Verschlingungsinvarianten und Bandflächen eingebetteter Graphen

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Mathematik

der Universität Dortmund

vorgelegt im Juli 2004

von Jason Uhing

Betreuer der Dissertation:

Prof. Dr. D. Erle, Universität Dortmund

Prof. Dr. K.H. Mayer, Universität Dortmund

Termin der mündlichen Prüfung: 10. März 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine natürliche Verallgemeinerung der Knotentheorie, in der Einbettungen von Kreislinien untersucht werden, stellt das Studium der Einbettungen von Graphen in den dreidimensionalen Raum dar. Ein Graph besteht auf der einen Seite aus Mengen von Ecken und Kanten, auf der anderen Seite ist er als topologischer Raum ein eindimensionaler endlicher Zellenkomplex. Die verschiedenen topologischen Äquivalenzrelationen (zum Beispiel reguläre Isotopie, Kobordismus, Homotopie, Homologie), mit deren Hilfe man die Einbettungen innerhalb der Knotentheorie untersucht, können auf eingebettete Graphen erweitert werden. Darüber hinaus lassen sich Äquivalenzrelationen erklären, die nur für Graphen Sinn ergeben. Grundlegende Definitionen und Ergebnisse zu diesem Thema lassen sich in [22], §1, finden. Weitere Äquivalenzrelationen für Graphen werden in [15] eingeführt. In dieser Arbeit wird hauptsächlich die Umgebungsisotopie eingebetteter Graphen behandelt. Allerdings wird es in Kapitel 1, Definition 1.24 auf Seite 25 notwendig sein, den Begriff der Umgebungsisotopie auf „nummerierte“ Umgebungsisotopie auszudehnen. Dabei wird der Zellenkomplex bzw. das Bild der Einbettung mit Hilfe eines abstrakten Graphen nummeriert.

Die aus der Knotentheorie bekannte Methode zur Berechnung der Verschlingungszahl einer Verkettung wird anhand von nummerierten orientierten Graphendiagrammen auf Einbettungen von Graphen erweitert, indem man die Kreuzungsinformationen des Diagramms auf eine bestimmte Art aufsummiert. In Kapitel 2, Satz 2.22 auf Seite 41 ergeben sich gewisse Elemente $y \in \mathbb{Z}^n$, die eine solche Summation festlegen und gleichzeitig ganzzahlige Verschlingungsinvarianten L_y für nummerierte orientierte Umgebungsisotopie liefern. Wählt man als Graphen disjunkte Kreise, liefert die Invariante die übliche Verschlingungszahl. Sowohl für den vollständigen bipartiten Graphen mit sechs Ecken $K_{3,3}$ als auch für den vollständigen Graphen mit 5 Ecken K_5 ergibt sich genau die Invariante, die laut §4 in [22] von J. Simon definiert wurde. Diese Graphen werden unter anderem in Kapitel 6 behandelt.

Die Elemente $y \in \mathbb{Z}^n$ bilden einen freien $\mathbb{Z}$-Modul (Verschlingungsmodul), der nur von der Inzidenzmatrix des Graphen abhängt. In Kapitel 3, Satz 3.7 auf Seite 70 wird gezeigt, dass dieser isomorph zu dem Kohomologiemodul $L(\mathcal{Z})$ aus [23] ist. Die Verschlingungsinvarianten werden mithilfe der Wu-Invariante aus [23], §2, über den Kronecker-Index dieser Moduln geliefert, siehe Satz 3.8 auf Seite 71. Im Gegensatz zum Ansatz der vorliegenden Arbeit ergibt sich $L(\mathcal{Z})$ als Spezialfall von Invarianten aus [30]. An dieser Stelle sei bemerkt, dass in §3 von [23] die Wu-Invariante benutzt wird, um Einbettungen von Graphen bis auf Homologie zu klassifizieren. Homologie eingebetteter Graphen ist eine Verallgemeinerung der Homologie von Verkettungen. In beiden Fällen kann eine Klassifikation mithilfe von Delta-Bewegungen erreicht werden, siehe [12], Theorem 1.1. sowie [11], Theorem 1.3. Für planare Graphen wird in [19], Theorem 2 eine weitere Klassifikation durch die Verschlingungszahlen disjunkter Kreise des Graphen angegeben. Dieses Resultat wird in [25], Main Theorem, auf nicht-planare Graphen erweitert. Danach sind zwei eingebettete Graphen genau dann homolog, wenn sie für jeden Teilgraphen, der homöomorph zu zwei disjunkten Kreisen, $K_{3,3}$ oder K_5 ist, dieselbe Wu-Invariante haben. Mithilfe der Methoden aus [25] und einer Formel für den Rang von $L(\mathcal{Z})$ für 3-zusammenhängende, einfache Graphen in [14], Theorem 3.1., wird in Kapitel 7 eine Konstruktion einer Basis des Verschlingungsmoduls vorgestellt. Jedem Basiselement entspricht einer der oben genannten Teilgraphen, und aus der Konstruktion geht hervor, welche dieser Teilgraphen als Basiselemente gewählt werden können. Da der Summe zweier Elemente aus dem Verschlingungsmodul die Summe ihrer Verschlingungsinvarianten zugewiesen wird, kann man sich also bei der Berechnung der Verschlingungsinvariante eines Graphendiagramms auf Basiselemente zurückziehen. Der Zusammenhang mit dem Kronecker-Index und der Wu-Invariante liefert dann auch das oben erwähnte Klassifikationsergebnis aus [25] für 3-zusammenhängende, einfache Graphen.

Die Kapitel 4 und 5 beschäftigen sich mit Kontraktionen von Graphen („Zusammenziehen" von Kanten) und die dadurch induzierten Homomorphismen der beteiligten Verschlingungsmoduln. Die Ergebnisse dieser Abschnitte haben hauptsächlich für Kapitel 7 vorbereitenden Charakter.

Um das oben erwähnte Resultat aus [19] zu erhalten, werden orientierbare Bandflächen für planare, trivalente Graphen mit gewissen Verschlingungszahlen disjunkter Kreise des Graphen als Einträge in der Seifertform definiert. Dabei entspricht ein verdrilltes Band ($\approx [0,1] \times [0,1]$) einer Kante und eine zweidimensionale Scheibe einer Ecke des Graphen (siehe Kapitel 8). Eindeutig bestimmte orientierbare Bandflächen sind bereits in [8] sowohl für den Theta-Graphen als auch für den K_4 unter der Bedingung, dass die Seifertform der Bandfläche Null ist, konstruiert worden. In [4] wird eine weitere Konstruktion einer orientierbaren Bandfläche für planare, trivalente, 3-zusammenhängende Graphen mittels Bedingungen an die Verschlingungszahlen der Randkomponenten der Fläche vorgestellt. Dieser Ansatz beinhaltet die Resultate aus [8]. Können Bandflächen auf eindeutige Weise konstruiert werden, liefern sie zum Beispiel durch die Randverkettungen Invarianten für Umgebungsisotopie dieser Graphen.

Die Verkettung L mit drei Komponenten, die in [8] als Randverkettung der Bandfläche für den Theta-Graphen auftritt, ist bereits Gegenstand weiterer Untersuchungen gewesen. So wird in [34], Theorem 1.6 gezeigt, dass zwei Einbettungen des Theta-Graphen genau dann äquivalent sind, wenn die zugehörigen Randverkettungen der Fläche jeweils eine Komponente enthalten, die sich mit einer 2-Sphäre von den anderen beiden Komponenten trennen lässt. In [13], Theorem 1.1. wird der dritte Koeffizient des Conway-Polynoms derjenigen Teilverkettungen von L, die aus zwei Komponenten bestehen, benutzt, um eingebettete Theta-Graphen bis auf Umgebungsisotopie und Delta-Bewegungen, die nur eine Kante betreffen („self-delta-move“), zu klassifizieren. Nach [20] induzieren Vassiliev-Invarianten von Verkettungen über die Randverkettung L Vassiliev-Invarianten für eingebettete Theta-Graphen. Ein allgemeineres Resultat dieser Art enthält [33], Theorem 3.4., wo die Randverkettung der Bandfläche aus [19] verwendet wird. Darüber hinaus werden in [6], Theorem 1 und Theorem 2 mithilfe von L Basen für die Räume der Vassiliev-Invarianten der Ordnung 2 und 3 eingebetteter Theta-Graphen angegeben.

In Kapitel 8 werden eindeutige Bandflächen mithilfe der Gordon-Litherland-Form aus [5] konstruiert. Im Falle des Theta-Graphen ergibt sich die Bandfläche aus [8] als Spezialfall. Als Motivation dient Lemma 2.2. aus [8], in dem gezeigt wird, dass es nicht möglich ist, Bandflächen mit Seifertform Null für nicht-planare Graphen zu definieren. Aus Abschnitt 8.4.3 auf Seite 257 geht hervor, dass mithilfe der GL-Form für den nicht-planaren Graphen $K_{3,3}$ eine eindeutige Bandfläche konstruiert werden kann. Damit dies gelingt, wird in 8.3 nachgewiesen, dass die Verschlingungsinvariante des $K_{3,3}$ aus der GL-Form einer Bandfläche zu $K_{3,3}$ gewonnen werden kann. Nach einigen techninschen Vorbereitungen in Kapitel 9 lässt sich so auch in Kapitel 10 eine eindeutige Bandfläche für eine Möbiusleiter konstruieren. Dazu muss eine Basis des Verschlingungsmoduls der Möbiusleiter bekannt sein. Diese ergibt sich aber aus dem Algorithmus in Kapitel 7.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. D. Erle für die Betreuung bedanken.

Teil I

Verschlingungsmoduln

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Graphen und Nummerierungen von Graphen

Definition 1.1 *Zu einer endlichen Menge M bezeichne $|M|$ die Anzahl der Elemente von M, $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M, $\mathcal{P}_n(M) := \{S \in \mathcal{P}(M) : 1 \leq |S| \leq n\}, n \in \mathbb{N}$, die Menge aller nicht-leeren Teilmengen mit höchstens n Elementen und $\mathcal{P}_\infty(M) := \mathcal{P}(M)$. Zu einer Abbildung $f : M \to N$ ist für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Abbildung der Potenzmengen $\mathcal{P}_n(f) : \mathcal{P}_n(M) \to \mathcal{P}_n(N)$ gegeben durch $A \mapsto \mathcal{P}_n(f)(A) := f(A)$. Ein* **nicht-orientierter Graph** *G ist ein Tripel (V, E, g) bestehend aus nichtleeren endlichen Mengen E, V mit $E \cap V = \emptyset$ und einer* **Inzidenzabbildung** *$g : E \to \mathcal{P}_2(V)$. Man nennt V die* **Eckenmenge** *von G und E die* **Kantenmenge** *von G. Die Elemente der Eckenmenge heißen* **Ecken**. *Ein Element der Kantenmenge bezeichnet man als* **Kante**. *Ein* **orientierter Graph** *G ist ein Tripel (V, E, g) bestehend aus nichtleeren endlichen Mengen E, V mit $E \cap V = \emptyset$ und einer Abbildung $g : E \to V \times V$. Man nennt g eine* **Orientierung** *von G. Ein* **Graph** *kann orientiert oder nicht-orientiert sein. Ist $G = (V, E, g)$ ein orientierter Graph und $\nu : V \times V \to \mathcal{P}_2(V)$ definiert durch $(x, y) \mapsto \{x, y\}$, so nennt man das Tripel $(V, E, \nu \circ g) =: \nu G$ den* **dem orientierten Graphen** *G* **zugrundeliegenden nicht-orientierten Graphen**. *Eine Kante $e \in E$ eines nicht-orientierten bzw. orientierten Graphen mit $g(e) \in \mathcal{P}_1(V)$ bzw. $(\nu \circ g)(e) \in \mathcal{P}_1(V)$ nennt man* **Schlaufe**. *Einen Graphen, der aus genau einer Kante und genau einer Ecke besteht, bezeichnet man als* **Schlaufengraph**. *Eine Kante $e \in E$ eines nicht-orientierten bzw. orientierten Graphen heißt* **mehrfache Kante**, *wenn es eine Kante $f \in E$, $f \neq e$, mit $g(f) = g(e)$ bzw. $(\nu \circ g)(e) = (\nu \circ g)(f)$gibt. Ein* **einfach***er Graph besitzt weder Schlaufen noch mehrfache Kanten. Lässt man für einen Graphen $E = \emptyset$ zu, so bezeichnet man den Graphen $G = (V, \emptyset, \emptyset)$, $V \neq \emptyset$, der nur aus Ecken besteht, als*

Nullgraph. *Ist darüber hinaus* $V = \emptyset$, *so heißt* $G = \emptyset$ *der* **leere Graph**.

Es seien nun $G = (V_G, E_G, g_G)$ *und* $H = (V_H, E_H, g_H)$ *weder leere Graphen noch Nullgraphen. Eine Abbildung* $(f, F) : G \to H$ *besteht aus Abbildungen* $f : V_G \to V_H$ *und* $F : E_G \to E_H$. *Ein* **Homomorphismus** $(f, F) : G \to H$ *von nicht-orientierten Graphen* $G = (V_G, E_G, g_G)$ *und* $H = (V_H, E_H, g_H)$ *ist eine Abbildung* (f, F), *die der Bedingung* $\mathcal{P}_2(f) \circ g_G = g_H \circ F$ *genügt. Ein Homomorphismus* $(f, F) : G \to H$ *von orientierten Graphen* $G = (V_G, E_G, g_G)$ *und* $H = (V_H, E_H, g_H)$ *ist eine Abbildung* (f, F), *die die Bedingung* $g_H \circ F = (f \times f) \circ g_G$ *erfüllt. Ist sowohl* f *also auch* F *injektiv/surjektiv/bijektiv, so heißt* (f, F) *injektiv/surjektiv/bijektiv.* □

Definition 1.2 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein orientierter bzw. nicht-orientierter Graph sowie* $\mathcal{V}_\infty := \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *und* $\mathcal{E}_\infty := \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *disjunkte nichtleere Familien paarweise verschiedener Elemente. Eine Abbildung* $w : V \to \mathcal{V}_\infty$ *nennt man eine* **einfache Eckennummerierung** *von* G. *Eine Abbildung* $\gamma : E \to \mathcal{E}_\infty$ *heißt* **einfache Kantennummerierung** *von* G. *Eine* **einfache Nummerierung** *von* G *ist ein Tupel* (w, γ) *bestehend aus einer einfachen Eckennummerierung* w *und einer einfachen Kantennummerierung* γ *von* G.

Für $k, l \in \mathbb{N}$ *seien* $\mathcal{V}_k := \{v_i\}_{1 \leq i \leq k} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *und* $\mathcal{E}_l := \{e_i\}_{1 \leq i \leq l} = \{e_1, \ldots, e_l\}$. *Eine* **Eckennummerierung** *von* G *ist eine Abbildung* $w : V \to \mathcal{V}_k$. *Eine Abbildung* $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ *wird* **Kantennummerierung** *von* G *genannt. Eine* **Nummerierung** *von* G *ist ein Homomorphismus* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$, $k, l \in \mathbb{N}$, *orientierter bzw. nicht-orientierter Graphen, wobei* w *eine Ecken- und* γ *eine Kantennummerierung von* G *ist.*

Eine (einfache) Nummerierung (w, γ) *heißt* **surjektiv** *bzw.* **injektiv** *bzw.* **bijektiv**, *wenn sowohl* w *als auch* γ *surjektive bzw. injektive bzw. bijektive Abbildungen sind.* □

Bemerkung In Abschnitt 1.3 werden nummerierte Graphendiagramme und in 1.4 Äquivalenzen solcher Diagramme betrachtet. Dort ist es zulässig, dass gewisse Kanten des Diagramms gleich nummeriert sind. Dazu wird die oben definierte surjektive Kantennummerierung benutzt. Der Begriff der Nummerierung ist notwendig, um in Definition 1.8 auf Seite 14 die Inzidenzmatrix eines Graphen einführen zu können. □

Korollar 1.3 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein orientierter bzw. nicht-orientierter Graph,* $w : V \to \mathcal{V}_k$ *eine Eckennummerierung und* $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ *eine bijektive Kantennummerierung von* G. *Für* $e \in \mathcal{E}_l$ *definiere* $h(e) := \left((w \times w) \circ g \circ \gamma^{-1}\right)(e)$ *bzw.* $h(e) := \left(\mathcal{P}_2(w) \circ g \circ \gamma^{-1}\right)(e)$. *Dann ist* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$ *eine Nummerierung.* □

Korollar 1.4 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein orientierter bzw. nicht-orientierter Graph und* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$ *eine Nummerierung von* G *mit surjektiver Kantennummerierung* γ*. Dann ist* h *eindeutig bestimmt.*

Beweis Es sei h' so gewählt, dass $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h')$ eine weitere Nummerierung von G ist. Zunächst sei G nicht-orientiert. Für $e \in \mathcal{E}_l$ und $f \in \gamma^{-1}(e)$ gilt dann: $h(e) = h\gamma(f) = \mathcal{P}_2(w)g(f) = h'\gamma(f) = h'(e)$. Daraus folgt $h = h'$. Für orientiertes G schliesst man analog. □

Korollar 1.5 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein orientierter Graph und* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$ *eine Nummerierung von* G *mit surjektiver Kantennummerierung* γ*. Genau dann ist* $(w, \gamma) : \nu G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h')$ *eine surjektive Nummerierung nicht-orientierter Graphen, wenn* $h' = \nu \circ h$ *gilt.*

Beweis Sei $e \in E$. Man berechnet $((\nu h)\gamma)(e) = \nu((h\gamma)(e)) = \nu(((w \times w)g)(e)) = (\mathcal{P}_2(w)(\nu g))(e)$. Daher ist $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, \nu h)$ eine Nummerierung von νG. Nach Korollar 1.4 ist diese eindeutig bestimmt. □

Korollar 1.6 *Eine bijektive Eckenummerierung* w *und eine bijektive Kantennummerierung* γ *eines Graphen* $G = (V, E, g)$ *induzieren einen Isomorphismus* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$*.* □

Definition 1.7 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein nicht-orientierter Graph. Eine Kante* $e \in E$ *heißt* **inzident** *zu einer Ecke* $v \in V$*, wenn* $v \in g(e)$ *gilt. Zwei verschiedene Ecken* $v, w \in V$ *nennt man* **adjazent***, wenn es eine Kante* $e \in E$ *gibt, so dass* $g(e) = \{v, w\}$ *erfüllt ist. Für* $v \in V$ *ist* $Inz(v, G) := \{e \in E \mid v \in g(e)\}$ *die Menge der zu* v *inzidenten Kanten von* G *und* $Sch(v, G) := \{e \in E \mid \{v\} = g(e)\}$ *die Menge der Schlaufen von* G*.*

