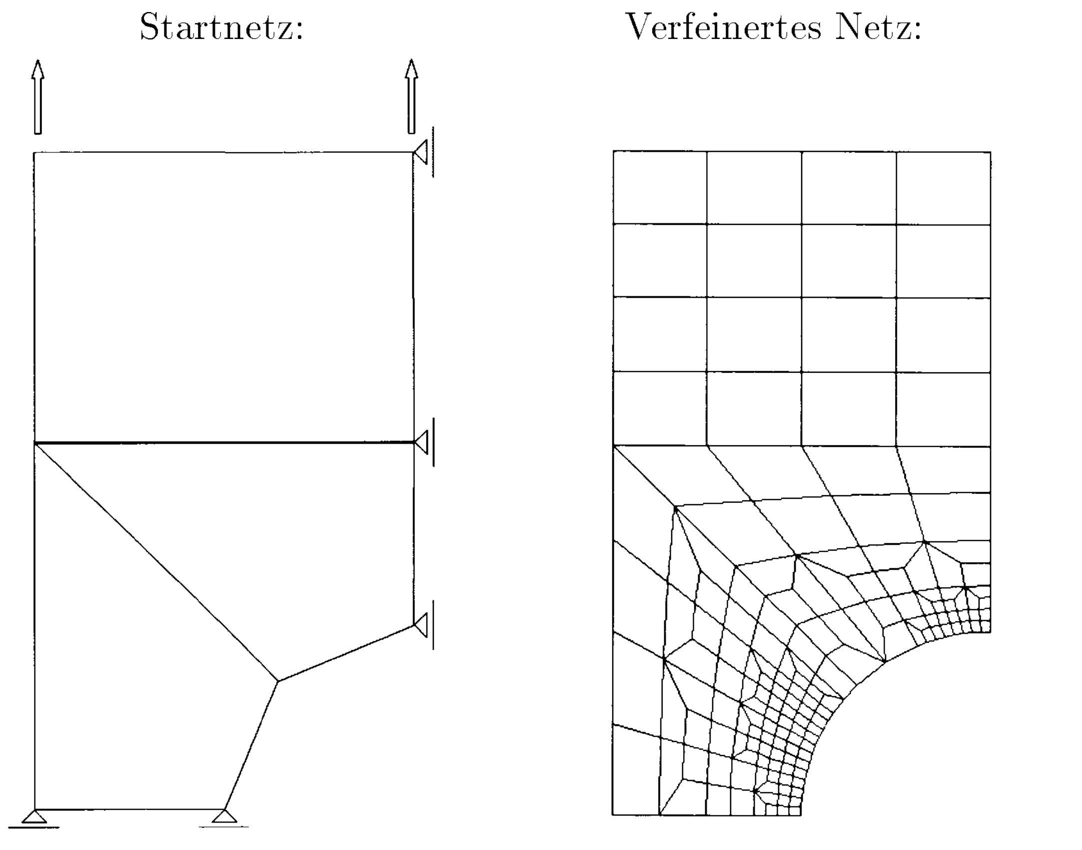


Abbildung 7.9: FEM–Modell der Scheibe mit Loch

Das Netz enthält 255 Elemente mit 364 Knoten und 698 Unbekannten. Die Bandbreite des Gleichungssystems konnte durch den Einsatz einer Knotennummeroptimierung auf 91 begrenzt werden.

7.1.4 Bemerkungen zur Durchführung der Strukturanalyse

Die Berechnung inkompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand kann mit einem reinen Verschiebungsansatz durchgeführt werden, da in diesem Fall die Inkompressibilitätsbedingung exakt und zwängungsfrei erfüllt wird. Damit tritt der unerwünschte Effekt des „Locking“ nicht auf, siehe auch Abschnitt 3.5. Das beobachtete numerische Iterationsverhalten in allen Beispielrechnungen weist die gewünschte quadratische Konvergenz der Verschiebungen in der Nähe der Lösung auf.[1]

Die Scheibe mit Loch kann für das in Abbildung 7.9 angegebenen FE-Netz nicht in einem Schritt auf die geforderte dreifache Länge gestreckt werden. Das Lösungsverhalten der Struktur ist entsprechend dem gewählten Materialgesetz stark nichtlinear, so daß das Newton-Verfahren der nichtlinearen Gleichgewichtsiteration im Startpunkt der unverformten Konfiguration eine Abstiegsrichtung liefert, die zu einem Iterationspunkt der Verschiebungen mit Elementdurchdringungen führt.

