

AßMUS, Daniela & FRITZLAR, Torsten  
Halle an der Saale

## **Flächenvergleiche durch Dritt- und Viertklässler\*innen – Lösungserfolg und Vorgehensweisen**

Auch wenn Fähigkeiten zum Vergleichen sowie zum Bestimmen von Flächeninhalten und zugrunde liegende Vorstellungen und Kenntnisse sowohl für den Mathematikunterricht über verschiedene Schulstufen hinweg als auch für verschiedene Lebensbereiche relevant (z. B. Kuntze, 2018) sind, liegen für das Grundschulalter bislang nur wenige empirische Befunde zu Kompetenzen von Grundschüler\*innen zu Flächeninhalten vor. Mit einem Forschungsprojekt zum Vergleichen von Flächeninhalten in der Primarstufe soll ein Beitrag zur Reduktion dieser Forschungslücke geleistet werden. Dabei interessieren wir uns neben Lösungsquoten bei entsprechenden Aufgaben – die Hinweise auf schwierigkeitsbeeinflussende Aufgabenmerkmale geben können – insbesondere für Vorgehensweisen von Schüler\*innen sowie die Begründungen des Vergleichsurteils, über die sich dann unter anderem auch kindliche Vorstellungen zu Begriffen wie Fläche oder Flächeninhalt rekonstruieren lassen.

Im Rahmen dieses Forschungsprojekts wurde 2023 eine erste Interviewstudie zunächst mit 46 Viertklässler\*innen durchgeführt. In den klinischen Interviews verglichen die Schüler\*innen jeweils zwei oder drei Polygone qualitativ hinsichtlich ihrer Größe miteinander, die auf einem Quadrat- oder einem Punktgitter vorgegeben waren. Uns interessierte dabei insbesondere, wie das jeweilige Gitter für den Flächeninhaltsvergleich genutzt wird und ob sich gitterspezifische Unterschiede in den Vorgehensweisen der Schüler\*innen zeigen (Aßmus & Fritzlar, i. Dr.). Im vergangenen Jahr konnten weitere Interviews mit Viert- und vor allem mit Drittklässler\*innen durchgeführt werden, sodass mittlerweile Daten – Videografien und Transkripte – von 120 Schüler\*innen (Klassenstufe 3: 45 Interviews, Klassenstufe 4: 75 Interviews) zur Verfügung stehen. Da sich die Aufgaben der ersten Studie als teilweise recht einfach erwiesen hatten, wurden die Aufgabenserien für die zweite Studie um zwei anspruchsvolle Aufgaben ergänzt.

Die größere Untersuchungsgruppe, die sich aus Schüler\*innen von fünf Grundschulen zusammensetzt, erlaubt nun erste Aussagen zum empirischen Schwierigkeitsgrad von Vergleichsaufgaben und ermöglicht eine empirische Überprüfung theoretisch abgeleiteter Schwierigkeitsfaktoren. Zudem ist es möglich, den Bearbeitungserfolg von Dritt- und Viertklässlerinnen miteinander zu vergleichen.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

## Ergebnisse

In den Abbildungen 1 bzw. 2 sind die Anteile korrekter Einschätzungen in der Klassenstufe 3 vs. 4 bzw. bei Flächenvorlagen auf Quadratgitter vs. auf Punktgitter für alle zehn Aufgaben aufgeführt, bei denen zwei Flächen qualitativ zu vergleichen waren. Grundlegend war hier die finale Einschätzung der Schüler\*innen. In manchen Fällen wurde das Vergleichsurteil (teilweise mehrfach) verändert, zum Teil unmittelbar nach der ersten Einschätzung oder aber während der Begründung des Urteils.