Ist $G = (V, E, g)$ *orientiert, so sind eine Kante und eine Ecke inzident, wenn sie es in* νG *sind. Zwei Ecken sind adjazent in* G*, wenn sie es in* νG *sind. Für* $v \in V$ *definiert man* $Inz(v, G) := Inz(v, \nu G)$ *und* $Sch(v, G) := Sch(v, \nu G)$*.*

Sei $G = (V, E, g)$ *ein orientierter bzw. nicht-orientierter Graph,* $w : V \to \mathcal{V}_k$ *eine Ecken- und* $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ *eine Kantennummerierung von* G*. Für* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *sei*

$$ad(i, G, w, \gamma) := \left\{ j \in \{1, \ldots, l\} \;\middle|\; \exists\, v \in w^{-1}(v_i) \;:\; \gamma^{-1}(e_j) \cap Inz(v, G) \neq \emptyset \right\}.$$

Es gilt also $j \in ad(i, G, w, \gamma)$ *genau dann, wenn es eine mit* v_i *nummerierte Ecke von* G *gibt, die inzident zu einer mit* e_j *nummerierten Kante von* G *ist.* □

Definition 1.8 *Gegeben sei ein mittels* $(w,\gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$ *surjektiv nummerierter nicht-orientierter Graph* $G = (V, E, g)$*. Die* **Inzidenzmatrix** $I(G, w, \gamma)$ *von* G *ist eine* $k \times l$*-Matrix, definiert durch*

$$I(G,w,\gamma)_{s,t} := \begin{cases} 0 & : \quad v_s \notin h(e_t) \\ 2 & : \quad \{v_s\} = h(e_t) \\ 1 & : \quad sonst \end{cases}$$

für $s \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $t \in \{1, \ldots, l\}$*. Ist* G *orientiert, so ist die Inzidenzmatrix definiert durch*

$$I(G,w,\gamma)_{s,t} := \begin{cases} 0 & : \quad v_s \notin h(e_t) \\ -0 & : \quad (v_s, v_s) = h(e_t) \\ 1 & : \quad h(e_t) = (v_s, v_x) \text{ und } x \neq s \\ -1 & : \quad h(e_t) = (v_x, v_s) \text{ und } x \neq s \end{cases}$$

für $s \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $t \in \{1, \ldots, l\}$*. Dabei steht das Minuszeichen bei* -0 *zur Kennzeichnung der Schlaufen, siehe [29], Definition 1.6.*

Ist $G = (V, E, g)$ *ein orientierter Graph,* $w : V \to \mathcal{V}_k$ *eine surjektive Eckennummerierung und* $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ *eine surjektive Kantennummerierung, so wird die* **In-Out-Matrix** $IO(G, w, \gamma)$ *für* $s \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $t \in \{1, \ldots, l\}$ *definiert durch*

$$\begin{aligned} IO(G,w,\gamma)_{s,t} \quad := \quad & \left|\left\{(e,v) \in \gamma^{-1}(e_t) \times w^{-1}(v_s) \;\middle|\; g(e) = (v,u) \;\wedge\; u \neq v\right\}\right| \\ & - \left|\left\{(e,v) \in \gamma^{-1}(e_t) \times w^{-1}(v_s) \;\middle|\; g(e) = (u,v) \;\wedge\; u \neq v\right\}\right|. \end{aligned}$$

□

Satz 1.9 *Gegeben sei ein orientierter Graph* $G = (V, E, g)$ *und eine surjektive Nummerierung* $(w, \gamma) : G \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$*. Dann gilt* $IO(G, w, \gamma)_{s,t} = \left|\gamma^{-1}(e_t)\right| \cdot I(G, w, \gamma)_{s,t}$ *für* $s \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $t \in \{1, \ldots, l\}$*.*

Beweis Der Beweis wird durch eine Fallunterscheidung geführt. Es seien $s \in \{1, \ldots, k\}$, $t \in \{1, \ldots, l\}$. Zur Abkürzung seien $I := I(G, w, \gamma)$, $IO := IO(G, w, \gamma)$,

$$\begin{aligned} A \quad &:= \quad \left\{(e,v) \in \gamma^{-1}(e_t) \times w^{-1}(v_s) \;\middle|\; g(e) = (v,u) \;\wedge\; u \neq v\right\} \quad \text{und} \\ B \quad &:= \quad \left\{(e,v) \in \gamma^{-1}(e_t) \times w^{-1}(v_s) \;\middle|\; g(e) = (u,v) \;\wedge\; u \neq v\right\}. \end{aligned}$$

1. Fall : $I_{s,t} = 1$. Dann gibt es ein $i \neq s$, so dass $h(e_t) = (v_s, v_i)$ gilt. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. $A \neq \emptyset$: $h(e_t) = (v_s, v_i) \implies \exists e \in \gamma^{-1}(e_t) : h(e_t) = h\gamma(e) = (w \times w)g(e) = (v_s, v_i) \implies \exists (v,u) \in V \times V : g(e) = (v,u), v \in w^{-1}(v_s), v \neq u \implies (e,v) \in A$.

2. $B = \emptyset$: Angenommen es gibt $(e', v') \in B$ mit $g(e') = (u', v')$. Dann gilt $(v_s, v_i) = h(e_t) = (w \times w)g(e') = (w(u'), w(v')) = (w(u'), v_s)$. Es folgt $s = i$. Widerspruch!

3. $|A| \leq \left|\gamma^{-1}(e_t)\right|$: $(e,v), (e,v') \in A \implies g(e) = (v,u) = (v',u') \implies v = v' \wedge u = u'$.

4. $|A| \geq \left|\gamma^{-1}(e_t)\right|$: Sei $(e,v) \in A$ und $e' \in \gamma^{-1}(e_t)$ mit $e' \neq e$: $(w \times w)g(e') = h\gamma(e') = h(e_t) = (v_s, v_i) \implies \exists (v', u') \in V \times V : v' \neq u', w(v') = v_s \implies (e', v') \in A$.

Insgesamt folgt $IO_{s,t} = |A| - |B| = \left|\gamma^{-1}(e_t)\right| \cdot 1 - 0 = \left|\gamma^{-1}(e_t)\right| \cdot I_{s,t}$.

2. Fall : $I_{s,t} = -1$. Durch Vertauschen der Rollen von i und s und von A und B ergibt sich die Behauptung wie im ersten Fall.

3. Fall : $I_{s,t} = 0$. Definitionsgemäß gilt $v_s \notin \nu h(e_t)$. Angenommen es gibt $(e,v) \in A$ mit $g(e) = (v,u)$. Dann folgt $h(e_t) = (w \times w)g(e) = (v_s, w(u))$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $A = \emptyset$. Analog ergibt sich $B = \emptyset$. Insgesamt folgt $IO_{s,t} = 0 - 0 = 0 = \left|\gamma^{-1}(e_t)\right| \cdot I_{s,t}$.

4. Fall : $I_{s,t} = -0$. Es wird gezeigt, dass $|A| = |B|$ gilt. Zunächst sei $A \neq \emptyset$: $(e,v) \in A \implies g(e) = (v,u) \wedge v \neq u \implies (v_s, v_s) = h(e_t) = (v_s, w(u)) \implies v_s \in w^{-1}(u) \implies (e,u) \in B$. So ergibt sich eine bijektive Zuordnung $\phi : A \to B$. Sei nun $A = \emptyset$: Angenommen es gilt $B \neq \emptyset$. Wie im Fall $A \neq \emptyset$ erhält man hier $A \neq \emptyset$ durch Vertauschen der Rollen von A und B. Also gilt $A = B = \emptyset$.

In beiden Fällen ergibt sich $IO_{s,t} = |A| - |B| = 0 = \left|\gamma^{-1}(e_t)\right| \cdot I_{s,t}$. □

Satz 1.10 *Für $X \in \{G, H\}$ seien orientierte Graphen $X = (V_X, E_X, g_X)$, surjektive Ecken- bzw. Kantennummerierungen $w_X : V_X \to \mathcal{V}_k$ bzw. $\gamma_X : E_X \to \mathcal{E}_l$, sowie ein Isomorphismus $(f, F) : G \to H$ vorgelegt, der $w_H \circ f = w_G$ und $\gamma_H \circ F = \gamma_G$ erfüllt. Dann gilt $IO\,(G, w_G, \gamma_G) = IO\,(H, w_H, \gamma_H)$.*

Beweis Für $X \in \{G, H\}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, l\}$ definiert man zunächst

$$\begin{aligned} A_X^{i,j} &:= \left\{(e,v) \in \gamma_X^{-1}(e_j) \times w_X^{-1}(v_i) \;\middle|\; g_X(e) = (v,u) \;\wedge\; u \neq v\right\} \quad \text{und} \\ B_X^{i,j} &:= \left\{(e,v) \in \gamma_X^{-1}(e_j) \times w_X^{-1}(v_i) \;\middle|\; g_X(e) = (u,v) \;\wedge\; u \neq v\right\}. \end{aligned}$$

Damit gilt $IO\,(X, w_X, \gamma_X)_{i,j} = \left|A_X^{i,j}\right| - \left|B_X^{i,j}\right|$. Für $Y \in \{A, B\}$ seien die Abbildungen $\phi_Y^{i,j} : Y_G^{i,j} \to Y_H^{i,j}$ und $\psi_Y^{i,j} : Y_H^{i,j} \to Y_G^{i,j}$ gegeben durch $\phi_Y^{i,j}\,((e,v)) := (F(e), f(v))$ bzw. $\psi_Y^{i,j}\,((e,v)) := \left(F^{-1}(e), f^{-1}(v)\right)$. Es wird zunächst nachgewiesen, dass $\phi_A^{i,j}$ wohldefiniert ist.

Sei dazu $(e,v) \in A_G^{i,j}$. Zum einen gilt $(\gamma_H \times w_H)\left(\phi_A^{i,j}((e,v))\right) = (\gamma_H \times w_H)(F(e), f(v)) = (\gamma_G(e), w_G(v)) = (e_j, v_i)$, zum anderen ist $g_H(F(e)) = (f \times f)(g_G(e)) = (f(v), f(u))$. Hierin ist $f(v) \neq f(u)$, denn f ist injektiv und $v \neq u$. Zusammen ergibt sich demnach $(F(e), f(v)) \in A_H^{i,j}$.

Ersetzt man in diesen Betrachtungen f durch f^{-1} und F durch F^{-1}, ergibt sich die Wohldefiniertheit von $\psi_A^{i,j}$. Diese ist die Umkehrabbildung zu $\phi_A^{i,j}$. Somit gilt $\left|A_G^{i,j}\right| = \left|A_H^{i,j}\right|$. Für $Y = B$ erhält man auf dieselbe Art $\left|B_G^{i,j}\right| = \left|B_H^{i,j}\right|$, so dass insgesamt gilt:

$$IO\left(G, w_G, \gamma_G\right)_{i,j} = \left|A_G^{i,j}\right| - \left|B_G^{i,j}\right| = \left|A_H^{i,j}\right| - \left|B_H^{i,j}\right| = IO\left(H, w_H, \gamma_H\right)_{i,j}. \qquad \square$$

Indexmengen Gegeben seien nichtleere Mengen I, X, Y sowie eine Abbildung $\phi : I \to X$, $x_i := \phi(i)$. Man nennt $\{x_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus X. Sei nun $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus $\mathcal{P}(X)$. Die Menge

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \right\}$$

heißt direktes Produkt der Mengen X_i, $i \in I$. Für $f \in \prod_{i \in I} X_i$ schreibt man $f = (f_i)_{i \in I}$. Hierin ist $f_i = f(i) \in X_i$ gemeint. Ist $(I, <_I)$ zusätzlich endlich und geordnet, also $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ mit $i_1 <_I i_2 <_I \cdots <_I i_n$, $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man $\prod_{i \in I} X_i = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ sowie $f = (f_i)_{i \in I} = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}) \in \prod_{i \in I} X_i$. Gilt darüber hinaus $X_i = Y$ für alle $i \in I$, so wird an dieser Stelle $M(I, Y) := \prod_{i \in I} X_i$ für die Menge der mittels I indizierten $|I|$-Tupel mit Einträgen aus Y gesetzt. Derartige Tupel können auch in Spaltenform geschrieben werden. Hierzu setzt man für $f \in M(I, Y)$

$$f^{tr} := (f_i)_{i \in I}^{tr} := (f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n})^{tr} := \begin{pmatrix} f_{i_1} \\ f_{i_2} \\ \vdots \\ f_{i_n} \end{pmatrix}$$

und $M^{tr}(I, Y) := \left\{ f^{tr} \mid f \in M(I, Y) \right\}$. Für nichtleere geordnete endliche Mengen $(I, <_I)$, $(J, <_J)$ bezeichnet $M_{|I| \times |J|}(I, J, Y)$ im folgenden die Menge der $|I| \times |J|$-Matrizen mit Einträgen in Y, deren Elemente $A \in M_{|I| \times |J|}(I, J, Y)$ als $A = (A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ geschrieben werden. Zu einer bijektiven Abbildung $\sigma : I \to J$ läßt sich eine Abbildung $\Theta(\sigma) : M^{tr}(J, Y) \to M^{tr}(I, Y)$ durch $[\Theta(\sigma)(x)]_i := x_{\sigma(i)}$ definieren. Für $Y = \mathbb{Z}$ kann $\Theta(\sigma)$ als Homomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$-Moduln, für einen Körper Y als Vektorraum-Homomorphismus aufgefasst werden. Bezüglich der Standardbasen $e_i \in M^{tr}(I, Y)$, $i \in I$, die durch

$$(e_i)_s := \begin{cases} 1 & : \quad s = i \\ 0 & : \quad s \neq i \end{cases}$$

gegeben sind, ist $\Theta(\sigma)$ durch eine Permutationsmatrix $P(\sigma) \in M_{|I|\times|J|}(I, J, Y)$ gegeben : $\Theta(\sigma)(x) = P(\sigma) \cdot x$. Für diese gilt:

$$P(\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & : \quad \sigma(i) = j \\ 0 & : \quad \sigma(i) \neq j \end{cases} .$$

Für Permutationsmatrizen gelten $P(id_I) = E_{|I|}$, $P(\sigma\circ\tau) = P(\tau)\cdot P(\sigma)$, $P\left(\sigma^{-1}\right) = P(\sigma)^{-1}$ und $\det P(\sigma) \in \{1, -1\}$.

Satz 1.11 *Für $X \in \{G, H\}$ seien orientierte Graphen $X = (V_X, E_X, g_X)$, surjektive Nummerierungen $(w_X, \gamma_X) : X \to (\mathcal{V}_{k_X}, \mathcal{E}_{l_X}, h_X)$ sowie ein Isomorphismus $(f, F) : (\mathcal{V}_{k_G}, \mathcal{E}_{l_G}, h_G) \to (\mathcal{V}_{k_H}, \mathcal{E}_{l_H}, h_H)$ gegeben. Dann gibt es bijektive Abbildungen $\sigma_F : \{1, \ldots, l_G\} \to \{1, \ldots, l_H\}$ und $\sigma_f : \{1, \ldots, k_G\} \to \{1, \ldots, k_H\}$, so dass gilt:*

$$P(\sigma_f) \cdot I(H, w_H, \gamma_H) \cdot P(\sigma_F)^{tr} = I(G, w_G, \gamma_G).$$

Beweis Da f, F bijektiv sind, gilt $l := l_G = l_H$ und $k := k_G = k_H$. Also gibt es bijektive Abbildungen $\sigma_F : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l\}$ mit $F(e_i) = e_{\sigma_F(i)}$ für $i \in \{1, \ldots, l\}$ und $\sigma_f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ mit $f(v_i) = v_{\sigma_f(i)}$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Zunächst werden die folgenden Aussagen gezeigt:

1. $\forall e_i \in \mathcal{E}_l \ : \ h_G(e_i) = (v_s, v_t) \Leftrightarrow h_H\left(e_{\sigma_F(i)}\right) = \left(v_{\sigma_f(s)}, v_{\sigma_f(t)}\right)$.

2. $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, l\} \ : \ I(H, w_H, \gamma_H)_{\sigma_f(i),\sigma_F(j)} = I(G, w_G, \gamma_G)_{i,j}$.

Zu 1.:
$\Rightarrow$: $h_H\left(e_{\sigma_F(i)}\right) = h_H F(e_i) = (f \times f)\, h_G(e_i) = (f(v_s), f(v_t)) = \left(v_{\sigma_f(s)}, v_{\sigma_f(t)}\right)$.
$\Leftarrow$: $h_G(e_i) = (f \times f)^{-1} h_H F(e_i) = \left(f^{-1}\left(v_{\sigma_f(s)}\right), f^{-1}\left(v_{\sigma_f(s)}\right)\right) = (v_s, v_t)$.
Zu 2.: Dies folgt unmittelbar aus 1. und der Definition 1.8 der Inzidenzmatrix.
Sei nun $I := I(H, w_H, \gamma_H)$, $s \in \{1, \ldots, k\}, t \in \{1, \ldots, l\}$ und $A := P(\sigma_f) \cdot I \in M_{k\times l}(\mathbb{Z})$. Dann gilt $A_{s,t} = I_{\sigma_f(s),t}$. Definiere $B \in M_{l\times k}(\mathbb{Z})$ durch $B_{t,s} := A^{tr}_{\sigma_F(t),s} = A_{s,\sigma_F(t)} = I_{\sigma_f(s),\sigma_F(t)} = I^{tr}_{\sigma_F(t),\sigma_f(s)}$. Man berechnet für $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, l\}$:

$$\begin{aligned} \left[P(\sigma_f)\, I\, [P(\sigma_F)]^{tr}\right]^{tr}_{j,i} &= \left(P(\sigma_F)\, [P(\sigma_f)\, I]^{tr}\right)_{j,i} \\ &= \left(P(\sigma_F)\, A^{tr}\right)_{j,i} = B_{j,i} = I^{tr}_{\sigma_F(j),\sigma_f(i)}. \end{aligned}$$

Mithilfe von 2. ergibt sich $I(G, w_G, \gamma_G)_{i,j} = I_{\sigma_f(i),\sigma_F(j)} = \left(P(\sigma_f)\, I\, [P(\sigma_F)]^{tr}\right)_{i,j}$. □

Satz 1.12 *Für $X \in \{G, H\}$ seien orientierte Graphen $X = (V_X, E_X, g_X)$, bijektive Nummerierungen $(w_X, \gamma_X) : X \to (\mathcal{V}_{k_X}, \mathcal{E}_{l_X}, h_X)$ sowie $\sigma \in S_{k_H}$ und $\tau \in S_{l_H}$ gegeben, so dass*

$$P(\sigma) \cdot I(H, w_H, \gamma_H) \cdot P(\tau)^{tr} = I(G, w_G, \gamma_G) \tag{1.1}$$

gilt. Dann ist G isomorph zu H.