Etliche Testrechnungen mit unterschiedlich stark verfeinerten Netzen ließen erkennen, daß grobe Netze eher unempfindlich sind, während besonders stark verfeinerte Netze eine ebenfalls feine Lastinkrementierung benötigten. Als Beispiel sind in Abbildung 7.10 die maximale Verschiebung des Strukturpunktes 4 angegeben, für den noch keine Elementdurchdringung auftritt.

Gleichmäßige Verfeinerung	Adaptive Verfeinerung	Verschiebung [mm]
Startnetz		24.0
1 gleichmäßige Verfeinerung		22.0
2 gleichmäßige Verfeinerungen		16.0
3 gleichmäßige Verfeinerungen		10.9
3 gleichmäßige Verfeinerungen	1 adaptive Verfeinerung	10.3
3 gleichmäßige Verfeinerungen	2 adaptive Verfeinerungen	10.0

Abbildung 7.10: Angabe der maximal in einem Schritt ohne Auftreten von Elementdurchdringungen aufzubringenden Gesamtverschiebung bei unterschiedlichen FE-Netzen

Das hier für den ebenen Spannungszustand beschriebene Phänomen tritt bei Berechnungen im ebenen Verzerrungszustand und der Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung noch verstärkt auf. Um den Programmabbruch durch ein Auftreten von Elementdurchdringungen zu vermeiden ist die Gesamtdeformation in vier Schritten aufgebracht worden.

[1] Die Berechnung und Optimierung von Materialien im ebenen Verzerrungszustand benötigt die in Abschnitt 4.2 beschriebene gemischte Finite-Elemente-Methode um die „Locking“-Phänomene zu vermeiden. An dieser Stelle wird auf eine explizite Darstellung akademischer Beispiele im räumlichen, ebenen bzw. axisymmetrischen Verzerrungszustand zur Beschränkung des Umfangs dieser Arbeit verzichtet, siehe hierfür das in Abschnitt 7.3 behandelte Beispiel der Formoptimierung eines PKW-Reifens. Die Berechnung und Optimierung der z.B. von *Ramm* [75] und *Parisch* [71] behandelten Gummischeibe mit Loch für den ebenen Spannungszustand und vergleichend für den ebenen Verzerrungszustand ist in *Barthold* [7] beschrieben.

Tritt während einer Strukturanalyse innerhalb der Optimierungsberechnung trotz vorsichtiger Lastinkrementierung eine Elementdurchdringung auf, so werden einige Line-Search-Schritte für die Designvariablen durchgeführt bis ein Design erreicht ist, bei dessen Deformation keine Elementdurchdringungen (in der verformten Konfiguration) auftreten. Diese Problematik kann bei der linearen Finite-Elemente-Berechnung nicht auftreten, da dort das Gleichgewicht am unverformten Körper erfüllt sein muß. Durch die gewählte und in Abschnitt 6.4 beschriebene Art der Netzveränderung bei Formänderung ist das Netz der unverformten Konfiguration stets durchdringungsfrei.

Das unverformte und verformte Netz sowie die Hauptnormalspannungen des Cauchy-Spannungstensors im verformten Endzustand sind in Abbildung 7.11 dargestellt.