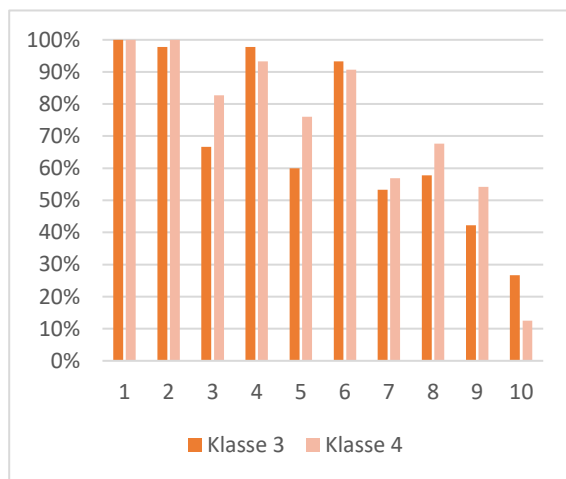


Abb. 1: aufgabenbezogene Lösungsquoten in den Klassenstufen 3 und 4

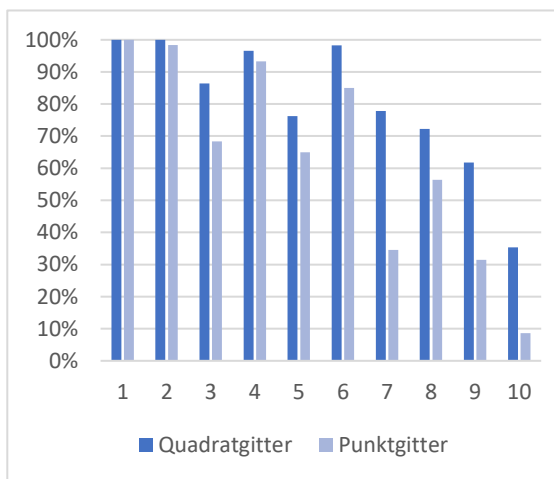


Abb. 2: aufgabenbezogene Lösungsquoten auf Quadratgitter und Punktgitter

Einige Aufgaben (A1, A2, A4 und A6) wurden von nahezu allen Schüler\*innen erfolgreich bearbeitet. Dies war aus theoretischer Sicht zu erwarten, da sich die zu vergleichenden Figuren bei weitgehender Formgleichheit in ihrer Ausdehnung nur hinsichtlich einer Richtung unterschieden (z. B. A1: unterschiedliche Höhe bei gleicher Breite), die Figuren kongruent waren (A4: eine Form gedreht und gespiegelt) bzw. viele verschiedene (auch nicht flächenbezogene oder allgemeingültige) Vorgehensweisen zum korrekten qualitativen Vergleichsurteil führten (A6: Durch Zählen von Punkten auf der Randlinie, Zählen von durch das Raster angedeuteten Teilflächen ohne Berücksichtigung ihrer Größe oder separates Zählen von Dreiecken und Quadraten (ohne Beziehungen zwischen Dreiecken und Quadraten zu nutzen) erhält man ebenso das korrekte Ergebnis wie durch Bestimmen der Flächeninhalte anhand der jeweiligen Anzahl an (zusammengesetzten) Einheitsquadraten).

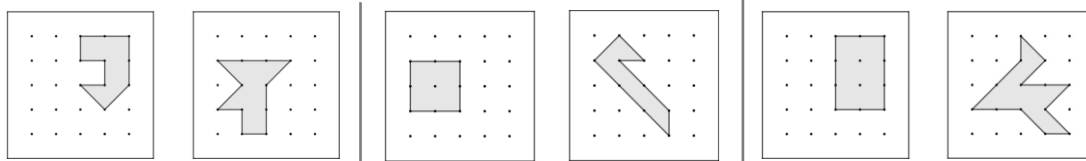
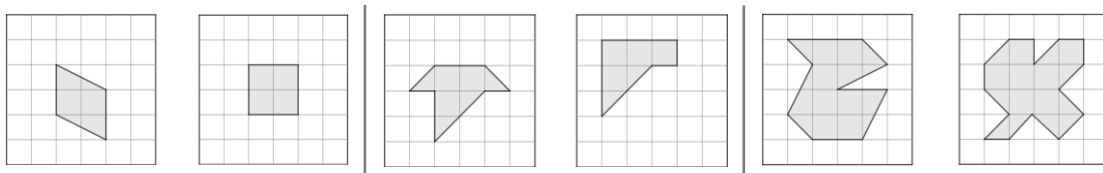


Abb. 3: A6, A7 und A9, hier auf dem Punktgitter

Für die Aufgaben 7 bis 10 lassen sich in beiden Klassenstufen deutlich geringere Lösungsquoten verzeichnen, alle liegen unter 60%. Der dadurch nachgewiesene erhöhte empirische Schwierigkeitsgrad lässt sich ebenfalls theoretisch begründen, wie hier exemplarisch an den Aufgaben 7 und 9 ausgeführt wird: So kann der visuelle Eindruck zu fehlerhaften Einschätzungen verleiten, wenn eine größere Ausdehnung der Figur nicht mit größerem Flächeninhalt einhergeht. Gleichzeitig weisen diese Figuren mit größerer Ausdehnung auch eine längere Randlinie bzw. mehr Punkte auf dieser auf bzw. enthalten viele (A7 sogar ausschließlich) Dreiecke, die es als Teilflächen zu berücksichtigen gilt. Damit führen hier Vergleichskriterien wie die Anzahl der Randlinienpunkte, die Länge der Randlinie, die Anzahl der Teilflächen unabhängig von ihrer Größe sowie das reine Urteilen nach visuellem Eindruck im Gegensatz zu Aufgabe 6 meist unmittelbar zu einem fehlerhaften Vergleichsurteil. Auch prinzipiell tragfähige Vorgehensweisen, wie das Umbauen einer Figur in die andere bzw. das Zusammensetzen von Dreiecken zu Quadraten und Bestimmen von deren Anzahl, sind durch mehrere notwendige Teilhandlungen recht fehleranfällig.