Beweis Aus (1.1) folgt $k := k_G = k_H$ und $l := l_G = l_H$. Definiere bijektive Abbildungen $f : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$ durch $f(v_i) := v_{\sigma(i)}$ sowie $F : \mathcal{E}_l \to \mathcal{E}_l$ durch $F(e_i) := e_{\tau(i)}$. Es wird gezeigt, dass $(f, F) : (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_G) \to (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_H)$ ein Isomorphismus ist. Dann ist nämlich $(w_H, \gamma_H)^{-1} \circ (f, F) \circ (w_G, \gamma_G)$ nach Korollar 1.6 auf Seite 13 ein Isomorphismus von G nach H.

Es genügt nachzuweisen, dass $h_H F(e_i) = (f \times f) h_G(e_i)$ für alle $e_i \in \mathcal{E}_l$ gilt. Sei dazu $h_H F(e_i) = (v_s, v_t)$.

1. Fall : $s \neq t$. Folgende Äquivalenz zeigt die Behauptung:

$$\begin{aligned}
h_H F(e_i) = h_H\left(e_{\tau(i)}\right) = (v_s, v_t) \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = I(H, w_H, \gamma_H)_{s,\tau(i)} \overset{(1.1)}{=} I(G, w_G, \gamma_G)_{\sigma^{-1}(s),i} \text{ und} \\
& \quad -1 = I(H, w_H, \gamma_H)_{t,\tau(i)} \overset{(1.1)}{=} I(G, w_G, \gamma_G)_{\sigma^{-1}(t),i} \\
&\Leftrightarrow \quad h_G(e_i) = \left(v_{\sigma^{-1}(s)}, v_{\sigma^{-1}(t)}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (v_s, v_t) = (f \times f) h_G(e_i).
\end{aligned}$$

2.Fall : $s = t$. Folgende Äquivalenz zeigt die Behauptung:

$$\begin{aligned}
h_H F(e_i) = h_H\left(e_{\tau(i)}\right) = (v_s, v_s) \quad &\Leftrightarrow \quad -0 = I(H, w_H, \gamma_H)_{s,\tau(i)} \overset{(1.1)}{=} I(G, w_G, \gamma_G)_{\sigma^{-1}(s),i} \\
&\Leftrightarrow \quad h_G(e_i) = \left(v_{\sigma^{-1}(s)}, v_{\sigma^{-1}(s)}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (v_s, v_s) = (f \times f) h_G(e_i).
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen

1. Da sich jede Permutation als Komposition endlich vieler Transpositionen schreiben läßt, bedeuten die Sätze 1.11 und 1.12, dass zwei orientierte bijektiv nummerierte Graphen genau dann isomorph sind, wenn sich ihre Inzidenzmatrizen durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen ineinander überführen lassen.

2. Die Menge Zeilensummen der Inzidenzmatrix eines mittels (w, γ) bijektiv nummerierten orientierten Graphen $G = (V, E, g)$ wird durch Zeilen- und Spaltenvertau-

schungen nicht verändert, daher ist die Menge

$$\left\{ \sum_{j=1}^{|E|} I\left(G, w, \gamma\right)_{i,j} \;\middle|\; 1 \le i \le |V| \right\}$$

eine Invariante für die Isomorphie von orientierten Graphen.

3. Die Sätze 1.11, 1.12 gelten in entsprechender Form auch für nicht-orientierte Graphen.

1.2 Topologische Graphen

Zellenkomplexe Um im folgenden den Begriff des topologischen Graphen zu definieren, werden spezielle eindimensionale Zellenkomplexe verwendet. Eine ausführliche Definition eines Zellenkomplexes kann [3], [21] entnommen werden. Mit einem Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ ist ein topologischer Raum $\mathcal{Z}$ zusammen mit einer Zellenzerlegung und charakteristischen Abbildungen gemeint. Die hier auftretenden Zellenkomplexe haben endlich viele Zellen, sind also kompakte topologische Räume. Eine Zelle ist eine zu einem geeigneten offenen Ball homöomorphe Teilmenge des Zellenkomplexes. Die Menge der Zellen eines Zellenkomplexes $\mathcal{Z}$ wird mit $M(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ bezeichnet. Für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sind $\mathcal{Z}^n := \{e \subset \mathcal{Z} | dim(e) \le n\}$ die Gerüste von $\mathcal{Z}$. Die Menge der eindimensionalen Zellen von $\mathcal{Z}$ wird mit $\mathcal{Z}_1 := \mathcal{Z}^1 \backslash \mathcal{Z}^0 \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ bezeichnet. Die Nullzellen hingegen werden mittels $\mathcal{Z}_0 := \left\{x \in \mathcal{Z} \mid \{x\} \in \mathcal{Z}^0\right\}$ als Teilmenge von $\mathcal{Z}$ aufgefasst. Die charakteristischen Abbildungen $\left\{F_e : D^1 \to \mathcal{Z}\right\}_{e \in \mathcal{Z}_1}$ von $\mathcal{Z}$ induzieren jeweils eine Orientierung der Zellen von $\mathcal{Z}$, siehe [9], S. 3-4. Diese läßt sich mit einer Durchlaufrichtung einer Zelle von $F_e(-1)$ nach $F_e(1)$ identifizieren. Eine Orientierung eines Zellenkomplexes besteht aus der Gesamtheit aller Orientierung der Zellen aus $\mathcal{Z}_1$. Ein orientierter Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ ist ein Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ zusammen mit einer Orientierung o. Ab nun seien sämtliche auftretenden Zellenkomplexe eindimensional und endlich.

Definition 1.13 *Sei $\mathcal{Z}$ ein Zellenkomplex. Für $i \in \{0, 1\}$ und $e \in Z_i(\mathcal{Z})$ seien $F_e : D^i \to \mathcal{Z}$ die zugehörigen charakteristischen Abbildungen von $\mathcal{Z}$. Definiere $z : \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{P}_2\left(\mathcal{Z}_0\right)$ durch $e \mapsto \{F_e(-1), F_e(1)\}$. Dann bezeichnet das Tripel $(\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, z)$ den* **nicht-orientierten Graphen zum Zellenkomplex** *$\mathcal{Z}$. Ein* **orientierter Graph zum Zellenkomplex** *$\mathcal{Z}$ ist ein Tripel $(\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, o)$, so dass die Abbildung $o : \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}_0$ die Bedingung $\nu \circ o = z$ erfüllt. Es sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex. Diejenige Orientierung g eines orientierten Graphen zum Zellenkomplex $\mathcal{Z}$, die der Bedingung $g(e) = (F_e(-1), F_e(1))$ für alle $e \in \mathcal{Z}_1$*

genügt, heißt die von $(\mathcal{Z}, o)$ **induzierte Orientierung**. *Dieser Graph zum Zellenkomplex* $\mathcal{Z}$ *wird* **induzierter orientierter Graph** *genannt. Sowohl im orientierten als auch im nicht-orientierten Fall wird ein Graph zum Zellenkomplex* $\mathcal{Z}$ *mit* $G(\mathcal{Z})$ *bezeichnet.* □

Bemerkungen

1. Nicht-orientierte Graphen zu homöomorphen Zellenkomplexen sind isomorph. Der nicht-orientierte Graph zu einem Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ hängt nur von dem zugrundeliegenden topologischen Raum $\mathcal{Z}$ und der Zellenzerlegung ab.

2. Jedem orientierten Graphen $G(\mathcal{Z})$ zu einem Zellenkomplex $\mathcal{Z}$, der keine Schlaufen besitzt, läßt sich genau ein orientierter Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ zuordnen, dessen induzierter orientierter Graph $G(\mathcal{Z})$ ist.

Definition 1.14 *Sei* $\mathcal{Z}$ *ein Zellenkomplex. Eine* **(einfache) Eckennummerierung** *von* $\mathcal{Z}$ *ist eine (einfache) Eckennummerierung von* $G(\mathcal{Z})$*. Eine* **(einfache) Kantennummerierung** *von* $\mathcal{Z}$ *ist eine (einfache) Kantennummerierung von* $G(\mathcal{Z})$*. Eine* **(einfache) Nummerierung** *von* $\mathcal{Z}$ *ist eine (einfache) Nummerierung von* $G(\mathcal{Z})$*.* □

Definition 1.15 *Sei* $\mathcal{Z}$ *ein Zellenkomplex. Das Bild* $\Gamma(\mathcal{Z})$ *einer Einbettung* $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ *heißt* **topologischer Graph**.

Satz 1.16 *Sei* $\mathcal{Z}$ *ein Zellenkomplex und* $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ *eine Einbettung. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. $\Gamma(\mathcal{Z})$ *ist ein Zellenkomplex mit eindimensionalen Zellen* $\Gamma(\mathcal{Z})_1 = \mathcal{P}(\Gamma)(\mathcal{Z}_1)$ *und Nullzellen* $\Gamma(\mathcal{Z})_0 = \Gamma(\mathcal{Z}_0)$.

2. *Definiert man eine Abbildung* $\cap\Gamma : \Gamma(\mathcal{Z})_1 \to \mathcal{P}_2(\Gamma(\mathcal{Z})_0)$ *durch* $(\cap\Gamma)(x) := \overline{x} \cap \Gamma(\mathcal{Z})_0$*, wobei mit* $\overline{x}$ *der topologische Abschluss gemeint ist, so gilt* $(\Gamma(\mathcal{Z})_0, \Gamma(\mathcal{Z})_1, \cap\Gamma) = G(\Gamma(\mathcal{Z}))$ *für den nicht-orientierten Graphen zum Zellenkomplex* $\Gamma(\mathcal{Z})$.

3. *Die Abbildung* $(\Gamma|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}) : G(\mathcal{Z}) \to G(\Gamma(\mathcal{Z}))$ *ist ein Isomorphismus nicht-orientierter Graphen.*

Beweis **Zu 1.:** Ist F_e eine charakteristische Abbildung von $\mathcal{Z}$, so ist $\Gamma \circ F_e$ eine charakteristische Abbildung von $\Gamma(\mathcal{Z})$.

Zu 2.: Sei $x = \mathcal{P}(\Gamma)(e)$ für ein $e \in \mathcal{Z}_1$. Es gilt damit: $(\cap\Gamma)(x) = \overline{\Gamma(e)} \cap \Gamma(\mathcal{Z})_0 = \overline{\Gamma(e)} \cap \Gamma(\mathcal{Z}_0) = \Gamma(\bar{e} \cap \mathcal{Z}_0) = \Gamma(\{F_e(1), F_e(-1)\}) = \{\Gamma F_e(1), \Gamma F_e(-1)\}$.

Zu 3.: Die Abbildungen sind bijektiv, da Γ eine Einbettung ist. Weiterhin gilt für $e \in \mathcal{Z}_1$: $(\cap\Gamma)\left(\mathcal{P}\left(\Gamma\right)|_{\mathcal{Z}_1}(e)\right) = (\cap\Gamma)\left(\mathcal{P}\left(\Gamma\right)(e)\right) = (\cap\Gamma)\left(\Gamma(e)\right) = \overline{\Gamma(e)} \cap \Gamma\left(\mathcal{Z}_0\right) = \Gamma\left(\{F_e(1), F_e(-1)\}\right)$ $= \mathcal{P}_2\left(\Gamma\right)\left(z(e)\right)$. $\square$

1.3 Graphendiagramme

Topologische Graphen lassen sich anhand von regulären Graphendiagrammen untersuchen. Ist eine Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ und eine reguläre Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ auf eine geeignete Ebene P gegeben, so besteht ein reguläres Diagramm D aus dem Bild $\pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})\right)$ zusammen mit Über- und Unterkreuzungsinformationen an den Doppelpunkten $\left\{x \in \pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})\right) \,\middle|\, \left|\pi^{-1}(x)\right| = 2\right\}$. Es seien $\{F_e\}_{e\in\Gamma(\mathcal{Z})_1}$ charakteristische Abbildungen zum Zellenkomplex $\Gamma(\mathcal{Z})$ und o eine Orientierung von $\Gamma(\mathcal{Z})$. Für jede Zelle $e \in \Gamma(\mathcal{Z})_1$ läßt sich $\pi(e)$ mit einer Durchlaufrichtung von $\pi F_e(-1)$ nach $\pi F_e(1)$ versehen. Durch Anbringen eines Pfeils an $\pi(e)$ im Diagramm D wird so eine Orientierung von $\pi(e)$ festgelegt. Eine Orientierung von D besteht aus der Gesamtheit von Orientierungen von $\pi(e)$ für alle $e \in \Gamma(\mathcal{Z})_1$. Ein orientiertes Diagramm (D, o) besteht aus einem Diagramm D und einer Orientierung o von D.

Definition 1.17 *Sei D ein Diagramm zu einer Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ und einer regulären Projektion π. Definiere $\cap D : \mathcal{P}\left(\pi\right)\left(\Gamma(\mathcal{Z})_1\right) \to \mathcal{P}_2(\pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right))$ durch $x \mapsto \overline{x} \cap \pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right)$. Das Tripel $\left(\pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right), \mathcal{P}\left(\pi\right)\left(\Gamma(\mathcal{Z})_1\right), \cap D\right)$ heißt* **nicht-orientierter Graph zum Diagramm** *D. Ein* **orientierter Graph zum Diagramm** *D ist ein Tripel $(\pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right),$ $\mathcal{P}\left(\pi\right)\left(\Gamma(\mathcal{Z})_1\right),\, o(D))$, so dass die Abbildung $o(D) : \mathcal{P}\left(\pi\right)\left(\Gamma(\mathcal{Z})_1\right) \to \pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right) \times \pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right)$ die Bedingung $\nu \circ o(D) = \cap D$ erfüllt. Es sei (D, o) ein orientiertes Diagramm. Diejenige Orientierung g eines orientierten Graphen zum Diagramm D, die der Bedingung $g\left(\pi(e)\right) = \left(\pi F_e(-1), \pi F_e(1)\right)$ für alle $e \in \Gamma(\mathcal{Z})_1$ genügt, heißt die von (D, o)* **induzierte Orientierung**. *Dieser Graph wird* **induzierter orientierter Graph zum Diagramm** *D genannt. Sowohl im orientierten als auch im nicht-orientierten Fall wird ein Graph zu einem Diagramm D mit $G(D)$ bezeichnet.* $\square$

Satz 1.18 *Sei D ein Diagramm zu einer Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ und einer regulären Projektion π. Die Abbildung $\left(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}, \mathcal{P}\left(\pi\right)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right) : G\left(\Gamma(\mathcal{Z})\right) \to G(D)$ ist ein Isomorphismus nicht-orientierter Graphen.*

Beweis Da π regulär ist, sind die Abbildungen offenbar bijektiv. Für $x \in \Gamma(\mathcal{Z})_1$ gilt weiterhin: $\left(\mathcal{P}_2(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}) \circ (\cap\Gamma)\right)(x) = \mathcal{P}_2(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0})\left(\bar{x} \cap \Gamma(\mathcal{Z})_0\right) = \pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}\left(\bar{x} \cap \Gamma(\mathcal{Z})_0\right) =$

$\pi\left(\bar{x} \cap \Gamma(\mathcal{Z})_0\right) = \overline{\pi(x)} \cap \pi\left(\Gamma(\mathcal{Z})_0\right) = (\cap D)\left(\pi(x)\right) = \left((\cap D) \circ \mathcal{P}(\pi)\,|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right)(x).$ □

Definition 1.19 *Sei D ein reguläres Graphendiagramm. Eine* **(einfache) Eckennummerierung** *von D ist eine (einfache) Eckennummerierung von $G(D)$. Eine* **(einfache) Kantennummerierung** *des Diagramms D ist eine (einfache) Kantennummerierung von $G(D)$. Eine* **(einfache) Nummerierung** *von D ist eine (einfache) Nummerierung von $G(D)$.* □

Definition 1.20 *Ein* **Kreuzungspunkt** τ_x *eines Graphendiagramms D ist ein Doppelpunkt x des Bildes einer regulären Projektion zusammen mit einer Über/Unterkreuzungsinformation. Die Menge der Kreuzungen eines Diagramms wird mit $cr(D)$ bezeichnet. Ist ein orientiertes Diagramm (D, o) gegeben, definiert man die Abbildung $\epsilon(D, o) : cr(D) \to \{-1, 1\}$ gemäß folgender lokaler Kreuzungssituationen:*

-1 $+1$

Für ein orientiertes Diagramm (D, o) zusammen mit einer (einfachen) Kantennummerierung γ definiert man für $e_i, e_j \in \mathcal{E}_l$ die **Verdrillungszahl der Kanten** e_i *und* e_j *durch:*

$$w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_i),\gamma^{-1}(e_j)} := \sum_{\{\tau_x \in cr(D) | x \in f \cap g\,, f \in \gamma^{-1}(e_i), g \in \gamma^{-1}(e_j)\}} \epsilon(D, o)(\tau_x)$$

□

1.4 Äquivalenz von topologischen Graphen und deren Diagrammen

Sprechweisen und Notationen Es seien $\mathcal{Z}$ ein Zellenkomplex, $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung, w eine (einfache) Eckennummerierung, γ eine (einfache) Kantennummerierung und o eine Orientierung von $\Gamma(\mathcal{Z})$. Die nachfolgende Tabelle definiert Bezeichnungen und Sprechweisen für topologische Graphen:

$\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$	nicht-orientiert	orientiert
nicht-nummeriert	$\Gamma(\mathcal{Z})$	$(\Gamma(\mathcal{Z}), o)$
(einfach) eckennummeriert	$(\Gamma(\mathcal{Z}), w)$	$(\Gamma(\mathcal{Z}), w, o)$
(einfach) kantennummeriert	$(\Gamma(\mathcal{Z}), \gamma)$	$(\Gamma(\mathcal{Z}), \gamma, o)$
(einfach) nummeriert	$(\Gamma(\mathcal{Z}), w, \gamma)$	$(\Gamma(\mathcal{Z}), w, \gamma, o)$

Zum Beispiel definiert die Tabelle folgende Sprechweise: Ein kantennummerierter orientierter topologischer Graph ist ein Tupel $(\Gamma(\mathcal{Z}), \gamma, o)$, wobei $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung eines Zellenkomplexes $\mathcal{Z}$, γ eine Kantennummerierung von $\Gamma(\mathcal{Z})$ und o eine Orientierung von $\Gamma(\mathcal{Z})$ ist.

Entsprechende Notationen können für Diagramme festgelegt werden.

