DETTELBACH, Andrea
Paderborn

Rechnen mit Beziehungen - operative Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen. Entwicklung einer digitalbasierten Lernumgebung mit der App Rechenfeld

Die Fähigkeit, denkend und nicht zählend zu rechnen ist ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts in der Schuleingangsphase. Dazu gehört neben dem Verständnis für die Operation, dass die Aufgaben in operativen Beziehungen zueinander gesehen und bei der Lösung Merkmale der Aufgabe berücksichtigt werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018). Darstellungen machen die operativen Beziehungen zwischen Aufgaben erkennbar, wobei bedacht werden muss, dass Beziehungen nicht direkt an den Darstellungen abzulesen sind, sondern hingesehen werden müssen (Steinbring, 2015). In der digital geprägten Welt werden neben konkreten Materialien und statischen Bildern auch Apps als Arbeits- und Darstellungsmittel genutzt. Diese können durch die Möglichkeiten, mehrere Darstellungsformen synchron vernetzt anzubieten oder Veränderungen von Objekten ikonisch anzuzeigen Kinder im Deutungsprozess der Zahl- und Aufgabenbeziehungen unterstützen (Ladel, 2009).

Theoretische und empirische Grundlagen

Um eine Operation strukturell zu verstehen und verinnerlicht auszuführen, empfiehlt Aebli (1985) eine operative Durcharbeitung. Darunter versteht er das Durchführen von Veränderungen an Objekten und das Fokussieren auf die sich ergebenen Wirkungen, die mit der Veränderung einhergehen. Dabei sollten die Operationen, die auf ein Objekt angewendet werden, variiert und weitreichend unterscht werden. Erst wenn Lernende augefordert werden, die Wirkungen von operativen Veränderungen zu beobachten und die Aufgaben in eine Beziehung zu einander zu setzen, können sie eine „Idee“ (Wittmann, 1985, S. 10) der Operation entwickeln. Beim Operieren mit Aufgaben nutzen Kinder verschiedene Strategien zur Lösung von Aufgaben. Dabei verändern sie Aufgaben, indem sie beispielsweise Zahlen verändern, die Aufgaben in Teilaufgaben zerlegen oder sie leiten Aufgaben aus anderen Aufgaben ab. Die Herausforderung liegt für Kinder darin, die Beziehungen zwischen den Aufgaben zu erkennen und zu beschreiben. Aufgefordert Zusammenhänge zwischen Aufgaben zu erkennen und zu nutzen, fokussieren Lernende Beziehungen zwischen Zahlen (Häsel-Weide, 2016). Diese Zahlbeziehungen werden z.T. kardinal zum Teil aber auch ordinal von Lernenden interpretiert, wobei nur eine kardinale Deutung der Beziehung zwischen Aufgaben einen rechnenden Zugang auf der Basis eines fundierten Verständnisses der

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Operation erlaubt. Notwendig scheint also die Nutzung von Darstellungen, um die strukturelle Deutung von Aufgabenbeziehungen zu fördern. Dabei ist zu untersuchen, wie digitale auf Darstellungsvernetzung angelegte Apps sinnvoll eingebunden werden können.

Design und Fragestellung

Im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger et al., 2012) wurde wird eine Lernumgebung für die Jahrgangsstufe 2 entwickelt und erforscht, die digital gestützt Kinder anregt, Aufgaben gezielt zu verändern und operative Beziehungen zwischen Aufgaben zu erkennen und zu beschreiben. Als zentrale Fragen stehen im Mittelpunkt:

- „Wie lässt sich eine Lernumgebung zur Vertiefung des Operationsverständnisses für die Addition gestalten, die unter Berücksichtigung des operativen Prinzips und der Darstellungsvernetzung mit Hilfe der App Rechenfeld Kinder dazu befähigt, operative Veränderungen durchzuführen?“
- „Welche operativen Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen die Kinder beim Verändern von Aufgaben in der Lernumgebung?“

Die Entwicklung und Erforschung erfolgt in einem zyklischen Prozess in drei Schleifen. Die Auswertung der Daten der zweiten und dritten Schleife erfolgte mit Mitteln der interpretativen Unterrichtsforschung. Ausgewählte Szenen wurden transkribiert und in einer Turn-by-Turn Analyse im Hinblick auf die epistemologischen Erkenntnisse der Kinder interpretiert und gedeutet.

Lernumgebung: Aufgaben verändern und operative Beziehungen entdecken

Die Lernumgebung ist in vier Sequenzen untergliedert. Die Lernenden werden aufgefordert, additive Kernaufgaben wie beispielsweise 15+5=20 oder 25+5=30 auf verschiedene Weise durch Hinzufügen oder Wegnehmen von einem, fünf oder zehn Plättchen mit der App Rechenfeld zu verändern oder ausgehend von anderen Aufgaben zu erzeugen. Gefundene Lösungen werden geordnet, reflektiert und Veränderungen an Aufgaben beschrieben (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Die Kommunikation und Kooperation wird gezielt eingefordert sowie der Transfer der Darstellungen auf die analoge Ebene angeregt.

In der ersten Sequenz werden die Kinder z. B. aufgefordert, die Aufgabe 15+5=20 durch Nutzen jeweils einer Handlungstaste zu verändern und zu erklären, warum jeweils zwei Partneraufgaben dasselbe Ergebnis aufweisen.