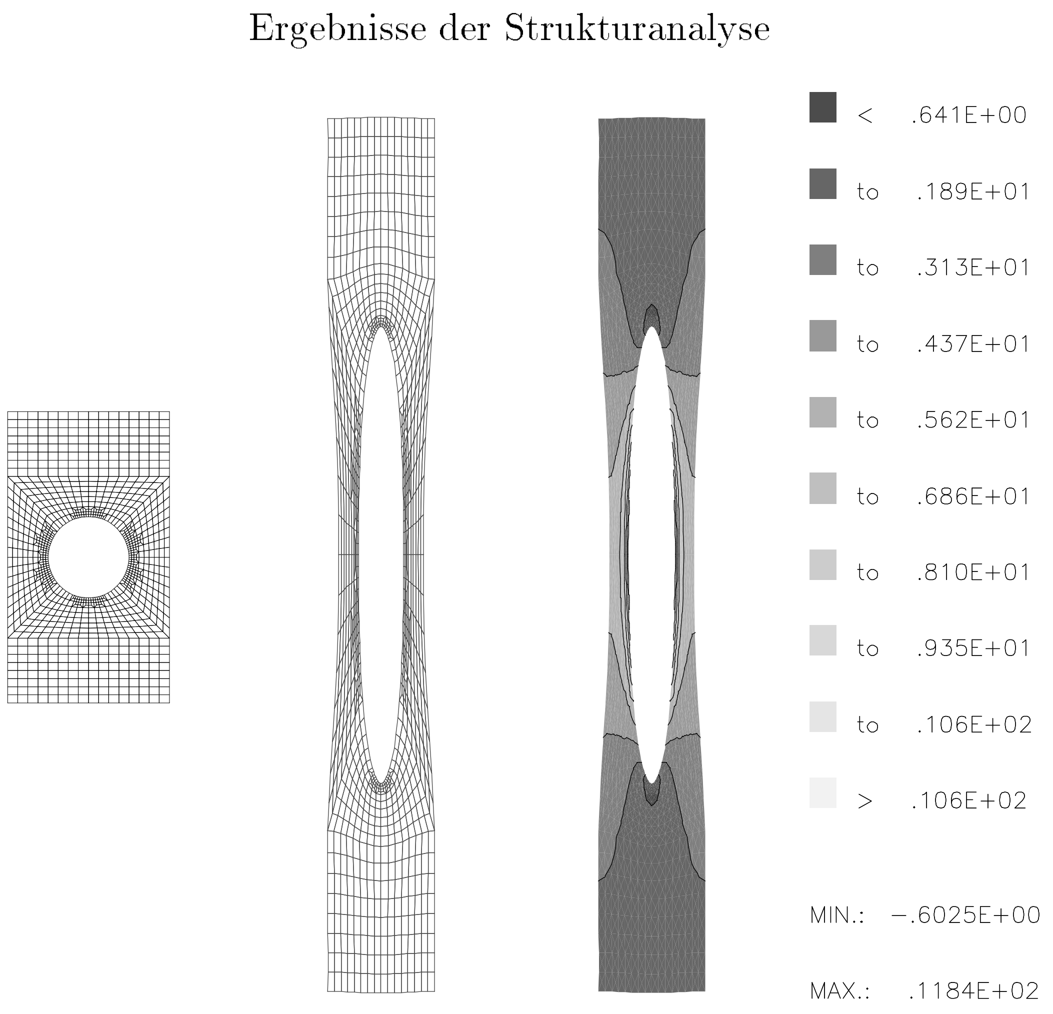


Abbildung 7.11: Darstellung des unverformten und verformten Netzes sowie der Hauptnormalspannungen über die verformte Konfiguration

7.1.5 Ergebnisse der Optimierungsaufgabe

Mit diesem Optimierungsproblem wurde die im weiteren beschriebene Aufgabe untersucht. Für die Angaben zu den Bezeichnungen der Linien, Kontrollpunkte und des eingeführten Koordinatensystems siehe die Abbildungen 7.1, 7.3 und 7.7.

