FAHSE, Christian
Landau

Narratives ("Didaktische Erzählungen") as an extension of basic concepts ("Grundvorstellungen")?

A thoroughly revised English version and numerous comments, documentating the conceptual work done here, can be found in Fahse (2025).

Da Kalküle durch digitale Hilfsmittel immer weniger Bildungsinhalt sein können, gewinnt die Einsicht in Zusammenhänge eine wachsende Bedeutung. Eine stoffdidaktische Betrachtung schlägt vor, Grundvorstellungen durch "Stories" (so die Bezeichnung im Unterricht) zu erweitern. Hierzu bietet der Begriff der *Erzählung aus den Sozialwissenschaften eine zu diskutierende Rahmung. Erste Erfahrungen mit der Story zur Differentialrechnung in einem Grundkurs werden skizziert.

Begriff und Bezeichner, Fragestellung des Artikels

*Erzählung und das teilweise synonym gebrauchte *Narrativ ist ein Modewort mit durchaus uneinheitlicher Semantik (Assmann 2022, Hermann et al. 2008). Wie bei *Grundvorstellung kann einerseits der Bezeichner selbst mit seiner Etymologie oder der Alltagssprachgebrauch fahrlässig eine bestimmte Bedeutung insinuieren, die den wissenschaftlichen Diskurs verunklart. Solche Bezeichner werden hier mit * gekennzeichnet als Hinweis darauf, dass sie in jeder Veröffentlichung eine Präzisierung erfordern, was leider oft nicht erfolgt. Eignet sich ausgerechnet der Begriff *Erzählung mit seiner Nähe zur Propaganda und mehr noch zur postmodernen Negation objektiver Wahrheit für die Mathematikdidaktik?

Zu *Grundvorstellung

Eine detaillierte Literatursichtung und die für diesen Artikel gültige Begriffsklärung findet sich in Fahse (2022). Die Einführung dieses Konzeptes in die Didaktik zielte darauf ab, einer einseitigen Kalkülorientierung entgegenzuwirken und Kompetenz- und Verstehensorientierung anzumahnen. Das Verstehen wird gezielt durch bestimmte Vorstellungen, die die Lernenden ausbilden sollen, erreicht. Konkrete Vorstellungen gehen (wie verbundene Emotionen auch) über das, was Sache ist, was kalkülhaft mathematisch vollständig fixiert werden könnte, hinaus und sind individuell - ähnlich wie erzähltheoretisch eine *Erzählung (story) über die erzählten Tatbestände (plot) hinausgeht. Meinem Kenntnisstand nach hat Jürgen Roth vermutlich als erster das Begriffselement des Verständnisankers eingeführt. Dies ist ein weiterer Hinweis darauf, dass die konkrete *Erzählung im Unterrichtsprozess zur gruppenspezifisch ausgeprägten Grundvorstellung gehört. Denn die

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Lernenden beziehen sich nicht auf irgendeinen Anker, sondern z. B. konkret auf das Füllen einer Badewanne, wenn sie Konzepte von Ableitung und Integral in einer konkreten Situation anwenden. An dieser Stelle möchte dieser Artikel noch einen Schritt weitergehen und nicht nur einen Anker, also einen speziellen Kontext, an dem die Lernenden zum ersten Mal Neues verstanden haben, sondern eine *Erzählung des "großen Ganzen" vorschlagen, die also noch umfassender ist und z.B., Grundvorstellungen verbinden kann.

Zu *Erzählung (nur nicht-fiktionale, sozial-funktionale *Erzählungen)

Wenn der in der Mathematikdidaktik stark rezipierte Entwicklungspsychologe J. Bruner die Bedeutung von Narration für das Verstehen hervorhebt, mag es erstaunen, dass der nicht-fiktionalen *Erzählung so wenig Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Im Material Fahse (2025) wird aufgeführt, welche Fundstellen herangezogen wurden, um die folgenden Merkmale einer *Erzählung herauszupräparieren: Sie (1) beziehen sich auf Handlungen oder Verhältnisse, die (2) in einer gewissen Abfolge (was Nebenstränge nicht ausschließt) (3) sinnhaft verknüpft werden, (4) sind zumindest teilweise von (auf Mathematik bezogenen) Emotionen begleitet und (5) haben eine bewusste oder unbewusste (gesellschaftliche) Absicht oder Funktion, die potentiell zu einer Handlungs- oder Sichtweisenänderung der Adressaten im Sinn einer Angleichung an eine Gruppe führt. *Erzählungen zeichnen sich also aus durch Strukturiertheit als Linearität (2) und Sinnhaftigkeit (3), Eindrücklichkeit (4) und sind sozial oder kulturell funktionale Konstrukte (5). Die Sinnhaftigkeit (3) kann logisch, kausal oder temporal sein, muss aber nicht unbedingt faktenbasiert sein (3b), sondern vor allem einer Erzähllogik folgen. Der hier verwendete *Erzählungsbegriff übernimmt vom *Narrativ die Funktionalität und gruppenspezifische Legitimität (5) und von der literarischen Erzählung die Geschlossenheit. Die didaktische *Erzählung wird auf Community-, Lerngruppen- oder individueller Ebene instantiiert. Um die kognitionspsychologisch wichtigen Emotionen zu wecken, ist eine Verbindung mit einem schüleraktivierenden und problemorientierten Unterricht sinnvoll.