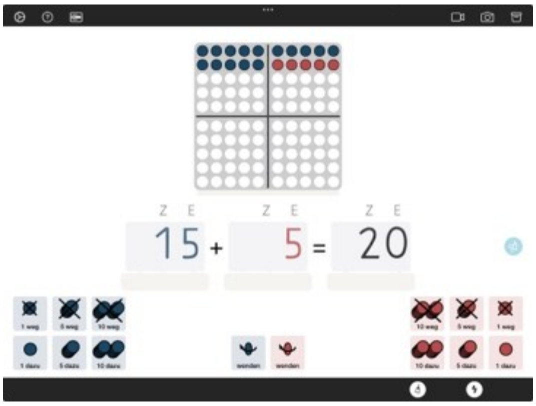

Abb. 1: Ausgangsaufgabe 15 + 5= 20 der Sequenz 1 in der App „Rechenfeld“

Fallbeispiel

Hedda und Johnny haben in der Arbeitsphase sechs Möglichkeiten gefunden, die Aufgabe 15+5=20 zu verändern und diese festgehalten (Abb. 2, Zeichen im epistemologischen Dreieck). Die Lehrperson erfragt nun, warum die gefundenen Aufgaben 25+5=30 und 15+15=30 die gleiche Summe haben.

01 Lehrperson	Jetzt müsst ihr mir mal erklären, warum bei beiden Aufgaben dreißig herauskommt *(zeigt auf 25+5=30 und 15+15=30)*, obwohl die Aufgaben verschieden sind.
02 Johnny	Ja, weil hier zehn rote *(zeigt auf ‚10 dazu´)* und da zehn blaue *(zeigt auf ‚10 dazu´)*, aber weil das ist ja zehn. Weil beides zehn ist.
03 Lehrperson	Und dann überprüft das mal, ob das das bei den Aufgaben mit dem Ergebnis fünfundzwanzig *(zeigt auf beide Dokumentationsstreifen mit den Veränderungen ‚5 dazu.)* auch passt.
04 Johnny	(..) *(schaut auf das Plakat)* Das passt. Weil es sind überall ist das gleiche Ergebnis, die sind gleich *(zeigt auf beide ‚5 dazu´).*
05 Lehrperson	Und warum kommt da bei beiden, die Aufgaben sehen doch ganz anders aus *(zeigt 15+10=25, dann auf 20+5=25).* Warum kommt denn da (.) bei beiden fünfundzwanzig raus?
06 Johnny	Weil das hier *(zeigt auf ‚5 dazu´),* das das kommt ja auf die Zahl an, nicht auf die Farbe, die man dazu tut.

In Bezug auf das Erkennen und Beschreiben der beiden in einer operativen Beziehung stehenden Aufgaben hebt Johnny zunächst die gleiche Veränderungshandlung (T02) als Grund für das gleiche Ergebnis der Aufgaben hervor. Der Ausdruck „überall“ (T04) könnte so gedeutet werden, dass Jonny eine allgemeingültige Begründung angibt, die er nicht nur auf die Lösung mit der Veränderung ‚5 dazu´ bezieht, sondern sie grundsätzlich auf die zeilenweise Zuordnung bezieht. Weil die Zahlangabe auf den Operatorpfeil und damit auch die durchführte Veränderung in allen drei einander zugeordneten Aufgabenpaaren dieselbe ist, ist auch das Ergebnis dasselbe. Johnny erläutert weiter (T06), dass es auf die Zahl ankomme, die hinzugefügt wird, und nicht darauf, welche Farbe die Zahl habe. Insgesamt zeigt Johnny ein Verständnis in Bezug auf die assoziative Veränderung, die wie folgt charakterisiert werden dann: Veränderte Aufgaben haben dann die gleiche Summe, wenn zu einer Ausgangsaufgabe das Gleiche hinzugefügt worden ist, unabhängig davon, welcher Summand verändert wurde.

Die Fokussierung auf die Veränderungshandlung als Ursache für die Ergebnisgleichheit ist ein erstes Ergebnis der Analysen. Dieses Ergebnis bestätigt, dass Lernende Zahlen fokussieren, wenn sie Aufgabenbeziehungen beschreiben. Analysen weiterer Beispiele zeigen, dass die Kinder Aufgabenbeziehungen strukturell deuten und die Auswirkungen der Veränderungen auf die Aufgaben und deren Ergebnisse erklären.

Literatur

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. *mathematik lehren*, 11, 4–6. https://doi.org/10.1007/978-3-642-70489-5_13

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10694-2

Ladel, S. (2009). Multiple externe Repräsentationen (MERs) - Gestaltungsprinzipien und deren Umsetzung bei Software für den Anfangsunterricht Mathematik. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 731–735). WTM-Verlag.

Piaget, J. (1972). *Die Entwicklung des Erkennens. 1: Das mathematische Denken.* (1. Aufl). Klett.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B., & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *65*(8), 452–457.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5

Steinbring, H. (2015). Mathematical interaction shaped by communication, epistemological constraints and enactivism. *ZDM*, *47*(2), 281–293. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0629-4

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, 11, 7–11.