Definition 1.21 *Gegeben seien Einbettungen $\Gamma, \Delta : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$. Zwei (einfach) nummerierte orientierte topologische Graphen $\left(\Gamma(\mathcal{Z}), w_\Gamma, \gamma_\Gamma, o_{\Gamma(\mathcal{Z})}\right)$ und $\left(\Delta(\mathcal{Z}), w_\Delta, \gamma_\Delta, o_{\Delta(\mathcal{Z})}\right)$ heißen äquivalent, $\left(\Gamma(\mathcal{Z}), w_\Gamma, \gamma_\Gamma, o_{\Gamma(\mathcal{Z})}\right) \sim \left(\Delta(\mathcal{Z}), w_\Delta, \gamma_\Delta, o_{\Delta(\mathcal{Z})}\right)$, wenn es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, der zum einen die Bedingungen*

1. $(h \circ \Gamma)(\mathcal{Z}) = \Delta(\mathcal{Z})$, 2. $w_\Gamma = w_\Delta \circ h|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}$ und 3. $\gamma_\Gamma = \gamma_\Delta \circ \mathcal{P}(h)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}$

erfüllt und zum anderen die Orientierungen $o_{\Gamma(\mathcal{Z})}$ und $o_{\Delta(\mathcal{Z})}$ respektiert. □

Bemerkung Man erhält abgeschwächte Äquivalenzrelationen zwischen geeigneten topologischen Graphen der obenstehenden Tabelle, wenn man in Definition 1.21 entprechende Bedingungen weglässt.

Satz 1.22 *Gegeben seien Einbettungen $\Gamma, \Delta : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$. Für $\Theta \in \{\Gamma, \Delta\}$ seien $w_\Theta : \Theta(\mathcal{Z})_0 \to \mathcal{V}_k$ surjektive Eckennummerierungen, $\gamma_\Theta : \Theta(\mathcal{Z})_1 \to \mathcal{E}_l$ surjektive Kantennummerierungen und $o_{\Theta(\mathcal{Z})}$ Orientierungen von $\Theta(\mathcal{Z})$. Dann gelten:*

1. *Der Homöomorphismus h aus Definition 1.21 induziert einen Graphenisomorphismus $\left(h|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}, \mathcal{P}(h)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right) : G(\Gamma(\mathcal{Z})) \to G(\Delta(\mathcal{Z}))$ der induzierten orientierten Graphen.*

2. *Sind $\left(\Gamma(\mathcal{Z}), w_\Gamma, \gamma_\Gamma, o_{\Gamma(\mathcal{Z})}\right)$ und $\left(\Delta(\mathcal{Z}), w_\Delta, \gamma_\Delta, o_{\Delta(\mathcal{Z})}\right)$ äquivalent im Sinne der Definition 1.21, so folgt $IO\left(G(\Gamma(\mathcal{Z})), w_\Gamma, \gamma_\Gamma\right) = IO\left(G(\Delta(\mathcal{Z})), w_\Delta, \gamma_\Delta\right)$.*

3. *Sind $\left(\Gamma(\mathcal{Z}), w_\Gamma, \gamma_\Gamma, o_{\Gamma(\mathcal{Z})}\right)$ und $\left(\Delta(\mathcal{Z}), w_\Delta, \gamma_\Delta, o_{\Delta(\mathcal{Z})}\right)$ äquivalent und $(w_\Theta, \gamma_\Theta)$ Nummerierungen, so gilt $I\left(G(\Gamma(\mathcal{Z})), w_\Gamma, \gamma_\Gamma\right) = I\left(G(\Delta(\mathcal{Z})), w_\Delta, \gamma_\Delta\right)$.*

Beweis Zu 1.: Da h ein Homöomorphismus ist, der $\Gamma(\mathcal{Z})$ auf $\Delta(\mathcal{Z})$ abbildet, sind die beteiligten Abbildungen bijektiv. Seien $o(\Theta)$ die induzierten Orientierungen von $G(\Theta(\mathcal{Z}))$. Die Orientierungen $o_{\Theta(\mathcal{Z})}$ seien durch charakteristische Abbildungen $\left\{F_e^{\Theta(\mathcal{Z})}\right\}_{e \in \Theta(\mathcal{Z})_1}$ gegeben. Da h die Orientierungen respektiert, gilt $h\left(F_e^{\Gamma(\mathcal{Z})}(\pm 1)\right) = F_{h(e)}^{\Delta(\mathcal{Z})}(\pm 1)$ für alle $e \in \Gamma(\mathcal{Z})_1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\left(o(\Delta)\circ\mathcal{P}(h)\,|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right)(e) &= o(\Delta)\,(h(e)) = \left(F_{h(e)}^{\Delta(\mathcal{Z})}(-1), F_{h(e)}^{\Delta(\mathcal{Z})}(1)\right)\\ &= (h\times h)\left(F_e^{\Gamma(\mathcal{Z})}(-1), F_e^{\Gamma(\mathcal{Z})}(1)\right)\\ &= ((h\times h)\circ o(\Gamma))\,(e).\end{aligned}$$

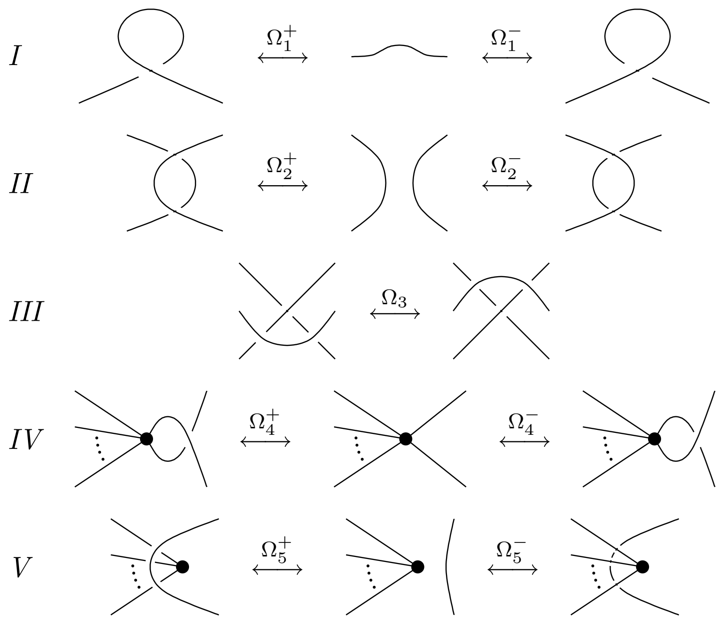
Zu 2.: Zusammen mit der ersten Aussage sowie zweitens und drittens aus Definition 1.21 folgt die Behauptung aus Satz 1.10 auf Seite 15.

Zu 3.: Betrachte folgendes Diagramm von Homomorphismen orientierter Graphen:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h) \arrow[r, "{(a,A)}"] & (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h) \\ G\left(\Gamma(\mathcal{Z})\right) \arrow[u, "{(\omega_\Gamma,\gamma_\Gamma)}"] \arrow[r, "{\left(h|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}, \mathcal{P}(h)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right)}"'] & G\left(\Delta(\mathcal{Z})\right) \arrow[u, "{(w_\Delta,\gamma_\Delta)}"'] \end{tikzcd} .$$

Wegen der Bedingungen aus Definition 1.21 kann $(a, A) = (id, Id)$ gewählt werden. Daher sind die Permutationsmatrizen $P(\sigma_a)$ und $P(\sigma_A)$ in Satz 1.11 die Einheitsmatrizen entsprechender Dimension. $\square$

Definition 1.23 *Zwei Graphendiagramme D und D' heißen äquivalent, $D \sim D'$, wenn sie sich durch eine endliche Anzahl von Reidemeisterbewegungen*



und endlich vielen orientierungserhaltenden Homöomorphismen der Projektionsebene ineinander überführen lassen. Zwei orientierte Diagramme (D, o), (D', o') sind äquivalent, wenn die Diagramme D und D' es sind und darüber hinaus die Orientierungen o und o' respektiert werden.

Bemerkungen

1. Zwei topologische Graphen sind genau dann äquivalent, wenn sie äquivalente Diagramme besitzen, siehe [7], Th. 2.1.

2. Äquivalente orientierte Diagramme $(D, o) \sim (D', o')$ induzieren einen Isomorphismus $(h, H) : G(D) \to G(D')$ orientierter Graphen.

Definition 1.24 *Zwei (einfach) nummerierte orientierte Graphendiagramme* (D, w_D, γ_D, o_D) *und* $(D', w_{D'}, \gamma_{D'}, o_{D'})$ *heißen äquivalent,* $(D, w_D, \gamma_D, o_D) \sim (D', w_{D'}, \gamma_{D'}, o_{D'})$*, wenn die Diagramme* (D, o_D) *und* $(D', o_{D'})$ *äquivalent sind, so dass* $w_{D'} \circ h = w_D$ *und* $\gamma_{D'} \circ H = \gamma_D$ *für den induzierten Isomorphismus* $(h, H) : G(D) \to G(D')$ *gelten.* □

Bemerkung Man erhält abgeschwächte Äquivalenzrelationen zwischen Graphendiagrammen, wenn man in Definition 1.24 entsprechende Bedingungen weglässt.

Satz 1.25 *Gegeben seien orientierte Diagramme* (D, o_D)*,* $(D', o_{D'})$*. Für* $\Theta \in \{D, D'\}$ *sei* $G(\Theta) = (V(\Theta), E(\Theta), o(\Theta))$ *der induzierte orientierte Graph zum Diagramm* Θ*. Weiterhin seien* $w_\Theta : V(\Theta) \to \mathcal{V}_k$ *surjektive Eckennummerierungen und* $\gamma_\Theta : E(\Theta) \to \mathcal{E}_l$ *surjektive Kantennummerierungen. Dann gelten:*

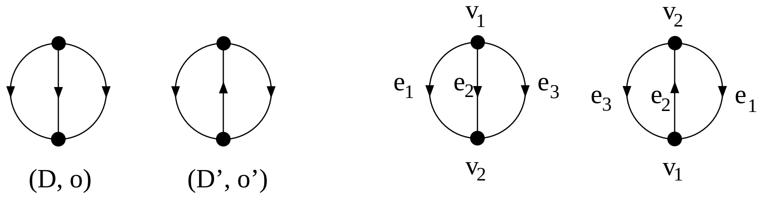
1. $(D, w_D, \gamma_D, o_D) \sim (D', w_{D'}, \gamma_{D'}, o_{D'}) \Rightarrow IO\,(G(D), w_D, \gamma_D) = IO\,(G(D'), w_{D'}, \gamma_{D'})\,.$

2. $(D, w_D, \gamma_D, o_D) \sim (D', w_{D'}, \gamma_{D'}, o_{D'})$ *und* $(w_\Theta, \gamma_\Theta)$ *sind Nummerierungen* $\Longrightarrow$ $I\,(G\,(D)\,, w_D, \gamma_D)) = I\,(G\,(D')\;,\; w_{D'}, \gamma_{D'})\,.$

Beweis Mithilfe des induzierten Isomorphismus (h, H) aus der Bemerkung 2. von Seite 24 läßt sich wie im Beweis des Satzes 1.22 auf Seite 23 vorgehen. □

Konstruktion einer Invariante Für ein (einfach) nummeriertes orientiertes Diagramm hängt die Verdrillungszahl zweier Kanten definitionsgemäß nicht von der Eckennummerierung ab. Ebenso verändern Reidemeisterbewegungen vom Typ zwei und drei, sowie orientierungserhaltende Homöomorphismen der Ebene (analog zu der klassischen Verschlingungszahl von Verkettungen) den Wert einer Verdrillungszahl nicht. Um mithilfe der Verdrillungszahl zweier Kanten eine Invariante für die Äquivalenz (einfach) kantennummerierter orientierter Diagramme zu erhalten, werden im nächsten Kapitel die Auswirkungen der übrigen Reidemeiserbewegungen untersucht.

Beispiel Graphendiagramme, deren zugehörige Graphen nicht isomorph sind, sind (unter Berücksichtigung einer geeigneten Äquivalenzrelation) nicht äquivalent. Es soll an dieser Stelle demonstriert werden, wie die bisher eingeführten Begriffe benutzt werden können, um derartige Graphen zu unterscheiden. Gegeben seien zwei orientierte Diagramme (D, o), (D', o') wie in der Abbildung (1.2) links dargestellt.



(1.2)

Es soll gezeigt werden, dass die Diagramme nicht äquivalent sind. Dazu werden zunächst jeweils beliebige bijektive Nummerierungen (w_D, γ_D) und $(w_{D'}, \gamma_{D'})$ wie in (1.2) rechts gewählt. Sind die Diagramme äquivalent, gibt es nach Korollar 1.6 auf Seite 13 und Bemerkung 2. von Seite 24 ein Diagramm

$$(\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_D) \xleftarrow{\quad (w_D,\gamma_D) \quad} G(D) \xrightarrow{(h,H)} G\left(D'\right) \xrightarrow{\quad (w_{D'},\gamma_{D'}) \quad} (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_{D'})$$

von Isomorphismen orientierter Graphen. Nach Satz 1.11 auf Seite 17 gehen daher die Inzidenzmatrizen durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auseinander hervor. Sie haben die Gestalt $I\left(G(D), w_D, \gamma_D\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sowie $I\left(G(D'), w_{D'}, \gamma_{D'}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Man berechnet aber die Mengen aus Bemerkung 2. auf Seite 18 zu $\{3, -3\}$ und $\{1, -1\}$.

Kapitel 2

Verschlingungsinvarianten

Die vorbereitenden Aussagen in 8.1 werden hauptsächlich erst ab 2.3 benötigt. Es kann also auch mit der Lektüre des Abschnittes 2.2 über Verschlingungsinvarianten begonnen werden. In 2.3 werden Umnummerierungen der zu den Einbettungen gehörigen Graphen untersucht. In 2.5 werden Verschlingungsinvarianten von Teilgraphen betrachtet. Im letzten Abschnitt wird eine vereinfachte Darstellung der Verschlingungsinvarianten, wie sie in 2.2 erhalten wurden, eingeführt.

Als Generalvoraussetzung bezeichnet $G(D) = (V_D, E_D, o_D)$ den induzierten orientierten Graphen zu einem orientierten Diagram D.

2.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen von Graphenhomomorphismen auf die Inzidenz von Kanten und Ecken bezüglich vorgegebener Nummerierungen studiert.

Generalvoraussetzung 2.1 *Für $X \in \{G, H\}$ seien $X = (V_X, E_X, g_X)$ orientierte Graphen mit Eckennummerierungen $w_X : V_X \to \mathcal{V}_{k_X}$ und Kantennummerierungen $\gamma_X : E_X \to \mathcal{E}_{l_X}$. Die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} V_G & \xrightarrow{f} & V_H \\ {\scriptstyle w_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w_H} \\ \mathcal{V}_{k_G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{V}_{k_H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{F} & E_H \\ {\scriptstyle \gamma_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_H} \\ \mathcal{E}_{l_G} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{E}_{l_H} \end{array} \tag{2.1}$$

seien kommutativ, wobei $(f, F) : G \to H$ ein Homomorphismus ist und ϕ, Φ gegeben sind durch

$$\psi \;\;:\;\; \{1, \ldots, k_G\} \to \{1, \ldots, k_H\}, \qquad \phi(v_i) := v_{\psi(i)} \quad \textit{und} \tag{2.2}$$

$$\Psi \; : \; \{1,\ldots,l_G\} \to \{1,\ldots,l_H\}, \qquad \Phi(e_i) := e_{\Psi(i)}. \tag{2.3}$$

Gibt es eine Abbildung $h_X : \mathcal{E}_{l_X} \to \mathcal{V}_{k_X} \times \mathcal{V}_{k_X}$ so wird der zugehörige orientierte Graph mit $(\mathcal{V}_{k_X}, \mathcal{E}_{l_X}, h_X)$ bezeichnet. □

Definition 2.2 *Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, g)$ mit einer Eckennummerierung $w : V \to \mathcal{V}_k$ und einer Kantennummerierung $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$.*

1. $n, m \in \mathbb{N} \quad : \quad N_{n\times m} := N_{n,m} := \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$.
2. $l \in \mathbb{N} \quad : \quad Sym(l) := \{(p,q) \in N_{l,l} \mid p \le q\}$.
3. $i \in \{1,\ldots,k\} \quad : \quad N_i(G,w,\gamma) := \{(p,q) \in Sym(l) \mid p,q \in ad(i,G,w,\gamma)\}$.
4. $N_\cup(G,w,\gamma) := \bigcup_{i=1}^k N_i(G,w,\gamma)$.
5. $\rho := \rho_l : N_{l,l} \to Sym(l), \quad \rho_l(p,q) := \begin{cases} (p,q) : p \le q \\ (q,p) : p \ge q \end{cases}.$
6. *Eine Abbildung $f : \{1,\ldots,l\} \to \{1,\ldots,l'\}, l' \in \mathbb{N}$ induziert eine Abbildung $S(f) : Sym(l) \to Sym(l')$ durch $S(f)(p,q) := \rho\,(f(p), f(q))$.*

Die Mengen aus erstens bis viertens seien jeweils mit der lexikographischen Ordnung versehen. □

Lemma 2.3 *Sind $(w_G, \gamma_G), (w_H, \gamma_H)$ Homomorphismen und γ_G surjektiv, dann ist auch (ϕ, Φ) ein Homomorphismus.*

Beweis Sei $e_s \in \mathcal{E}_{l_G}$. Nach Voraussetzung gibt es $x \in E_G$ mit $\gamma_G(x) = e_s$. Dann berechnet man:

$$\begin{aligned} h_H\Phi(e_s) &= h_H\Phi\gamma_G(x) = h_H\gamma_H F(x) = (w_H \times w_H)\, g_H F(x) \\ &= (w_H \times w_H)\,(f \times f)\, g_G(x) = (\phi \times \phi)\,(w_G \times w_G)\, g_G(x) \\ &= (\phi \times \phi)\, h_G\gamma_G(x) = (\phi \times \phi)\, h_G(e_s) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4 *Sei (w_G, γ_G) ein Homomorphismus und $i \in \{1,\ldots,k_G\}$. Dann gilt*

$$ad\,(i, G, w_G, \gamma_G) \;\subset\; \left\{ j \in \{1,\ldots,l_G\} \;\middle|\; I\,(G, w_G, \gamma_G)_{i,j} \in \{1,-1,-0\} \right\} \tag{2.4}$$
$$= \; \{ j \in \{1,\ldots,l_G\} \mid v_i \in \nu\,(h_G(e_j)) \}. \tag{2.5}$$

Ist γ_G surjektiv, so gilt $\supset$ in (2.4).

Beweis Die Gleichung (2.5) ist definitionsgemäß richtig. Zum Nachweis von (2.4) wird $j \in ad(i,G,w_G,\gamma_G) \Leftrightarrow v_i \in \nu h_G(e_j)$ gezeigt.

$\subset$: $j \in ad(i,G,w_G,\gamma_G) \Rightarrow \exists c,v \;:\; c \in \gamma_G^{-1}(e_j) \cap Inz(v,G) \;\wedge\; w_G(v) = v_i \Rightarrow \gamma_G(c) = e_j \;\wedge\; v \in \nu g_G(c) \Rightarrow v_i = w_G(v) \in \nu(w_G \times w_G)g_G(c) = \nu h_G \gamma_G(c) = \nu h_G(e_j)$.