Für konkrete *Erzählungen im Unterricht wird für die Lernenden die Bezeichnungen "Story", "Geschichte hinter…" vorgeschlagen - operationalisiert: "Stelle die sachlogische Entwicklung der Integralrechnung dar und achte auf Sinnbezüge". Ein Beispiel für die Differentialrechnung skizziert Abb. 1 mit Lehrkräften als Adressaten. Inwiefern handelt es sich dabei um eine *Erzählung? Bei (1) sind Weg und Geschwindigkeit sowie die fünf verschiedenen Handlungsabschnitte in Abbildung 1 zu nennen, (2) wird durch die Schritte in der linken Spalte deutlich, (3) zeigt sich darin, dass der jeweils nächste Schritt auf Defizite oder Entdeckungen im vorherigen Schritt reagiert. (4) deutet sich an in den Wörtern "leider", "Versuch", "immer noch", "Vermutung", "hat gestimmt!", "merkt man". Für (4) ist wichtig, dass die Lernenden in einem durchgängig problemorientierten Unterricht nach dem Prinzip der minimalen Hilfe die Schritte sehr weitgehend selbst gefunden haben, worauf sie zu Recht stolz waren, aber auch durch "Täler" wie nach Schritt 1 gehen mussten. (5): Das Konzept der Ableitung ist fundamental für die Kommunikation über Analysis und Physik, für die Studierfähigkeit und muss kompetent in Kontexte "hineingesehen" werden. Selbst (3b) findet sich wieder: Da eine vollständige formale Grundlegung in der Schule nicht sinnvoll möglich ist, muss immer didaktisch reduziert werden. Jede Reduktion erzählt nicht die ganze story, setzt aber auf Erzähllogik, z. T. statt Argumente, was durchaus redlich sein kann. Das Kriterium ist die Vermeidung von Fehlvorstellungen, die Anschlussfähigkeit an die weitere Ausbildung oder auch der Hinweis auf Argumentationslücken wie in Schritt 4.

Ziel	Man möchte wissen, wie schnell z. B. der Gepard zu einem bestimmten Zeit*punkt* ist.
1 Durchschnitts- versus Momentangeschwindigkeit	Eine erste Idee ist, die gesamte bisher gelaufene Strecke durch die Laufzeit zu teilen. Aber leider erhält man so nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit und keine *Momentan*geschwindigkeit - dies muss genau unterschieden werden.
2 Numerische Bestimmung - immer kleinere Zeitintervalle	Der nächste Versuch ist, die Durchschnittsgeschwindigkeiten in einem Zeitintervall um den Zeitpunkt zu betrachten. Dies liefert Schätzwerte für die Momentangeschwindigkeit, die immer verlässlicher werden, je kleiner das Zeitintervall ist. Sie ergeben aber immer noch keinen genauen Wert, da hierzu das Zeitintervall, auf dem der Durchschnitt berechnet wird, die Länge 0 haben müsste und diese Länge im Nenner der Geschwindigkeitsformel steht.
3 Übergang zu einer Funktion der Änderungsraten	Numerisch kann man allerdings mehrere solcher Näherungswerte momentaner Geschwindigkeiten bestimmen und zu Vermutungen über die Geschwindigkeits*funktion* $f'(x)$ kommen, z. B. gehört zu $f(x) = x^2$ vielleicht $f'(x) = 2x$.
4 Algebraische Bestimmung in speziellen Fällen	Algebraisch kann man, leider nur in einfachen Fällen, in denen sich die Zeitdifferenz im Nenner herauskürzt, sogar einen Beweis führen - die Vermutung hat gestimmt!
5 Graphische Bestimmung	Wenn man die Struktur der Terme für die Durchschnittsgeschwindigkeiten auf Zeitintervallen betrachtet, merkt man, dass diese denen beim Steigungsdreieck entsprechen. Numerisch mit den Durchschnittsgeschwindigkeiten die Momentangeschwindigkeit anzunähern, entspricht also einer geometrischen Annäherung der Tangente durch Sekanten. Zeichnen wir nach Augenmaß Tangenten an beliebige Funktionen, so können wir graphisch die (ungefähre) Gestalt der Geschwindigkeitsfunktion ermitteln.