**Abb. 4:** A3, A5 und A10, hier auf dem Quadratgitter

Größere Unterschiede zwischen den Klassenstufen zeigen sich bei den Aufgaben 3, 5, 8, 9 und 10. Insbesondere für die Aufgaben 3 und 5 ergibt sich in der vierten Klassenstufe eine deutlich höhere Lösungsquote. Die zu vergleichenden Figuren unterscheiden sich bei diesen Aufgaben nur in wenigen Elementen; in beiden Fällen kann man sich eine aus einem oder zwei Quadraten bestehende Teilfläche der rechten Figur diagonal geteilt und teilweise umgelegt vorstellen. Möglicherweise fällt es Viertklässler\*innen leichter als Drittklässler\*innen, die Flächengleichheit der so entstandenen Teilflächen zur vollständigen Quadrat-/Rechtecksfläche der rechten Figur zu erkennen, während die Umsetzung von ähnlichen Ideen ab Aufgabe 7 eventuell durch komplexitätsbedingte Schwierigkeiten behindert wird. Ein weiterer Grund für die unterschiedlichen Lösungsquoten könnte darin bestehen, dass mehr Drittklässler\*innen nach visuellem Eindruck entscheiden, da die jeweils linken Figuren eine größere Ausdehnung in einer Richtung aufweisen. Auch dies könnte damit zusammenhängen, dass ihnen Strategien zum Zusammensetzen von Flächen noch fehlen.

Die höhere Lösungsquote in der dritten Klasse bei Aufgabe 10 ist wahrscheinlich ein Zufallsbefund, da viele Kinder mit eigentlich tragfähigen Vorgehensweisen wie dem Zusammensetzen von Dreiecken zu Quadraten aufgrund der hohen Teilflächenanzahl den Überblick verloren und somit zur falschen Einschätzung gelangten, während bei einigen Kindern ohne erkennbare Kriterien Zufallstreffer zu verzeichnen waren. Auch diejenigen, die sich bspw. an der Ausdehnung der Figuren in beiden Richtungen orientierten, kamen zum richtigen Ergebnis.

Beim Vergleich der beiden Gittervorlagen zeigt sich, dass Aufgaben auf dem Quadratgitter durchweg besser als die gleichen Aufgaben auf dem Punktgitter bearbeitet wurden. Auch dieses Ergebnis entspricht den theoretischen Annahmen, da durch das Quadratgitter Begrenzungen von nutzbaren Flächeneinheiten gegeben sind. Stark zum Tragen kam dies insbesondere bei den Aufgaben 7, 9 und 10, die viele Dreiecksflächen enthalten. So gelang es vielen Kindern auf dem Punktgitter nicht, den länglichen Teil in Aufgabe 7 (linke Figur) in nutzbare Teilflächen zu zerlegen, da sie Zerlegungen parallel zu den diagonalen Begrenzungslinien der Fläche vornahmen. Bei Aufgabe 9 stellte sich das unten abstehende Parallelogramm auf dem Punktgitter als schwierigkeitssteigernd heraus, da dieses nicht als flächengleich zu einem Einheitsquadrat angesehen bzw. seine Zerlegbarkeit in zwei Dreiecke nicht gesehen wurde.

Nicht nur die den theoretischen Überlegungen folgenden empirischen Schwierigkeiten, sondern auch die Analysen der videografierten und in wesentlichen Teilen transkribierten Interviews zeigen, dass die (auch für die Konzeption der Aufgaben) antizipierten Vorgehensweisen zum Vergleichen der Flächengrößen tatsächlich bei den teilnehmenden Grundschüler\*innen auftreten. Zusätzlich konnte beispielsweise die Berücksichtigung besonderer geometrischer Details oder auch der (mit kindlichen Vorstellungen verknüpften) Gestalt der Flächen beobachtet werden. Eine differenzierende Beschreibung und Systematisierung aller rekonstruierten Vorgehensweisen kann hier aus Platzgründen nicht erfolgen.

## Literatur

- Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 149–177). Springer Spektrum. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_7)
- Aßmus, D. & Fritzlar, T. (2024). Wie vergleichen Grundschüler\*innen Flächeninhalte von Vielecken? – eine Interviewstudie. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*. WTM-Verlag.