$\supset$: γ_G surjektiv $\Rightarrow \exists e \in E_G : \gamma_G(e) = e_j \Rightarrow v_i \in \nu h_G \gamma_G(e) = \nu(w_G \times w_G)g_G(e) \Rightarrow \exists u \in \nu g_G(e) : w_G(u) = v_i \Rightarrow e \in \gamma_G^{-1}(e_j) \cap Inz(u,G) \;\wedge\; u \in w_G^{-1}(v_i) \Rightarrow j \in ad(i,G,w_G,\gamma_G)$ □

Lemma 2.5 *Sei $i \in \{1,\dots,k_G\}$ und $ad\,(i,G,w_G,\gamma_G) \neq \emptyset$. In 1. bis 3. sei die Abbildung Λ definiert durch $\Lambda(j) := \Psi(j)$.*

1. *$\Lambda : ad\,(i,G,w_G,\gamma_G) \to ad\,(\psi(i),H,w_H,\gamma_H)$ ist wohldefiniert.*

2. *Ist ϕ injektiv und $\gamma_H^{-1}(M) \subset Bild\,(F)$ für eine Menge $M \subset \mathcal{E}_{l_H}$, so ist $\Lambda : ad\,(i,G,w_G,\gamma_G) \to ad\,(\psi(i),H,w_H,\gamma_H) \cap \{j \in \{1,\dots,l_H\} \mid e_j \in M\}$ surjektiv, sofern $ad\,(\psi(i),H,w_H,\gamma_H) \cap \{j \in \{1,\dots,l_H\} \mid e_j \in M\} \neq \emptyset$ ist.*

3. *Sind $(w_H,\gamma_H),(w_G,\gamma_G)$ Homomorphismen, ϕ injektiv und γ_G surjektiv, so ist $\Lambda : ad\,(i,G,w_G,\gamma_G) \to ad\,(\psi(i),H,w_H,\gamma_H) \cap Bild\,(\Psi)$ surjektiv.*

Beweis **Zu 1.:** Sei $j \in ad\,(i,G,w_G,\gamma_G) \Leftrightarrow \exists v \in w_G^{-1}(v_i) : \gamma_G^{-1}(e_j) \cap Inz(v,G) \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $c \in \gamma_G^{-1}(e_j) \cap Inz(v,G)$.

a. $c \in \gamma_G^{-1}(e_j) \Rightarrow \gamma_G(c) = e_j \Rightarrow \Phi\left(\gamma_G(c)\right) = \gamma_H\left(F(c)\right) = e_{\Psi(j)} \Rightarrow F(c) \in \gamma_H^{-1}(e_{\Psi(j)})$.

b. $c \in Inz(v,G) \Rightarrow v \in \nu\left(g_G(c)\right) \Rightarrow f(v) \in \left(\nu \circ g_H\right)\left(F(c)\right) \Rightarrow F(c) \in Inz(f(v),H)$.

c. $w_H\left(f(v)\right) = \phi\left(w_G(v)\right) = \phi(v_i) = v_{\psi(i)}$.

Aus a. bis c. folgt $f(v) \in w_H^{-1}(v_{\psi(i)})$ und $F(c) \in \gamma_H^{-1}(e_{\Psi(j)}) \cap Inz(f(v),H)$. Somit gilt $\Psi(j) = \Lambda(j) \in ad(\psi(i),H,w_H,\gamma_H)$.

Zu 2.: Sei $j \in ad\,(\psi(i),H,w_H,\gamma_H) \cap \{j \in \{1,\dots,l_H\} \mid e_j \in M\}$. Dann gilt $e_j \in M$, und es gibt ein $v \in w_H^{-1}\left(v_{\psi(i)}\right)$ sowie ein $c \in \gamma_H^{-1}(e_j) \cap Inz(v,H)$. Nach Voraussetzung existiert demnach ein $x \in E_G$ mit $F(x) = c$. Daraus ergeben sich die folgenden Aussagen:

d. $F(x) \in Inz(v,H) \Rightarrow v \in \nu g_H F(x) = \nu(f \times f)g_G(x) \Rightarrow \exists u \in V_G : f(u) = v \;\wedge\; x \in Inz(u,G)$.

e. $F(x) \in \gamma_H^{-1}(e_j) \Rightarrow e_j = \gamma_H F(x) = \Phi\gamma_G(x) \Rightarrow \exists s : \gamma_G(x) = e_s \;\wedge\; e_j = \Phi(e_s) = e_{\Psi(s)} \Rightarrow x \in \gamma_G^{-1}(e_s) \;\wedge\; \Psi(s) = j$.

f. $\phi w_G(u) = w_H f(u) = w_H(v) = v_{\psi(i)} = \phi(v_i) \overset{\phi\,\text{injektiv}}{\Longrightarrow} w_G(u) = v_i \Rightarrow u \in w_G^{-1}(v_i)$.

Aus d. bis f. folgt $s \in ad(i, G, w_G, \gamma_G)$ und $\Psi(s) = j$.

Zu 3.: $j \in \text{Bild}\,(\Psi) \cap ad(\psi(i), H, w_H, \gamma_H) \Rightarrow \exists s : \Psi(s) = j \in ad(\psi(i), H, w_H, \gamma_H) \overset{\text{Lemma 2.4}}{\Longrightarrow}$ $v_{\psi(i)} \in \nu h_H(e_j) = \nu h_H \Phi(e_s) = \nu(\phi \times \phi) h_G(e_s) \Rightarrow \exists t : v_t \in \nu h_G(e_s) \ \wedge \ \phi(v_t) = v_{\psi(i)} = \phi(v_i) \overset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} v_i = v_t \in \nu h_G(e_s) \overset{\text{Lemma 2.4}}{\Longrightarrow} s \in ad(i, G, w_G, \gamma_G) \ \wedge \ \Psi(s) = j$. □

Lemma 2.6 *Sei $i \in \{1, \ldots, k_H\}$ und $\gamma_H^{-1}(M) \subset Bild(F)$ für eine Menge $M \subset \mathcal{E}_{l_H}$. Dann gilt:*

$$\{j \in \{1, \ldots, l_H\} \mid e_j \in M\} \cap ad\,(i, H, w_H, \gamma_H) \neq \emptyset \implies i \in Bild\,(\psi)\,.$$

Beweis Sei $j \in ad(i, H, w_H, \gamma_H)$ und $e_j \in M$. Dann gilt: $\exists v, c, x : w_H(v) = v_i \ \wedge \ c = F(x) \in \gamma_H^{-1}(e_j) \cap Inz(v, H) \Rightarrow v \in \nu g_H F(x) = \nu(f \times f) g_G(x) \Rightarrow \exists u \in \nu g_G(x) : f(u) = v \Rightarrow \phi w_G(u) = w_H f(u) = w_H(v) = v_i \Rightarrow i \in \text{Bild}\,(\psi)$. □

Lemma 2.7 *Seien $i \in \{1, \ldots, k_H\}$ und $(w_H, \gamma_H), (\phi, \Phi)$ Homomorphismen. Dann gilt :*

$$Bild\,(\Psi) \cap ad\,(i, H, w_H, \gamma_H) \neq \emptyset \implies i \in Bild\,(\psi)\,.$$

Beweis Sei $\Psi(a) \in ad(i, H, w_H, \gamma_H)$. Mit Lemma 2.4 folgt $v_i \in \nu h_H(e_{\Psi(a)}) = \nu h_H \Phi(e_a)$ $= \nu(\phi \times \phi) h_G(e_a)$. Daher gilt $v_i \in \text{Bild}\,(\phi)$, also $i \in \text{Bild}\,(\psi)$. □

Lemma 2.8 *Es seien Φ surjektiv, ϕ injektiv und $\gamma_H^{-1}\,(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$. Dann ist die Abbildung $S_\cup(\Psi) : N_\cup\,(G, w_G, \gamma_G) \to N_\cup\,(H, w_H, \gamma_H)$ definiert durch $S_\cup(\Psi)(p, q) := S(\Psi)(p, q)$ wohldefiniert und surjektiv.*

Beweis Nach Lemma 2.5.1. ist $S_\cup(\Psi)$ wohldefiniert. Sei $(p, q) \in N_\cup(H, w_H, \gamma_H)$. Es gilt: $\exists i : p, q \in ad(i, H, w_H, \gamma_H) \overset{\Psi \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow} p, q \in ad(i, H, w_H, \gamma_H) = ad(i, H, w_H, \gamma_H) \cap \text{Bild}\,(\Psi) \overset{\text{Lemma 2.6}}{\Longrightarrow} i \in \text{Bild}\,(\psi) \overset{\text{Lemma 2.5.2}}{\Longrightarrow} \Lambda : ad(\psi^{-1}(i), G, w_G, \gamma_G) \to ad(i, H, w_H, \gamma_H) \cap \text{Bild}\,(\Psi)$ surjektiv $\Rightarrow \exists a, b \in ad(\psi^{-1}(i), G, w_G, \gamma_G) : \Lambda(a) = \Psi(a) = p \ \wedge \ \Lambda(b) = \Psi(b) = q \Rightarrow \rho(a, b) \in N_\cup(G, w_G, \gamma_G) \ \wedge \ S_\cup(\Psi)\,(\rho(a, b)) = (p, q)$. □

Lemma 2.9 *Es seien Φ, ϕ injektiv und $\gamma_H^{-1}\,(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$. Für $a, b \in \{1, \ldots, l_G\}$ gilt:*

$$(\Psi(a), \Psi(b)) \in N_\cup\,(H, w_H, \gamma_H) \implies \rho(a, b) \in N_\cup\,(G, w_G, \gamma_G)\,.$$

Beweis $(\Psi(a), \Psi(b)) \in N_\cup\,(H, w_H, \gamma_H) \implies \exists i : \Psi(a), \Psi(b) \in ad(i, H, w_H, \gamma_H) \cap \text{Bild}\,(\Psi) \overset{\text{Lemma 2.6}}{\Longrightarrow} i \in \text{Bild}\,(\psi) \overset{\text{Lemma 2.5.2.}}{\Longrightarrow} \exists c, d \in ad(\psi^{-1}(i), G, w_G, \gamma_G) : \Psi(c) = \Psi(a) \ \wedge \ \Psi(d) = \Psi(b) \overset{\Psi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} c = a \ \wedge \ d = b \implies \rho(a, b) \in N_\cup(G, w_G, \gamma_G)$. □

Lemma 2.10 *Es seien Φ, ϕ injektiv, γ_G surjektiv und $(w_G, \gamma_G), (w_H, \gamma_H)$ sowie (ϕ, Φ) Homomorphismen. Für $a, b \in \{1, \ldots, l_G\}$ gilt:*

$$(\Psi(a), \Psi(b)) \in N_\cup (H, w_H, \gamma_H) \implies \rho(a, b) \in N_\cup (G, w_G, \gamma_G).$$

Beweis $(\Psi(a), \Psi(b)) \in N_\cup (H, w_H, \gamma_H) \implies \exists i : \Psi(a), \Psi(b) \in ad(i, H, w_H, \gamma_H) \cap \text{Bild}(\Psi) \overset{\text{Lemma 2.7}}{\implies} i \in \text{Bild}(\psi) \overset{\text{Lemma 2.5.3.}}{\implies} \exists c, d \in ad(\psi^{-1}(i), G, w_G, \gamma_G) : \Psi(c) = \Psi(a) \wedge \Psi(d) = \Psi(b) \overset{\Psi \text{ injektiv}}{\implies} c = a \wedge d = b \implies \rho(a, b) \in N_\cup(G, w_G, \gamma_G)$. □

Satz 2.11 *Es seien γ_G, γ_H, w_G, w_H surjektiv und f, F injektiv. Für $i \in Bild(\psi)$ und $j \in Bild(\Psi)$ gilt:*

$$IO\,(H, w_H, \gamma_H)_{i,j} = \sum_{x \in \psi^{-1}(i)} \sum_{y \in \Psi^{-1}(j)} IO\,(G, w_G, \gamma_G)_{x,y}.$$

Beweis Für $s \in \{1, \ldots, k_G\}$ und $t \in \{1, \ldots, l_G\}$ seien

$$\begin{aligned} A^G_{s,t} &:= \left\{(e, v) \in \gamma_G^{-1}(e_t) \times w_G^{-1}(v_s) \,|\, g_G(e) = (v, u) \ \wedge\ u \neq v\right\}, \\ B^G_{s,t} &:= \left\{(e, v) \in \gamma_G^{-1}(e_t) \times w_G^{-1}(v_s) \,|\, g_G(e) = (u, v) \ \wedge\ u \neq v\right\}. \end{aligned}$$

Weiterhin seien

$$\begin{aligned} A^H_{s,t} &:= \left\{(e, v) \in (\gamma_H)^{-1}(e_t) \times (w_H)^{-1}(v_s) \,|\, g_H(e) = (v, u) \ \wedge\ u \neq v\right\}, \\ B^H_{s,t} &:= \left\{(e, v) \in (\gamma_H)^{-1}(e_t) \times (w_H)^{-1}(v_s) \,|\, g_H(e) = (u, v) \ \wedge\ u \neq v\right\} \end{aligned}$$

für $s \in \{1, \ldots, k_H\}$ und $t \in \{1, \ldots, l_H\}$. Zunächst werden die folgenden Aussagen nachgewiesen:

1. $Y \in \{A, B\}, X \in \{G, H\} \ :\ Y^X_{i_1,j_1} \cap Y^X_{i_2,j_2} \neq \emptyset \implies i_1 = i_2 \ \wedge\ j_1 = j_2$.

2. $\Psi^{-1}(j) := \{j_1, \ldots, j_n\} \implies F^{-1}\left((\gamma_H)^{-1}(e_j)\right) = \bigcup_{x=1}^n \gamma_G^{-1}(e_{j_x})$.

3. $\psi^{-1}(i) := \{i_1, \ldots, i_m\} \implies f^{-1}\left((w_H)^{-1}(v_i)\right) = \bigcup_{x=1}^m w_G^{-1}(v_{i_x})$.

Zu 1.: $(e, v) \in Y^X_{i_1,j_1} \cap Y^X_{i_2,j_2} \implies (\gamma_X \times w_X)(e, v) = (e_{j_1}, v_{i_1}) = (e_{j_2}, v_{i_2})$.
Zu 2.: $\subset\ :\ e \in F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_j)\right) \Rightarrow \gamma_H F(e) = e_j = \Phi\gamma_G(e) \Rightarrow e \in \gamma_G^{-1}\left(\Phi^{-1}(e_j)\right) = \gamma_G^{-1}\left(\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}\right) = \bigcup_{x=1}^n \gamma_G^{-1}(e_{j_x})$.
$\supset : e = \gamma_G^{-1}(e_{j_x}) \Rightarrow \gamma_G(e) = e_{j_x} \Rightarrow \Phi\gamma_G(e) = e_{\Psi(j_x)} = e_j = \gamma_H F(e) \Rightarrow e \in F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_j)\right)$.
Zu 3.: Man schließt wie in 2.

Aus 1. bis 3. erhält man

$$\begin{aligned}
\biguplus_{x\in\psi^{-1}(i)} \biguplus_{y\in\Psi^{-1}(j)} A^G_{x,y} = & \biguplus_{(x,y)\in\psi^{-1}(i)\times\Psi^{-1}(j)} A^G_{x,y} \\
= & \biguplus_{(x,y)\in\psi^{-1}(i)\times\Psi^{-1}(j)} \left\{(e,v)\in\gamma_G^{-1}(e_y)\times w_G^{-1}(v_x) \mid g_G(e)=(v,u) \ \wedge \ u\neq v\right\} \\
= & \left\{(e,v)\in\bigcup_{x=1}^{n}\gamma_G^{-1}(e_{j_x})\times\bigcup_{x=1}^{m} w_G^{-1}(v_{i_x}) \,\middle|\, \begin{array}{l} g_G(e)=(v,u) \\ \wedge \ u\neq v \end{array}\right\} \\
= & \left\{(e,v)\in F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_j)\right)\times f^{-1}\left(w_H^{-1}(v_i)\right) \mid g_G(e)=(v,u) \ \wedge \ u\neq v\right\} \\
= & (F\times f)^{-1}\left(A^H_{i,j}\right) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Beweis von (2.6): $\subset$: Sei (e,v) ein Element der oberen Menge. Es gilt: $(F(e),f(v))\in\gamma_H^{-1}(e_j)\times w_H^{-1}(v_i) \ \wedge \ g_H(F(e))=(f\times f)g_G(e)=(f(v),f(u))$. Aus der Injektivität von f ergibt sich $f(u)\neq f(v)$, daher ist $(F(e),f(v))\in A^H_{i,j}$.
$\supset$: $(e,v)\in(F\times f)^{-1}\left(A^H_{i,j}\right)\Rightarrow(F(e),f(v))\in A^H_{i,j}\Rightarrow g_HF(e)=(f(v),u)$ mit $u\neq f(v)$. Sei $g_G(e)=(a,b)$. Aus $(f\times f)g_G(e)=g_HF(e)=(f(v),u)$ folgt $f(a)=f(v)\neq u=f(b)$, also $v=a\neq b$. Somit ist (e,v) ein Element der oberen Menge. □

Entsprechende Betrachtungen ergeben eine zu (2.6) analoge Gleichung für $B^H_{i,j}$. Da f,F injektiv sind, gilt $\left|(F\times f)^{-1}(Y^H_{i,j})\right|=\left|Y^H_{i,j}\right|$ für $Y\in\{A,B\}$. Insgesamt lässt sich nun die folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
IO\left(H,w_H,\gamma_H\right)_{i,j} &= \left|A^H_{i,j}\right|-\left|B^H_{i,j}\right| = \sum_{x\in\psi^{-1}(i)}\sum_{y\in\Psi^{-1}(j)}\left(\left|A^G_{x,y}\right|-\left|B^G_{x,y}\right|\right) \\
&= \sum_{x\in\psi^{-1}(i)}\sum_{y\in\Psi^{-1}(j)} IO\left(G,w_G,\gamma_G\right)_{x,y}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Konstruktion von Verschlingungsinvarianten

Zu Beginn dieses Abschnittes wird eine Abbildung L_y definiert, die jedem surjektiv kantennummerierten orientierten Diagramm in Abhängigkeit von y ein Element eines Körpers bzw. einer abelschen Gruppe zuordnet. Unter welchen Bedingungen an y diese Zuordnung eine Invariante surjektiv kantennummerierter orientierter Graphendiagramme ist, wird in 2.13 und 2.22 auf Seite 41 diskutiert.