Die Erzählung hat noch Nebenstränge und geht weiter (z. B. Übertragung auf nicht zeitabhängige Änderungen und *andere Kontexte*; Ermittlung vieler *Ableitungsregeln* bis zu einer speziellen Form der Kettenregel $[f(kx)]'=kf'(kx)$ aus geometrischen Überlegungen zur geometrischen Transformation der zugehörigen Sekantensteigungsdreiecke).
Diese Erzählung ist die Kurzversion für Lehrkräfte. Bei den Lernenden wird zudem eine Verschränkung mit Formeln, Abbildungen, Graphen und Argumenten erwartet. Im erfolgten Unterricht wurden andere Kontexte und die Begriffe Änderungsrate sowie Änderungsratenfunktion bereits nach Schritt 2 eingeführt.

Abb. 1: Beginn der *Erzählung der Differentialrechnung

Diskussion

Stories in den Unterricht einzuführen, betont für die Lernenden den Blick auf das Ganze, auf die Zusammenhänge, Problemstellung und Lösung in vielen Schritten und mit zum Teil überraschenden neuen Entdeckungen, die auf neue Probleme führen. Wenn Verständnis letztlich Vernetzung bedeutet, ist dieser Ansatz zu einem nachhaltigen und kompetenzorientierten Unterricht bereits aus theoretischen Gründen zielführend. Er sollte dennoch empirisch abgesichert werden, da er z. B. Schülertypen mit geringerer Sprachkompetenz benachteiligt. Weiterhin sind Stories komplex - der Mehraufwand im Unterricht müsste sich im Vergleich zu herkömmlicher Vorgehensweise beweisen. Auch was zu einer Story gehört und was nicht, muss behandelt werden - vielleicht hilft hier der Vergleich mit der Inhaltsangabe aus dem Deutschunterricht, die mehr als eine Nacherzählung ist. Ob ein zugehöriger Text eher in Richtung eines spannend geschriebenen Aufsatzes wie in Fahse (2000) oder in Richtung Erlebnisbericht ("Wir versuchten dann…") gehen sollte, bleibt noch eine offene Frage. Den verstärkten Emotionen steht die Gefahr der Unübersichtlichkeit gegenüber.

Worin geht *Erzählung über *Grundvorstellung hinaus? Der Begriff *Erzählung betont, dass kein Thema ohne spezielle Sichtweise unterrichtet werden kann und sich diese Sichtweisen historisch ändern. Z. B. war es früher üblicher, von der graphischen Tangentensteigung auszugehen statt wie hier von der numerisch approximierten Änderungsrate - erst in der *Erzählung spielt die Reihenfolge eine Rolle. Und zwar eine ausschlaggebende, da der erste Kontakt mit einem Thema oft die Vorstellung besonders prägt - hier, ob die Lernenden bei Ableitung vorrangig an Änderungsraten oder an Steigungen denken. Gegenüber *Grundvorstellungen werden größere, in vielen Wochen erarbeitete Zusammenhänge in den Blick genommen, was vielleicht im realen Unterricht noch zu wenig geschieht. Während Tangentensteigung und momentane Änderungsrate zwei getrennte Grundvorstellungen sind, liefert die *Erzählung den Zusammenhang auf einer größeren Skala. Auch Fehlversuche haben ihren Platz. Aus konstruktivistischen Lerntheorien weiß man, wie wertvoll diese für das Verständnis sind. Ebenfalls kognitionspsychologisch begründet ist der Fokus auf die Emotionen. Das Erstaunliche fordert uns heraus, wir fordern ihm das Einfache ab (nach Wagenschein) - und das ist ein erzählenswertes Erlebnis.

Literatur

Assmann, A. (2023). Was ist ein Narrativ? Zur anhaltenden Konjunktur eines unscharfen Begriffs. *Merkur. Zeitschrift für europäisches Denken.* H. 889, 88-96.

Fahse, C. (2000). „Differentiation? Isn't it ingenious?". *mathematik lehren* 99, 65-68.

Fahse, C. (2022). *Materialien zum Grundvorstellungsbegriff.* https://dms.uni-landau.de/m/fahse

Fahse, C. (2025). *Materialien zum Narrativ.* https://dms.uni-landau.de/m/fahse

Herman, D., Jahn, M., & Ryan, M. L. (Ed.) (2008). *Routledge encyclopedia of narrative theory.* Routledge.