- **Zielfunktion:**
  Minimierung des Gesamtgewichts
- **Nebenbedingungen:**
  - Beschränkung der maximalen Hauptnormalspannungen T_I des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T}$ der Momentankonfiguration unterhalb der Grenzspannung von $9,0\,N/mm^2$
  - Beschränkung der Verschiebung der Punkte 2 und 3

    $$u_2 \leq 2,5\,mm \qquad \text{und} \qquad v_3 \leq 25,0\,mm$$
  - Gewährleistung der G^1-Stetigkeit der Linien 4 und 8, d.h. die Kontrollpunkte $8, 18, 23$ müssen auf einer Geraden liegen.
  - Gewährleistung der G^1-Stetigkeit der Linie 4 für die symmetrische Ergänzung des Berechnungsmodells zur Gesamtgeometrie, d.h. die Kontrollpunkte 1 und 15 müssen gleiche x-Koordinaten besitzen.
- **Designvariablen:**
  x-Koordinaten der Kontrollpunkte $1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24$ der äußeren Linie nach Abbildung 7.7 mit den Schranken $0 \leq x_{KP} \leq 4,5\,mm$.

Abbildung 7.12: Definition des Optimierungsproblems

Die maximale Hauptnormalspannung T_I des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T}$ ergibt für die Ausgangsgeometrie nach Abbildung 7.11 einen Wert von $T_I = 11,84\,N/mm^2$, der über dem gewünschten Grenzwert von $9,0\,N/mm^2$ liegt. Dies führt dazu, das die Optimierung im unzulässigen Bereiches der Designvariablen beginnt. Für die numerisch effektive Behandlung der Optimierungsaufgabe wurden die Zielfunktion, Nebenbedingungen und Designvariablen durch Division mit den jeweiligen Startwerten normiert. Dieses führt zu einer günstigeren Kondition der BFGS-Approximation der Hessematrix der Lagrangefunktion dieses Optimierungsproblems, siehe z.B. die Bemerkungen hierzu in *Schittkowski* [84], [85], [86].

Der Algorithmus konnte die Optimierungsaufgabe unter Verwendung der vollständig analytisch bereitgestellten variationellen Sensitivitäten effektiv lösen. Für die optimierte Geometrie der Scheibe mit Loch sind in Abbildung 7.13 das Finite-Elemente-Netz und die Lage der Kontrollpunkte dargestellt. In Abbildung 7.14 werden die deformierten Konfigurationen sowie deren Spannungszustände (aufgetragen über die unverformte Konfiguration) der Ausgangsgeometrie und der optimierten Form gegenübergestellt.