Definition 2.12 *Es sei $\mathcal{D}_l := \{(D,\gamma,o)\,|\,(D,\gamma,o)$ ist ein orientiertes surjektiv kantennummeriertes Diagramm und $l=|Bild(\gamma)|\}$. Für $l\in\mathbb{N}$, eine abelsche Gruppe $(\mathbb{G},+)$ oder einen Körper $(\mathbb{G},+,\cdot)$ und $y\in M^{tr}\left(Sym(l),\mathbb{G}\right)$ wird eine Abbildung $L_y:\mathcal{D}_l\to\mathbb{G}$ definiert* *durch*

$$L_y(D,\gamma,o) := \sum_{(s,t)\in Sym(l)} y_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)}. \qquad \square$$

Bemerkung Die im Verlaufe dieses Kapitels auftretenden Homomorphismen sind Homomorphismen von abelschen Gruppen, wenn $(\mathbb{G},+)$ eine abelsche Gruppe ist, und Homomorphismen von $\mathbb{G}$ -Vektorräumen, sofern $(\mathbb{G},+,\cdot)$ ein Körper ist.

Satz 2.13 *Vorgelegt sei ein orientiertes surjektiv kantennummeriertes Diagramm (D,γ,o). Dabei sei $\gamma : E_D \to \mathcal{E}_l$ eine surjektive Kantennummerierung. Darüber hinaus seien eine bijektive Eckennummerierung $w : V_D \to \mathcal{V}_k$ und $y \in M^{tr}(Sym(l),\mathbb{G})$ gegeben.*

Für jedes weitere zu (D,γ,o) im Sinne von Definition 1.21 ohne Bedingung 2. äquivalente Diagramm $(D',\gamma',o') \in \mathcal{D}_l$ gilt $L_y(D,\gamma,o) = L_y(D',\gamma',o')$ genau dann, wenn

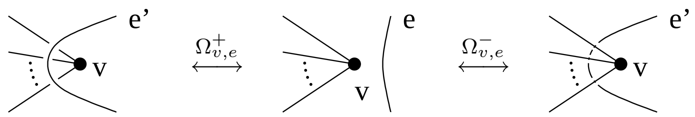
1. $\forall i \in \{1,\ldots,k\}\, \forall j \in \{1,\ldots,l\} \;:\; 0 = \sum_{x\in ad(i,G(D),w,\gamma)} y_{\rho(j,x)} \cdot IO\,(G(D),w,\gamma)_{i,x}$ *und*

2. $\forall (m,n) \in N_{\cup}(G(D),w,\gamma) \quad : \quad y_{\rho(m,n)} = 0$

gelten.

Beweis Es genügt, die Behauptung für Diagramme (D',γ',o') zu zeigen, die mittels Reidemeisterbewegungen der Definition 1.23 auf Seite 24 aus (D,γ,o) hervorgehen. Dazu werden die Bewegungen im Einzelnen betrachtet.

Reidemeisterbewegung V Für $e \in E_D$, $v \in V_D$ und $r \in \{1,-1\}$ sei eine spezielle Reidemeisterbewegung $\Omega^r_{v,e}$ durch eine Situation wie in Abbildung (2.7) gegeben. Es seien



(2.7)

$D^r_{v,e} := \Omega^r_{v,e}(D)$ und $(h,H) : G(D) \to G\left(D^r_{v,e}\right)$ der zu den äquivalenten Diagrammen gehörige Isomorphismus. Für diesen gilt

$$h(v) = v \text{ für } v \in V_D \quad \text{und} \quad H(x) = \begin{cases} x & : \; x \neq e \\ e' & : \; x = e \end{cases} \text{ für } x \in E_D. \tag{2.8}$$

Weiterhin sei $o^r_{v,e}$ die bzgl. der Äquivalenz passende Orientierung von $D^r_{v,e}$ sowie $\gamma^r_{v,e} := \gamma \circ H^{-1}$ und $w^r_{v,e} := w \circ h^{-1}$ eine Kanten- bzw. Eckennummerierung von $G\left(D^r_{v,e}\right)$. Als abkürzende Notation wird im folgenden für $(s,t) \in N_{l,l}$

$$\epsilon(s,t) := w^{D^r_{v,e},o^r_{v,e}}_{\left(\gamma^r_{v,e}\right)^{-1}(e_s),\left(\gamma^r_{v,e}\right)^{-1}(e_t)} - w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \tag{2.9}$$

gesetzt. Die folgenden Betrachtungen (2.10) bis (2.15) zeigen, dass die Invarianz unter Reidemeisterbewegung V, also (2.10), äquivalent zu erstens, also (2.15), aus der Behauptung ist.

$$\forall D' := \Omega_5^r(D), r \in \{1,-1\}, \text{ mit } \left(D',\gamma',o'\right) \sim (D,\gamma,o) : L_y(D,\gamma,o) = L_y(D',\gamma',o') \quad (2.10)$$

$$\overset{A}{\Leftrightarrow} \quad \forall (e,v) \in E_D \times V_D \; \forall r \in \{1,-1\} : 0 = \sum_{(s,t)\in Sym(l)} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) \quad (2.11)$$

$$\overset{B}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \{1,\dots,l\} \; \forall e \in \gamma^{-1}(e_j) \; \forall v \in V_D \; \forall r \in \{1,-1\} : 0 = \sum_{n=1}^{l} y_{\rho(j,n)}\epsilon(j,n) \quad (2.12)$$

$$\overset{C}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \{1,\dots,l\} \; \forall e \in \gamma^{-1}(e_j) \; \forall v_i \in \mathcal{V}_k : 0 = \sum_{n=1}^{l} y_{\rho(j,n)} IO\left(G(D),w,\gamma\right)_{i,n} \quad (2.13)$$

$$\overset{D}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \{1,\dots,l\} \; \forall i \in \{1,\dots,k\} : 0 = \sum_{n=1}^{l} y_{\rho(j,n)} IO\left(G(D),w,\gamma\right)_{i,n} \quad (2.14)$$

$$\overset{E}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \{1,\dots,l\} \; \forall i \in \{1,\dots,k\} : 0 = \sum_{n\in ad(i,G(D),w,\gamma)} y_{\rho(j,n)} IO\left(G(D),w,\gamma\right)_{i,n} \quad (2.15)$$

Zu A : Jede Reidemeisterbewegung Ω_5^r lässt sich für geeignete $e \in E_D, v \in V_D$ durch $\Omega_{v,e}^r$ ausdrücken. Wählt man dementsprechend $\gamma' := \gamma_{v,e}^r$ und $o' := o_{v,e}^r$, so ergibt sich die Äquivalenz sofort aus der Definition 2.12 von L_y auf Seite 32 zusammen mit der Abkürzung (2.9).

Zu D : Da w bijektiv ist und die Gleichungen in (2.13) und (2.14) nicht von $e \in E_D$ abhängen, ist an dieser Stelle nichts mehr zu zeigen.

Zu B : Zu $j \in \{1,\dots l\}$ sei $S_j := \{(p,q) \in Sym(l) \mid p \neq j \;\wedge\; q \neq j\}$. Zunächst wird der folgende Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 2.14 $(p,q) \in S_j, e \in \gamma^{-1}(e_j), v \in V_D, r \in \{1,-1\} \implies \epsilon(p,q) = 0.$

Beweis Hilfssatz Sei $(p,q) \in S_j$. Aus $\gamma(e) = e_j$ folgt $\gamma_{v,e}^r(e') = e_j$ mit (2.8). Sei $\alpha \in \{p,q\}$. Wegen $\alpha \neq j$ gilt $e \notin \gamma^{-1}(e_\alpha)$ und $e' \notin \left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_\alpha)$. Daraus ergibt sich $\gamma^{-1}(e_\alpha) \overset{(2.8)}{=} \left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_\alpha)$, also gilt $w_{f,g}^{D,o} = w_{f,g}^{D_{v,e}^r,o_{v,e}^r}$ für alle $f,g \in \gamma^{-1}(e_p) \cup \gamma^{-1}(e_q)$. Mithilfe der Definition 1.20 auf Seite 22 berechnet man für $p \neq q$:

$$\begin{aligned}
w_{\gamma^{-1}(e_p),\gamma^{-1}(e_q)}^{D,o} &= \sum_{g\in\gamma^{-1}(e_p)} \sum_{f\in\gamma^{-1}(e_q)} w_{f,g}^{D,o} \\
&= \sum_{g\in\left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_p)} \sum_{f\in\left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_q)} w_{f,g}^{D_{v,e}^r,o_{v,e}^r} \\
&= w_{\left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_p),\left(\gamma_{v,e}^r\right)^{-1}(e_q)}^{D_{v,e}^r,o_{v,e}^r}.
\end{aligned}$$

Für $p = q$ gilt

$$\begin{aligned} w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_p),\gamma^{-1}(e_p)} &= \sum_{\{f,g\}\in\mathcal{P}_2(\gamma^{-1}(e_p))} w^{D,o}_{f,g} = \sum_{\{f,g\}\in\mathcal{P}_2\left(\left(\gamma^r_{v,e}\right)^{-1}(e_p)\right)} w^{D^r_{v,e},o^r_{v,e}}_{f,g} \\ &= w^{D^r_{v,e},o^r_{v,e}}_{\left(\gamma^r_{v,e}\right)^{-1}(e_p),\left(\gamma^r_{v,e}\right)^{-1}(e_p)}. \end{aligned}$$

□

Zum Beweis von B schreibt man für $j \in \{1,\ldots,l\}, e \in \gamma^{-1}(e_j), r \in \{1,-1\}, v \in V_D$:

$$\begin{aligned} l.S. := \sum_{(s,t)\in Sym(l)} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) &= \overbrace{\sum_{(s,t)\in S_j} y_{(s,t)}\epsilon(s,t)}^{\overset{\text{Hilfssatz 2.14}}{=}0} + \sum_{(s,t)\in Sym(l)\setminus S_j} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) \\ &= \sum_{x=1}^{l} y_{\rho(x,j)}\epsilon(x,j) =: r.S. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **:** Nach Voraussetzung ist $l.S. = 0$, also auch $r.S. = 0$.

$\Leftarrow$ **:** Für jedes $e \in E_D$ gibt es ein $j \in \{1,\ldots,l\}$ mit $e \in \gamma^{-1}(e_j)$. Also ist nach Voraussetzung $r.S. = 0$. Daraus folgt $l.S. = 0$.

Zu C : Zunächst wird der folgende Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 2.15 *Sei $j \in \{1,\ldots,l\}, r \in \{-1,1\}, e \in \gamma^{-1}(e_j)$ und $v_i \in \mathcal{V}_k$. Dann gilt*

$$\epsilon(j,n) = r \cdot IO\left(G(D), w, \gamma\right)_{i,n}$$

für jedes $n \in \{1,\ldots,l\}$ oder

$$\epsilon(j,n) = (-r) \cdot IO\left(G(D), w, \gamma\right)_{i,n}$$

für jedes $n \in \{1,\ldots,l\}$.

Beweis Hilfssatz Es seien $j, n \in \{1,\ldots,l\}, e \in \gamma^{-1}(e_j), r \in \{1,-1\}$ und $v := \left(w^r_{v,e}\right)^{-1}(v_i)$. Zunächst werden die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= (\gamma^r_{v,e})^{-1}(e_n) \cap Inz\left(v, G\left(D^r_{v,e}\right)\right) \\ M_2 &:= \left\{f \in (\gamma^r_{v,e})^{-1}(e_n) \mid o_{D^r_{v,e}}(f) = (v,u) \ \wedge \ u \neq v\right\} \\ M_3 &:= \left\{f \in (\gamma^r_{v,e})^{-1}(e_n) \mid o_{D^r_{v,e}}(f) = (u,v) \ \wedge \ u \neq v\right\} \\ M_4 &:= \left\{f \in (\gamma^r_{v,e})^{-1}(e_n) \mid o_{D^r_{v,e}}(f) = (v,v)\right\} \end{aligned}$$

definiert. Es gilt dann offenbar $M_1 = \biguplus_{i=2}^{4} M_i$. Bezüglich der Abbildung (2.7) auf Seite 33 gelten dann die Aussagen:

$$f,g \in M_i, i \in \{2,3\}, f \neq g \quad \Longrightarrow \begin{cases} \text{es gibt jeweils genau eine Kreuzung} \\ \tau_x,\ x \in e' \cap f \text{ und } \tau_y,\ y \in e' \cap g \text{ mit} \\ \epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_x) = \epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_y) \end{cases} \tag{2.16}$$

$$f \in M_2, g \in M_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{es gibt jeweils genau eine Kreuzung} \\ \tau_x,\ x \in e' \cap f \text{ und } \tau_y,\ y \in e' \cap g \text{ mit} \\ \epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_x) = -\epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_y) \end{cases} \tag{2.17}$$

$$f \in M_4 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{es gibt genau zwei Kreuzungen } \tau_x, \\ x \in e' \cap f \text{ und } \tau_y,\ y \in e' \cap f \text{ mit} \\ \epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_x) = -\epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)(\tau_y) \end{cases} \tag{2.18}$$

Zur Berechnung von $\epsilon(j, n)$, $n \in \{1, \ldots, l\}, r \in \{1, -1\}$ werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem wie e in Abbildung (2.7) orientiert ist.

1. Fall: e ist in (2.7) von „oben“ nach „unten“ orientiert.

$$\begin{aligned} \epsilon(j,n) &= \sum_{\left\{\tau_x \in cr\left(D^r_{v,e}\right)\setminus cr(D) \mid x \in \{e'\cap f \mid f \in M_1\}\right\}} \overbrace{\epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)}^{=:\epsilon}(\tau_x) \qquad (2.19) \\ &= \sum_{f\in M_1} \underbrace{\sum_{\left\{\tau_x \in cr\left(D^r_{v,e}\right)\setminus cr(D) \mid x \in e'\cap f\right\}}}_{=:A} \epsilon(\tau_x) \\ &= \sum_{f\in M_2}\sum_A \epsilon(\tau_x) + \sum_{f\in M_3}\sum_A \epsilon(\tau_x) + \sum_{f\in M_4}\underbrace{\sum_A \epsilon(\tau_x)}_{\overset{(2.18)}{=}0} \\ &= \sum_{f\in M_2}\sum_A (-r) + \sum_{f\in M_3}\sum_A r \\ &\overset{(2.16),(2.17)}{=} r\left(-|M_2| + |M_3|\right) = (-r)\cdot IO\left(G\left(D^r_{v,e}\right), w^r_{v,e}, \gamma^r_{v,e}\right)_{i,n} \\ &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} (-r)\cdot IO\left(G(D), w, \gamma\right)_{i,n} \end{aligned}$$

2. Fall: e ist in (2.7) von „unten“ nach „oben“ orientiert.

$$\begin{aligned} \epsilon(j,n) &= \sum_{\left\{\tau_x \in cr\left(D^r_{v,e}\right)\setminus cr(D) \mid x \in \{e'\cap f \mid f \in M_1\}\right\}} \overbrace{\epsilon\left(D^r_{v,e}, o^r_{v,e}\right)}^{=:\epsilon}(\tau_x) \\ &= \sum_{f\in M_1} \underbrace{\sum_{\left\{\tau_x \in cr\left(D^r_{v,e}\right)\setminus cr(D) \mid x \in e'\cap f\right\}}}_{=:A} \epsilon(\tau_x) \\ &= \sum_{f\in M_2}\sum_A \epsilon(\tau_x) + \sum_{f\in M_3}\sum_A \epsilon(\tau_x) + \sum_{f\in M_4}\underbrace{\sum_A \epsilon(\tau_x)}_{\overset{(2.18)}{=}0} \\ &= \sum_{f\in M_2}\sum_A r + \sum_{f\in M_3}\sum_A (-r) \\ &\overset{(2.16),(2.17)}{=} r\left(|M_2| - |M_3|\right) = r\cdot IO\left(G\left(D^r_{v,e}\right), w^r_{v,e}, \gamma^r_{v,e}\right)_{i,n} \\ &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} r\cdot IO\left(G(D), w, \gamma\right)_{i,n} \end{aligned}$$

□

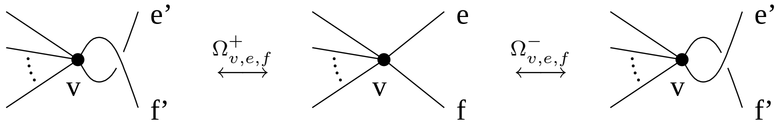
Nun folgt C wegen sofort aus dem Hilfssatz 2.15.

Zu E : Diese Äquivalenz ergibt sich aus dem

Hilfssatz 2.16 $v_i \in \mathcal{V}_k, n \notin ad\,(i, G(D), w, \gamma) \implies IO\,(G(D), w, \gamma)_{i,n} = 0.$

Beweis Hilfssatz $n \notin ad\,(i, G(D), w, \gamma) \Rightarrow \forall v = w^{-1}(v_i) \,:\, \gamma^{-1}(e_n) \cap Inz\,(v, G(D)) = \emptyset \Rightarrow \forall v = w^{-1}(v_i) \forall e \in \gamma^{-1}(e_n) \;:\; v \notin (\nu \circ o_D)\,(e) \Rightarrow \big\{(e,v) \in \gamma^{-1}(e_n) \times w^{-1}(v_i) \,|\, v \in (\nu \circ o_D)\,(e)\big\} = \emptyset \Rightarrow IO\,(G(D), w, \gamma)_{i,n} = 0.$ □

Reidemeisterbewegung IV Für $v \in V_D,\ e, f \in Inz(v, G(D)),\ r \in \{1, -1\}$ sei eine spezielle Reidemeisterbewegung $\Omega^r_{v,e,f}$ durch eine Situation wie in Abbildung (2.20) gegeben.



(2.20)

Es seien $D^r_{v,e,f} := \Omega^r_{v,e,f}(D)$ und $(h, H) : G(D) \to G\left(D^r_{v,e,f}\right)$ der zu den äquivalenten Diagrammen gehörige Isomorphismus. Für diesen gilt

$$h(v) = v \text{ für } v \in V \quad \text{und} \quad H(x) = \begin{cases} e' & : \; x = e \\ f' & : \; x = f \\ x & : \; \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } x \in E. \tag{2.21}$$

Weiterhin sei $o^r_{v,e,f}$ die bzgl. der Äquivalenz passende Orientierung von $D^r_{v,e,f}$ sowie $\gamma^r_{v,e,f} := \gamma \circ H^{-1}$ und $w^r_{v,e,f} := w \circ h^{-1}$ eine Kanten- bzw. Eckennummerierung von $G\left(D^r_{v,e,f}\right)$. Als abkürzende Notation wird im folgenden für $(s,t) \in N_{l,l}$

$$\epsilon(s,t) := w^{D^r_{v,e,f}, o^r_{v,e,f}}_{\left(\gamma^r_{v,e,f}\right)^{-1}(e_s), \left(\gamma^r_{v,e,f}\right)^{-1}(e_t)} - w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s), \gamma^{-1}(e_t)}$$

gesetzt. Die folgenden Betrachtungen (2.22) bis (2.24) zeigen, dass die Invarianz unter Reidemeisterbewegung IV, also (2.22), äquivalent zu zweitens, also (2.24), aus der Behauptung ist.

$$\forall D' := \Omega^r_4(D), r \in \{1,-1\}, \text{ mit } \left(D', \gamma', o'\right) \sim (D, \gamma, o) : L_y(D, \gamma, o) = L_y(D', \gamma', o') \tag{2.22}$$

$$\overset{A}{\Leftrightarrow} \quad \forall v \in V_D \,\forall e, f \in Inz\,(v, G(D))\,, r \in \{1,-1\} : 0 = \sum_{(s,t) \in Sym(l)} y_{(s,t)} \epsilon(s,t) \tag{2.23}$$

$$\overset{B}{\Leftrightarrow} \quad \forall (m,n) \in N_\cup\,(G(D), w, \gamma) \quad : \quad y_{(m,n)} = 0 \tag{2.24}$$

Zu A : Man argumentiert wie im Fall A auf Seite 34 bei der Reidemeisterbewgung V.

Zu B : Zunächst wird der folgende Hilfssatz gezeigt:

Hilfssatz 2.17 $v \in V_D,\ f, e \in Inz\,(v, G(D))\,, e_n := \gamma(e), e_m := \gamma(f)$

$$\Longrightarrow\ |\epsilon(s,t)| = \begin{cases} 1 & : \quad \rho(s,t) = \rho(m,n) \\ 0 & : \quad sonst \end{cases} .$$

Beweis Hilfssatz Gegeben sei die Situation aus Abbildung (2.20). Aus (2.21) erhält man $\gamma^r_{v,e,f}(e') = \gamma(e) = e_n$ und $\gamma^r_{v,e,f}(f') = \gamma(f) = e_m$. Daher gilt

$$\rho(s,t) = \rho(n,m) \Leftrightarrow \begin{cases} (e', f') \ \in \ (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_s) \times (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_t) \quad \vee \\ (f', e') \in (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_s) \times (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_t) \end{cases} . \tag{2.25}$$

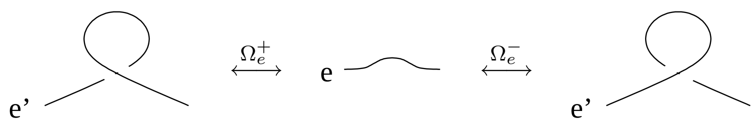
Da die Diagramme D und $D^r_{v,e,f}$ außerhalb der lokalen Situation in Abbildung (2.20) identisch sind, folgt $|\epsilon(s,t)| = 1$ aus $\rho(s,t) = \rho(m,n)$ mithilfe von (2.25) und der Definition 1.20 der Verdrillungszahl auf Seite 22. Gilt $\rho(s,t) \neq \rho(n,m)$, so folgt $(e', f'), (f', e') \notin (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_s) \times (\gamma^r_{v,e,f})^{-1}(e_t)$, d.h. $\epsilon(s,t) = 0$. $\square$

Nun wird die Äquivalenz B gezeigt :

$\Rightarrow$: $(m,n) \in N_\cup(G(D), w, \gamma) \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, k\} : (m,n) \in N_i(G(D), w, \gamma) \Rightarrow m, n \in ad\,(i, G(D), w, \gamma) \Rightarrow \exists e, f \in E_D : e \in \gamma^{-1}(e_m) \cap Inz\left(w^{-1}(v_i), G(D)\right) \ \wedge \ f \in \gamma^{-1}(e_n) \cap Inz\left(w^{-1}(v_i), G(D)\right)$. Mit $v := w^{-1}(v_i)$ folgt $0 = \sum_{(s,t) \in Sym(l)} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) \overset{2.17}{=} \pm y_{\rho(n,m)}$

$\Leftarrow$: $v \in V_D,\ e, f \in Inz\,(v, G(D)) \Rightarrow \exists m, n \in \{1, \ldots, l\} : e \in \gamma^{-1}(e_n) \ \wedge \ f \in \gamma^{-1}(e_m) \Rightarrow \exists m, n \in ad\,(i, G(D), w, \gamma)$ für $w(v) = v_i \Rightarrow \rho(n,m) \in N_\cup(G(D), w, \gamma) \Rightarrow \sum_{(s,t) \in Sym(l)} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) \overset{2.17}{=} \pm y_{\rho(m,n)} = 0$. $\square$

Reidemeisterbewegung I Für $e \in E_D$, $r \in \{1, -1\}$ sei eine spezielle Reidemeisterbewegung Ω^r_e durch eine Situation wie in Abbildung (2.26) gegeben. Es seien $D^r_e := \Omega^r_e(D)$



(2.26)

und $(h, H) : G(D) \to G\left(D^r_e\right)$ der zu den äquivalenten Diagrammen gehörige Isomorphismus. Für diesen gilt

$$h(v) = v \text{ für } v \in V \quad \text{und} \quad H(x) = \begin{cases} e' & : \quad x = e \\ x & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } x \in E.$$

Weiterhin sei o^r_e die bzgl. der Äquivalenz passende Orientierung von D^r_e sowie $\gamma^r_e := \gamma \circ H^{-1}$ und $w^r_e := w \circ h^{-1}$ eine Kanten- bzw. Eckennummerierung von $G\left(D^r_e\right)$. Als abkürzende Notation wird im folgenden für $(s,t) \in N_{l,l}$

$$\epsilon(s,t) := w^{D^r_e, o^r_e}_{(\gamma^r_e)^{-1}(e_s), (\gamma^r_e)^{-1}(e_t)} \ - \ w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s), \gamma^{-1}(e_t)}$$

gesetzt. Die folgenden Betrachtungen (2.27) bis (2.29) zeigen, dass die Invarianz unter Reidemeisterbewegung I, also (2.27), wegen (2.24) keine weiteren Bedingungen erzwingen, da $(j,j) \in N_\cup(G(D),w,\gamma)$ für $j \in \{1,\ldots,l\}$ gilt.

$$\forall D' := \Omega_1^r(D), r \in \{1,-1\}, \text{ mit } \left(D',\gamma',o'\right) \sim (D,\gamma,o) : L_y(D,\gamma,o) = L_y(D',\gamma',o') \quad (2.27)$$

$$\overset{A}{\Leftrightarrow} \quad \forall e \in E_D, r \in \{1,-1\} : 0 = \sum_{(s,t)\in Sym(l)} y_{(s,t)}\epsilon(s,t) \quad (2.28)$$

$$\overset{B}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \{1,\ldots,l\} \quad : \quad y_{(j,j)} = 0 \quad (2.29)$$

Zu A : Man argumentiert wie im Fall A auf Seite 34 bei der Reidemeisterbewegung V.

Zu B : Analog zum Hilfssatz 2.17 gilt an dieser Stelle $|\epsilon(s,t)| = \begin{cases} 1 : s=t=j \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$ für $j \in \{1,\ldots,l\}$ und $e \in \gamma^{-1}(e_j)$. Damit folgt sofort die Äquivalenz B.

Reidemeisterbewegungen II und III Diese Bewegungen verändern die Verdrillungszahl und somit den Wert von L_y nicht. □

Definition 2.18 *Sei $G = (V,E,g)$ ein orientierter Graph, $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ eine surjektive Kantennummerierung und $w : V \to \mathcal{V}_k$ eine surjektive Eckennummerierung.*

1. *Für $s \in \{1,\ldots l\}$ wird die Matrix $A_s(G,w,\gamma) \in M_{k\times|Sym(l)|}(\{1,\ldots,k\}, Sym(l), \mathbb{Z})$ definiert durch*

$$[A_s(G,w,\gamma)]_{i,(p,q)} := \begin{cases} IO(G,w,\gamma)_{i,p} & : \quad p \in ad(i,G,w,\gamma) \ \wedge \ q = s \\ IO(G,w,\gamma)_{i,q} & : \quad q \in ad(i,G,w,\gamma) \ \wedge \ p = s \\ 0 & : \quad sonst \end{cases} .$$

2. *Die Matrix $A(G,w,\gamma) \in M_{l\cdot k\times|Sym(l)|}(N_{l,k}, Sym(l), \mathbb{Z})$ wird definiert durch*

$$[A(G,w,\gamma)]_{(s,i),(p,q)} := [A_s(G,w,\gamma)]_{i,(p,q)}.$$

Es ist also $A(G,w,\gamma) = (A_1(G,w,\gamma), A_2(G,w,\gamma), \ldots, A_s(G,w,\gamma))^{tr}$.

3. *Die Matrix $B(G,w,\gamma) \in M_{|N_\cup(G,w,\gamma)|\times|Sym(l)|}(N_\cup(G,w,\gamma), Sym(l), \mathbb{Z})$ wird definiert mittels*

$$[B(G,w,\gamma)]_{(n,m),(p,q)} := \begin{cases} 1 & : \quad (n,m) = (p,q) \\ 0 & : \quad (n,m) \neq (p,q) \end{cases} .$$

4. *$\mathcal{A}(G,w,\gamma) := (A(G,w,\gamma), B(G,w,\gamma))^{tr}$.* □

Satz 2.19 *Vorgelegt sei ein orientiertes surjektiv kantennummeriertes Diagramm $(D,\gamma,o) \in \mathcal{D}_l$. Darüber hinaus seien eine bijektive Eckennummerierung $w : V_D \to \mathcal{V}_k$ und $y \in M^{tr}(Sym(l), \mathbb{G})$ gegeben. Genau dann gelten 1. und 2. aus Satz 2.13 auf Seite 33, wenn $\mathcal{A}(G(D),w,\gamma)\cdot y = 0$ ist.*

Beweis Zur Abkürzung sei hier $\mathcal{A} := \mathcal{A}(G(D), w, \gamma)$, $A := A(G(D), w, \gamma)$, $A_s := A_s(G(D), w, \gamma)$, $B := B(G(D), w, \gamma)$, $ad(i) := ad(i, G(D), w, \gamma)$ und $IO := IO(G(D), w, \gamma)$. In der Matrix $\mathcal{A}$ stehen genau die Koeffizienten der Gleichungen 1. und 2. aus Satz 2.13, denn für $y \in M^{tr}(Sym(l), \mathbb{G})$ und $(s,i) \in N_{l,k}$ gilt

$$\begin{aligned}
[A \cdot y]_{(s,i)} &= \sum_{(p,q)\in Sym(l)} A_{(s,i),(p,q)} \cdot y_{(p,q)} \overset{\text{Def. 2.18}}{=} \sum_{(p,q)\in Sym(l)} (A_s)_{i,(p,q)} \cdot y_{(p,q)} \\
&\overset{\text{Def. 2.18}}{=} \sum_{\substack{\{(p,q)\in Sym(l)\,|\,p\in \\ ad(i)\,\wedge\, s=q\,\wedge\, s\neq p\}}} IO_{i,p} \cdot y_{(p,q)} + \sum_{\substack{\{(p,q)\in Sym(l)\,| \\ q\in ad(i)\,\wedge\, s=p\}}} IO_{i,q} \cdot y_{(p,q)} \\
&= \sum_{\substack{\{(p,s)\in Sym(l)\,| \\ p\in ad(i)\,\wedge\, s\neq p\}}} IO_{i,p} \cdot y_{(p,s)} + \sum_{\{(s,q)\in Sym(l)\,|\,q\in ad(i)\}} IO_{i,q} \cdot y_{(s,q)} \\
&= \sum_{x\in ad(i)} IO_{i,x} \cdot y_{\rho(s,x)} \qquad ,
\end{aligned}$$

und für $(n,m) \in N_{\cup}(G, w, \gamma)$ berechnet man

$$[B \cdot y]_{(n,m)} = \sum_{(p,q)\in Sym(l)} B_{(n,m),(p,q)} \cdot y_{(p,q)} \overset{\text{Def. 2.18}}{=} y_{(n,m)}. \qquad \square$$

Satz 2.20 *Es seien $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex, $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung, $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ eine reguläre Projektion und (D, o') ein orientiertes Diagramm zu $\mathcal{Z}$. Dann ist die Abbildung $\left(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}\right) : G(\mathcal{Z}) \to G(D)$ ein Isomorphismus der orientierten induzierten Graphen.*

Beweis Die Abbildungen $\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}, \Gamma|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}$ und $\mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}$ sind definitionsgemäß bijektiv. Es seien $\{F_e\}_{e\in\mathcal{Z}_1}$ charakteristische Abbildungen von $\mathcal{Z}$ und $o_{\mathcal{Z}}, o_D$ die induzierten Orientierungen von $G(\mathcal{Z})$ bzw. $G(D)$. Für $e \in \mathcal{Z}_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(o_D \circ \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}\right)(e) &= o_D(\pi(\Gamma(e))) \overset{1.17}{=} (\pi((\Gamma \circ F_e)(-1)), \pi((\Gamma \circ F_e)(1))) \\
&= (\pi \circ \Gamma \times \pi \circ \Gamma)(o_{\mathcal{Z}}(e)) \\
&= \left(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0} \times \pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0}\right)(o_{\mathcal{Z}}(e)).
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.21 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Satz 2.20 seien w, w_D bijektive Eckennummerierungen von $\mathcal{Z}$ bzw. D und γ, γ_D surjektive Kantennummerierungen von $\mathcal{Z}$ bzw. D, so dass $w_D \circ \pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0} = w$ und $\gamma_D \circ \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1} = \gamma$ erfüllt sind. Dann gilt $\mathcal{A}(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = \mathcal{A}(G(D), w_D, \gamma_D)$.*

Beweis In der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 setzt man für (f, F) den Isomorphismus aus Satz 2.20 sowie $\phi = id$ und $\Phi = id$ ein. Aus Lemma 2.5 auf Seite 29 folgt $ad(i, G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = ad\,(i, G(D), w_D, \gamma_D)$ für alle $i \in \{1, \dots, |V_D|\}$. Aus Lemma 2.8 auf Seite 30 ergibt sich $N_\cup(G(D), w_D, \gamma_D) = N_\cup(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)$. Die Definition 2.18 auf Seite 39 liefert die Behauptung, denn aus Satz 1.10 auf Seite 15 erhält man $IO(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = IO(G(D), w_D, \gamma_D)$. □

Satz 2.22 *Sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex, $\gamma : \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{E}_l$ eine surjektive Kanten- und $w : \mathcal{Z}_0 \to \mathcal{V}_k$ eine bijektive Eckennummerierung. Für $y \in M^{tr}(Sym(l), \mathbb{G})$ ist L_y genau dann eine Invariante für die Äquivalenz surjektiv kantennummerierter orientierter Diagramme, deren Kantennummerierungen mit γ verträglich sind, wenn $\mathcal{A}\,(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)\, y = 0$ ist.*

Beweis Seien Γ eine Einbettung von $\mathcal{Z}$, π eine reguläre Projektion und (D, γ_D, o_D) ein mittels $\gamma_D : E_D \to \mathcal{E}_l$ surjektiv kantennummeriertes orientiertes Diagramm, so dass γ_D mit γ verträglich ist, d.h. $\gamma_D \circ \mathcal{P}\,(\pi)\,|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}\,(\Gamma)\,|_{\mathcal{Z}_1} = \gamma$ gilt. Die Abbildung $w_D := w \circ \left(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0}\right)^{-1}$ ist eine bijektive Eckennummerierung von $G(D)$.
$\Rightarrow : 0 \overset{\text{Sätze 2.13,2.19}}{=} \mathcal{A}\,(G(D), w_D, \gamma_D)\, y \overset{\text{Satz 2.21}}{=} \mathcal{A}\,(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)\, y.$
$\Leftarrow$: Sei $(D', \gamma' o') \sim (D, \gamma, o)$. $0 = \mathcal{A}\,(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)\, y \overset{\text{Satz 2.21}}{=} \mathcal{A}\,(G(D), w_D, \gamma_D)\, y \overset{\text{Sätze 2.13,2.19}}{\Longrightarrow}$ $L_y\,(D', \gamma', o') = L_y(D, \gamma, o)$. □

2.3 Umnummerierungen

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Auswirkung eine Umnummerierung eines Graphen auf seine $\mathcal{A}$-Matrix aus Definition 2.18.4. hat. Das Ergebnis steht in Korollar 2.27 auf Seite 45. Da für die Verschlingungsinvarianten die Kerne der jeweiligen $\mathcal{A}$-Matrizen von Bedeutung sind, wird in 2.29.2. auf Seite 46 ein entsprechender Zusammenhang hergestellt. Daraus ergibt sich eine Formel für die Invariante in Satz 2.30 auf Seite 47.

Generalvoraussetzung 2.23 *Es seien $G = (V, E, g)$ ein orientierter Graph, γ, γ' Kantennummerierungen, w, w' Eckennummerierungen sowie*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\ \mathcal{E}_l \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathcal{E}_{l'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "w'"] & \\ \mathcal{V}_k \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{V}_{k'} \end{tikzcd} \tag{2.30}$$

kommutative Diagramme, wobei ϕ, Φ gegeben sind durch

$$\psi \;:\; \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k'\}, \qquad \phi(v_i) := v_{\psi(i)} \quad \textit{und}$$

$$\Psi \quad : \quad \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l'\}, \qquad \Phi(e_i) := e_{\Psi(i)}.$$

□

Definition 2.24

1. $N_{(x,y)}(\Psi) := N_{(x,y)} := \{(s,t) \in Sym(l) \mid \rho\,(\Psi(s), \Psi(t)) = (x,y)\}$ *für* $(x,y) \in Sym(l')$.

2. $M_{(x,y)}(\Psi, \psi) := M_{(x,y)} := \{(s,t) \in N_{l\times k} \mid (\Psi(s), \psi(t)) = (x,y)\}$ *für* $(x,y) \in N_{l'\times k'}$.

3. $Q := Q\,(\Psi, \psi) \in M_{k'l'\times kl}\,(N_{l'\times k'}, N_{l\times k}, \mathbb{Z})$,
$$Q_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} 1 & : \quad (p,q) \in M_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin M_{(x,y)} \end{cases}.$$

4. $\widetilde{Q} := \widetilde{Q}\,(\Psi, \psi) \in M_{k'l'\times k'l'}\,(N_{l'\times k'}, N_{l'\times k'}, \mathbb{Z})$,
$$\widetilde{Q}_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right| & : \quad (p,q) = (x,y) \\ 0 & : \quad (p,q) \neq (x,y) \end{cases}.$$

5. $\overline{Q} := \overline{Q}(\Psi, \psi) := \widetilde{Q} \cdot Q \in M_{k'l'\times kl}\,(N_{l'\times k'}, N_{l\times k}, \mathbb{Z})$.