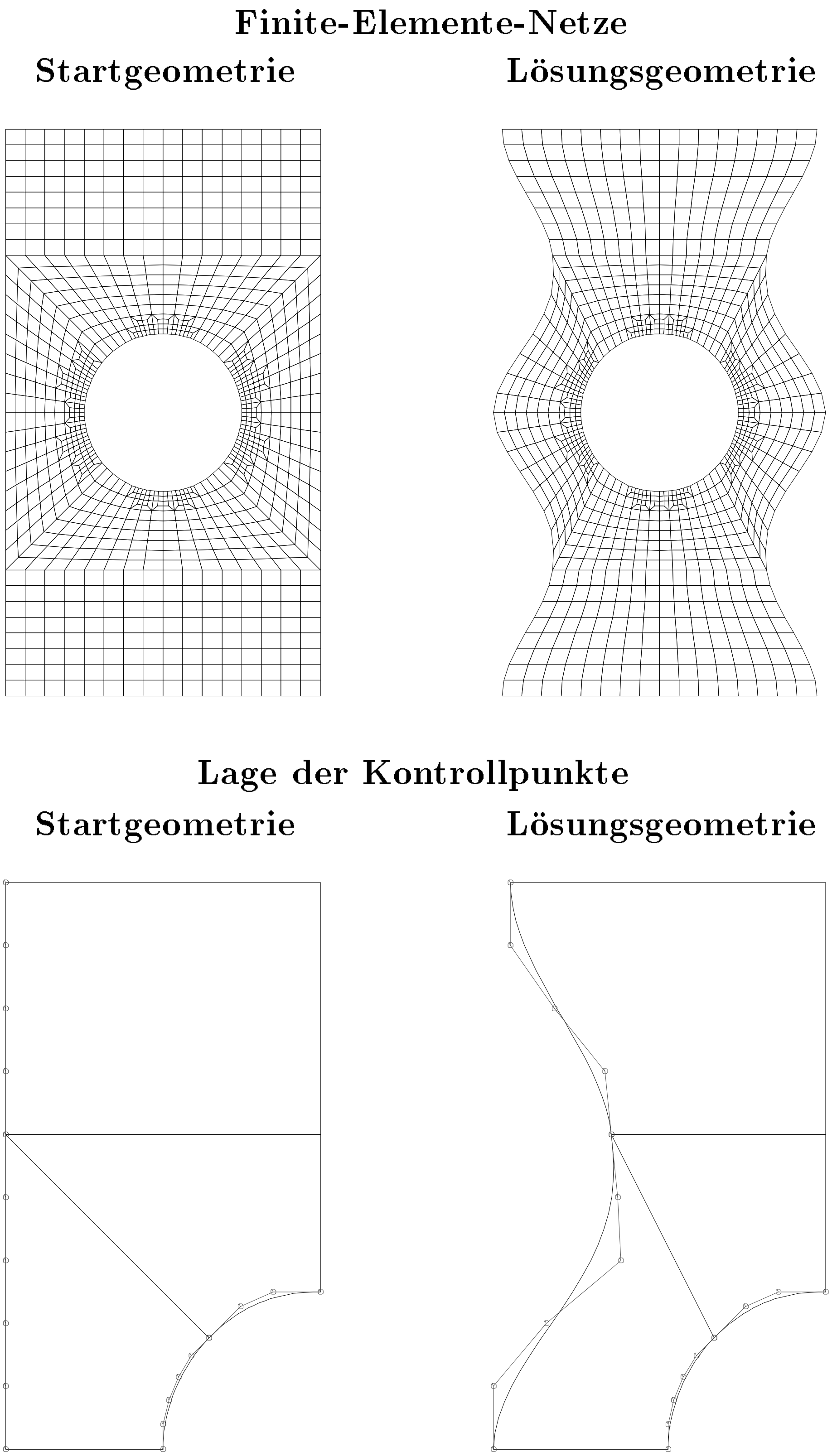


Abbildung 7.13: Vergleich der Ausgangsgeometrie mit der optimalen Form

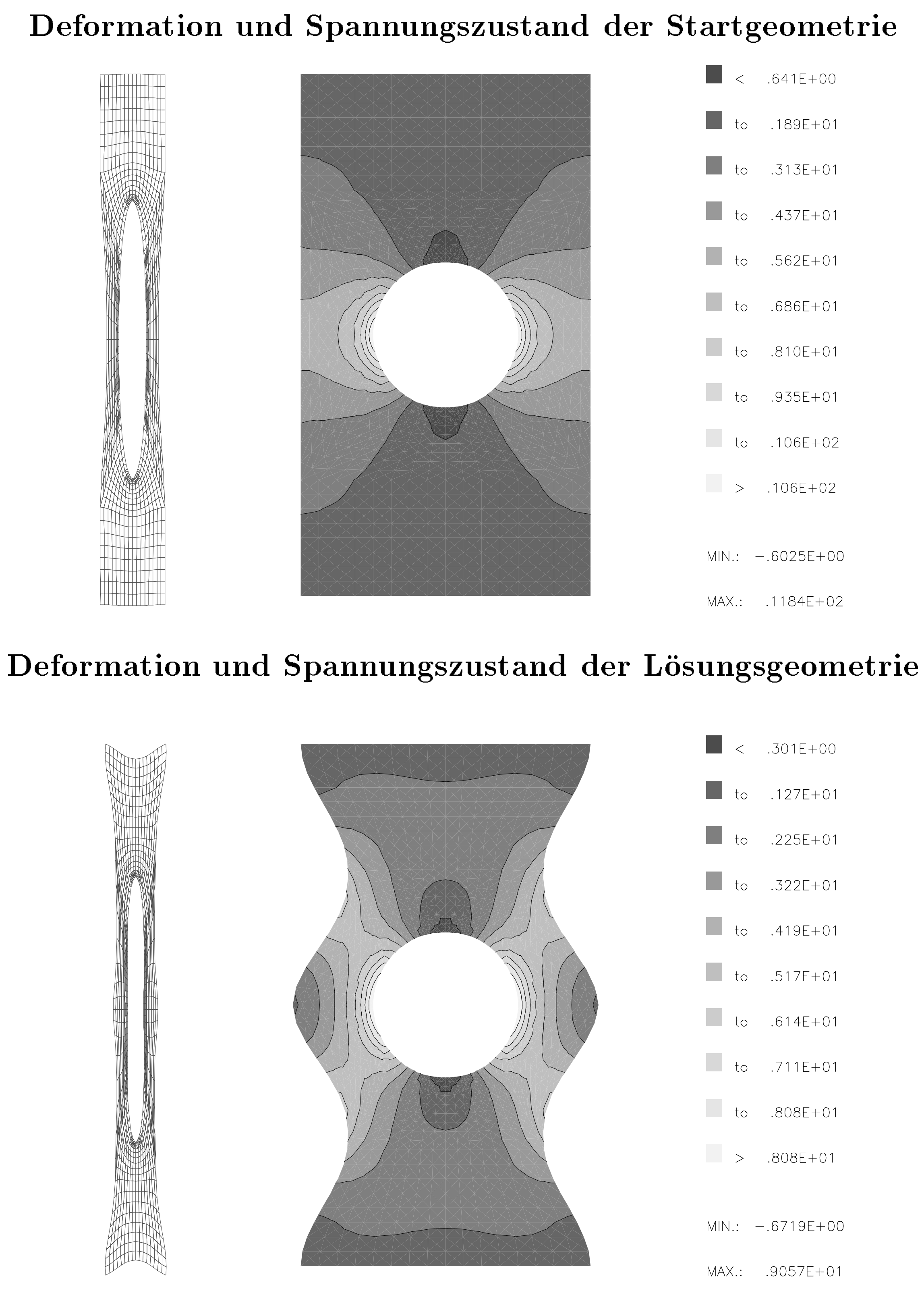


Abbildung 7.14: Darstellung der Deformation und des Spannungszustands der optimalen Form

Diese Optimierungsberechnung (wie auch alle weiteren) wurde mit dem SQP-Verfahren in einer Implementation von Prof. K. Schittkowski, Universität Bayreuth, durchgeführt (siehe die Bemerkungen hierzu in Abschnitt 6.1).[2] Die Leistungsdaten des Algorithmus sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. Die Bezeichnungen für die angegebenen Werte sind der Quelle des SQP-Verfahrens entnommen und ausführlich in den Arbeiten von *Schittkowski* beschrieben.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	24.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	22.7
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	18
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	20
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	18
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.9 \cdot 10^{-4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$9.0 \cdot 10^{-16}$

Abbildung 7.15: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Im Lösungspunkt ergeben sich für die Kontrollpunkte $1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24$ und 25 die folgenden Werte der x-Koordinaten (in gleicher Reihenfolge)

$$0,4604; \quad 0,4604; \quad 2,1307; \quad 4,50; \quad 4,392; \quad 4,186, \quad 3,984; \quad 3,962; \quad 2,416.$$

Dabei befindet sich die Koordinate des Kontrollpunktes 17 auf der oberen Schranke von $4,5\,mm$. Ein weiterer Abstieg der Zielfunktion ist daher bei der Aufgabe dieser Schranken für die Koordinatenwerte der Kontrollpunkte möglich.

Die Behandlung einer modifizierten Optimierungsaufgabe, bei der die Lochform zur Gewichtsminimierung verändert werden kann ist, in *Barthold* [7] vorgenommen worden.

[2]Für die freundliche Bereitstellung seiner Realisation des SQP-Verfahrens möchte ich Hernn Prof. K. Schittkowski, Universität Bayreuth, recht herzlich danken.