6. $P := P(\Psi) \in M_{|Sym(l)|\times|Sym(l')|}\,(Sym(l), Sym(l'), \mathbb{Z})$,
$$P_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} 1 & : \quad (x,y) \in N_{(p,q)} \\ 0 & : \quad (x,y) \notin N_{(p,q)} \end{cases}.$$

7. *Sei* $\displaystyle\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right| \neq 0$. $\widetilde{P} := \widetilde{P}(\Psi) \in M_{|Sym(l')|\times|Sym(l')|}\,(Sym(l'), Sym(l'), \mathbb{Q})$,
$$\widetilde{P}_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right|\right)^{-1} & : \quad (x,y) = (p,q) \\ 0 & : \quad (x,y) \neq (p,q) \end{cases}.$$

8. *Sei* $\displaystyle\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right| \neq 0$. $\overline{P} := \overline{P}(\Psi) := P \cdot \widetilde{P} \in M_{|Sym(l)|\times|Sym(l')|}\,(Sym(l), Sym(l'), \mathbb{Q})$.

9. $R := R(\Psi) \in M_{|N_\cup(G,w',\gamma')|\times|N_\cup(G,w,\gamma)|}\,(N_\cup\,(G, w', \gamma')\,, N_\cup\,(G, w, \gamma)\,, \mathbb{Z})$,
$$R_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} 1 & : \quad (p,q) \in N_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin N_{(x,y)} \end{cases}.$$

Für 10. und 11. gelte $N_{\cup}(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)} \neq \emptyset$ *für alle* $(x,y) \in Sym(l')$.

10. $\widetilde{R} := \widetilde{R}(\Psi) \in M_{|N_{\cup}(G,w',\gamma')| \times |N_{\cup}(G,w',\gamma')|}\left(N_{\cup}(G,w',\gamma'), N_{\cup}(G,w',\gamma'), \mathbb{Q}\right)$,
$$\widetilde{R}_{(x,y),(p,q)} := \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right|}{\left|N_{\cup}(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)}\right|} & : \quad (p,q) = (x,y) \\ 0 & : \quad (p,q) \neq (x,y) \end{cases}.$$

11. $\overline{R} := \overline{R}(\Psi) := \widetilde{R} \cdot R \in M_{|N_{\cup}(G,w',\gamma')| \times |N_{\cup}(G,w,\gamma)|}\left(N_{\cup}(G,w',\gamma'), N_{\cup}(G,w,\gamma), \mathbb{Q}\right)$.

□

Lemma 2.25 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. Ψ *surjektiv* $\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in Sym(l') : N_{(x,y)} \neq \emptyset$.

2. Ψ, ψ *surjektiv* $\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in N_{l' \times k'} : M_{(x,y)} \neq \emptyset$.

3. $Sym(l) = \biguplus_{(x,y) \in Sym(l')} N_{(x,y)} \quad , \quad N_{l \times k} = \biguplus_{(x,y) \in N_{l' \times k'}} M_{(x,y)}$.

4. $$\overline{P}_{(x,y),(p,q)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right|\right)^{-1} & : \quad (x,y) \in N_{(p,q)} \\ 0 & : \quad (x,y) \notin N_{(p,q)} \end{cases}.$$

5. $$\overline{Q}_{(x,y),(p,q)} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq x}}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right| & : \quad (p,q) \in M_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin M_{(x,y)} \end{cases}.$$

6. *Ist* Φ *surjektiv und* ϕ *injektiv, so gilt* $N_{\cup}(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)} \neq \emptyset$ *für alle* $(x,y) \in N_{\cup}(G,w',\gamma')$. *Die Matrix* $\overline{R}$ *berechnet sich zu:*
$$\overline{R}_{(x,y),(p,q)} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right|}{\left|N_{\cup}(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)}\right|} & : \quad (p,q) \in N_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin N_{(x,y)} \end{cases}.$$

Beweis **Zu 1.:** $(x,y) \in Sym(l') \overset{\Psi \text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists a,b : \Psi(a) = x \ \wedge \ \Psi(b) = y \Rightarrow \rho(a,b) \in N_{(x,y)}$.
Zu 2.: $(x,y) \in N_{l' \times k'} \overset{\Psi,\psi \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow} \exists a,b : \Psi(x) = a \ \wedge \ \psi(y) = b \Rightarrow (a,b) \in M_{(x,y)}$.
Zu 3.: In beiden Gleichungen ist $\supset$ definitionsgemäß erfüllt. Für die erste Gleichung gilt $\subset$: $(p,q) \in Sym(l) \Rightarrow \rho(\Psi(p),\Psi(q)) \in Sym(l') \Rightarrow (p,q) \in N_{\rho(\Psi(p),\Psi(q))}$. Für die zweite Gleichung gilt $\subset$: $(p,q) \in N_{l \times k} \Rightarrow (\Psi(p),\psi(q)) \in N_{l' \times k'} \Rightarrow (p,q) \in M_{(\Psi(p),\psi(q))}$. Für die

erste Gleichung gilt $\biguplus$: $(p,q) \in N_{(x_1,y_1)} \cap N_{(x_2,y_2)} \Rightarrow \rho(\Psi(p),\Psi(q)) = (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Für die zweite Gleichung gilt $\biguplus$: $(p,q) \in M_{(x_1,y_1)} \cap M_{(x_2,y_2)} \Rightarrow (\Psi(p),\psi(q)) = (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

Zu 4.: Es sei $a := \prod_{j=1}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right| \neq 0$. Man berechnet

$$\left(P\widetilde{P}\right)_{(x,y),(p,q)} = \sum_{(s,t)\in Sym(l')} P_{(x,y),(s,t)}\widetilde{P}_{(s,t),(p,q)} = P_{(x,y),(p,q)} \cdot a^{-1} = \begin{cases} a^{-1} & : \quad (x,y) \in N_{(p,q)} \\ 0 & : \quad (x,y) \notin N_{(p,q)} \end{cases}.$$

Zu 5.: Es sei $b_x := \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{l'} \left|\Psi^{-1}(j)\right|$. Man berechnet

$$\left(\widetilde{Q}Q\right)_{(x,y),(p,q)} = \sum_{(s,t)\in N_{l'\times k'}} \widetilde{Q}_{(x,y),(s,t)}Q_{(s,t),(p,q)} = b_x \cdot Q_{(x,y),(p,q)} = \begin{cases} b_x & : \quad (p,q) \in M_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin M_{(x,y)} \end{cases}.$$

Zu 6.: $(x,y) \in N_\cup(G,w',\gamma') \overset{\text{Lemma 2.8}}{\Longrightarrow} \exists (a,b) \in N_\cup(G,w,\gamma) : S_\cup(\Psi)(a,b) = (x,y) \Rightarrow (a,b) \in N_{(x,y)} \Rightarrow (a,b) \in N_\cup(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)}$. Sei $d_{(x,y)} := \frac{\prod_{j=1}^{l'}\left|\Psi^{-1}(j)\right|}{\left|N_\cup(G,w,\gamma)\cap N_{(x,y)}\right|}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{R}R\right)_{(x,y),(p,q)} &= \sum_{(s,t)\in N_\cup(G,w',\gamma')} \widetilde{R}_{(x,y),(s,t)}R_{(s,t),(p,q)} \\ &= d_{(x,y)} \cdot R_{(x,y),(p,q)} = \begin{cases} d_{(x,y)} & : \quad (p,q) \in N_{(x,y)} \\ 0 & : \quad (p,q) \notin N_{(x,y)} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Satz 2.26 *Die Abbildungen w, w', γ, γ' seien surjektiv. Es gelten:*

1. $\overline{Q} \cdot A(G,w,\gamma) \cdot \overline{P} = A(G,w',\gamma')$.
2. ϕ *injektiv* $\Longrightarrow \overline{R} \cdot B(G,w,\gamma) \cdot \overline{P} = B(G,w',\gamma')$.

Beweis Es seien a und b_x wie in Lemma 2.25 definiert. Weiterhin seien $d_{(x,y)} := N_\cup(G,w,\gamma)\cap N_{(x,y)}$, $A := A(G,w,\gamma)$, $A' := A(G,w',\gamma')$, $B := B(G,w,\gamma)$, $B' := B(G,w',\gamma')$, $IO := IO(G,w,\gamma)$ sowie $IO' := IO(G,w',\gamma')$.

Da γ, γ' und w, w' surjektiv sind, sind auch Ψ und ψ surjektiv.

Zu 1.: Für $(m,n) \in N_{l\times k}$ und $(p,q) \in Sym(l')$ gilt:

$$\left(A\overline{P}\right)_{(m,n),(p,q)} = \sum_{(x,y)\in Sym(l)} A_{(m,n),(x,y)}\overline{P}_{(x,y),(p,q)} \overset{2.25.4.}{=} \sum_{(x,y)\in N_{(p,q)}} A_{(m,n),(x,y)} \cdot a^{-1}.$$

Für $(s,i) \in N_{l'\times k'}$ berechnet man:

$$\begin{aligned} \left(\overline{Q}\left(A\overline{P}\right)\right)_{(s,i),(p,q)} &= \sum_{(m,n)\in N_{l\times k}} \overline{Q}_{(s,i),(m,n)} \left(A\overline{P}\right)_{(m,n),(p,q)} \\ &= \sum_{(m,n)\in N_{l\times k}} \overline{Q}_{(s,i),(m,n)} \cdot a^{-1} \cdot \underbrace{\sum_{(x,y)\in N(p,q)} A_{(m,n),(x,y)}}_{=:(*)} =: (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{\{(x,y)\in N_{(p,q)}|x=m\}} A_{(m,n),(x,y)} + \sum_{\{(x,y)\in N_{(p,q)}|x\neq m\}} A_{(m,n),(x,y)}\\ &= \sum_{(m,y)\in N_{(p,q)}} IO_{n,y} + \sum_{\{(x,y)\in N_{(p,q)}|x\neq m, y\neq m\}} A_{(m,n),(x,y)} \quad + \sum_{\{(x,y)\in N_{(p,q)}|x\neq m, y=m\}} A_{(m,n),(x,y)}\\ &= \sum_{(m,y)\in N_{(p,q)}} IO_{n,y} + 0 + \sum_{\{(x,m)\in N_{(p,q)}|x\neq m\}} IO_{n,x} = \sum_{\rho(x,m)\in N_{(p,q)}} IO_{n,x}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{s = q}$ **:**

$$\begin{aligned}(**) \quad &= \quad a^{-1}b_q \sum_{(m,n)\in M_{(q,i)}} \sum_{\rho(x,m)\in N_{(p,q)}} IO_{n,x} = a^{-1}b_q \sum_{m\in\Psi^{-1}(q)} \sum_{n\in\psi^{-1}(i)} \sum_{x\in\Psi^{-1}(p)} IO_{n,x}\\ &\overset{2.11}{=} \quad a^{-1}b_q \sum_{m\in\Psi^{-1}(q)} IO'_{i,p} = IO'_{i,p}a^{-1}b_q \left|\Psi^{-1}(q)\right| = IO'_{i,p} = A'_{(s,i),(p,q)}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{s = p}$ **:** Analog zum Fall $s = q$.

$\boldsymbol{s \notin \{p, q\}}$ **:**

$$(**) = a^{-1}b_s \sum_{(m,n)\in M_{(s,i)}} \sum_{\rho(x,m)\in N_{(p,q)}} IO_{n,x} \overset{\Psi(m)=s}{=} 0 = A'_{(s,i),(p,q)}.$$

Zu 2.: Für $(m, n) \in N_\cup(G, w, \gamma)$ und $(p, q) \in Sym(l')$ gilt:

$$\left(B\overline{P}\right)_{(m,n),(p,q)} = \sum_{(s,t)\in Sym(l)} B_{(m,n),(s,t)}\overline{P}_{(s,t),(p,q)} = \overline{P}_{(m,n),(p,q)}.$$

Für $(x, y) \in N_\cup(G, w', \gamma')$ gilt:

$$\begin{aligned}\left(\overline{R}\left(B\overline{P}\right)\right)_{(x,y),(p,q)} &= \sum_{(m,n)\in N_\cup(G,w,\gamma)} \overline{R}_{(x,y),(m,n)} \left(B\overline{P}\right)_{(m,n),(p,q)}\\ &= \sum_{(m,n)\in N_\cup(G,w,\gamma)} \overline{R}_{(x,y),(m,n)}\overline{P}_{(m,n),(p,q)}\\ &= a^{-1} \cdot \sum_{(m,n)\in N_\cup(G,w,\gamma)\cap N_{(p,q)}} \overline{R}_{(x,y),(m,n)} =: (***)\end{aligned}$$

1. Fall : $(x, y) = (p, q)$. Nach Lemma 2.25.6. gilt $N_\cup(G, w, \gamma)\cap N_{(p,q)} \neq \emptyset$. Daher berechnet man $(***) = a^{-1} \cdot \frac{a}{|d_{(p,q)}|} \cdot |d_{(p,q)}| = 1 = B'_{(x,y),(p,q)}$.

2. Fall : $(x, y) \neq (p, q)$ und $d_{(p,q)} = \emptyset$. Es gilt dann $(***) = 0 = B'_{(x,y),(p,q)}$.

3. Fall : $(x, y) \neq (p, q)$ und $d_{(p,q)} \neq \emptyset$. Für $(m, n) \in d_{(p,q)}$ gilt $(m, n) \in N_{(p,q)}\backslash N_{(x,y)}$ nach Lemma 2.25.3. Also folgt $(***) = 0 = B'_{(x,y),(p,q)}$. □

Korollar 2.27 *Es seien ϕ injektiv und w, w', γ, γ' surjektiv. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \overline{Q} & 0 \\ 0 & \overline{R} \end{pmatrix} \mathcal{A}(G, w, \gamma)\overline{P} = \mathcal{A}(G, w', \gamma').$$

Beweis Satz 2.26. □

Definition 2.28 *Zu* $\Psi : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l'\}$, $l, l' \in \mathbb{N}$, *sei der Homomorphismus*

$$\Psi^* : M^{tr}\left(Sym(l'), \mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(Sym(l), \mathbb{G}\right)$$

gegeben durch $[\Psi^*(y)]_{(p,q)} := y_{\rho(\Psi(p),\Psi(q))}$ *für alle* $(p,q) \in Sym(l)$.

Auf der Menge $N_{l\times k} \cup N_{\cup}(G, w, \gamma)$ *erhält man eine Ordnung, indem man für* $(p,q), (r,s) \in N_{l\times k} \cup N_{\cup}(G, w, \gamma)$ *festlegt :* $(p,q) < (r,s) :\Leftrightarrow (p,q) <_{N_{l\times k}} (r,s)$ *oder* $(p,q) <_{N_{\cup}(G,w,\gamma)} (r,s)$ *oder* $[(p,q) \in N_{l\times k} \ \wedge \ (r,s) \in N_{\cup}(G, w, \gamma)]$. *Dabei bezeichnen* $<_{N_{\cup}(G,w,\gamma)}$ *und* $<_{N_{l\times k}}$ *die entsprechenden lexikographischen Ordnungen. Der zu* $\mathcal{A}(G, w, \gamma)$ *gehörige Homomorphismus wird notiert als*

$$f_{(G,w,\gamma)} : M^{tr}\left(Sym(l), \mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(N_{l\times k} \cup N_{\cup}(G, w, \gamma), \mathbb{G}\right),$$

und ist durch $f_{(G,w,\gamma)}(y) := \mathcal{A}(G, w, \gamma) \cdot y$ *gegeben.* □

Satz 2.29 *Es seien* ϕ *injektiv und* w, w', γ, γ' *surjektiv.*

1. $\Psi^*(y) = P \cdot y$.
2. $\Psi^* : Kern\left(f_{(G,w',\gamma')}\right) \to Kern\left(f_{(G,w,\gamma)}\right)$ *ist wohldefiniert und injektiv.*
3. *Wenn* Φ *bijektiv ist, ist* $P = P\left(S(\Psi)\right)$ *Permutationsmatrix zu* $S(\Psi)$ *(siehe Seite 17) und* $\Psi^*(y) = \Theta\left(S(\Psi)\right)(y)$. *Weiterhin gelten* $P = \overline{P}$, $Q = \overline{Q}$, $R = \overline{R}$ *sowie* $|\det(P)| = |\det(Q)| = |\det(R)| = 1$.
4. *Wenn* Φ *bijektiv ist, ist* Ψ^* *ein Isomorphismus.*

Beweis Mit w, w', γ, γ' sind auch ϕ, Φ surjektiv. Also ist Ψ surjektiv und ψ bijektiv. Es gelten hier die Abkürzungen des Beweises zu Satz 2.26 auf Seite 44.

Zu 1.: Sei $(p,q) \in Sym(l)$. Nach Lemma 2.25.3. gibt es genau ein $(m,n) \in Sym(l')$ mit $(p,q) \in N_{(m,n)}$. Daher ist $(m,n) = \rho\left(\Psi(p), \Psi(q)\right)$, und es gilt

$$(Py)_{(p,q)} = \sum_{(s,t)\in Sym(l')} P_{(p,q),(s,t)} y_{(s,t)} = \sum_{\substack{\{(s,t)\,\in\, Sym(l')| \\ (p,q)\,\in\, N_{(s,t)}\}}} y_{(s,t)} = y_{\rho(\Psi(p),\Psi(q))} = \left(\Psi^*(y)\right)_{(p,q)}.$$

Zu 2.: Sei $\mathcal{A}(G, w', \gamma') \cdot y = 0$. Für $(s,i) \in N_{l\times k}$ gilt :

$$\begin{aligned}
\left(A \cdot \Psi^*(y)\right)_{(s,i)} &= \sum_{(p,q)\in Sym(l)} A_{(s,i),(p,q)} \Psi^*(y)_{(p,q)} = \sum_{\rho(p,s)\in Sym(l)} A_{(s,i),\rho(p,s)} \Psi^*(y)_{\rho(p,s)} \\
&\overset{2.25.3.}{=} \sum_{(m,n)\in Sym(l')} \ \sum_{\substack{\{p\,\in\,\{1,\ldots,l'\}| \\ \rho(p,s)\,\in\, N_{(m,n)}\}}} IO_{i,p} \Psi^*(y)_{\rho(p,s)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\{n \in \{1,\ldots,l'\} \mid \\ \rho(n,\Psi(s)) \in Sym(l')\}}} \sum_{\substack{\{p \in \{1,\ldots,l'\} \mid \\ \rho(p,s) \in N_{\rho(n,\Psi(s))}\}}} IO_{i,p} \cdot y_{\rho(\Psi(p),\Psi(s))}$$

$$= \sum_{n=1}^{l'} \sum_{p \in \Psi^{-1}(n)} IO_{i,p} \cdot y_{\rho(n,\Psi(s))} \overset{2.11}{=} \sum_{n=1}^{l'} IO'_{(\psi(i),n)} \cdot y_{\rho(n,\Psi(s))}$$

$$= \sum_{(m,n) \in Sym(l')} A'_{(\Psi(s),\psi^{-1}(i)),(m,n)} \cdot y_{(m,n)} \overset{\text{Vor.}}{=} 0$$

Für $(m,n) \in N_{\cup}(G,w,\gamma)$ gilt:

$$(B \cdot \Psi^*(y))_{(m,n)} = \sum_{(s,t) \in Sym(l)} B_{(m,n),(s,t)} \Psi^*(y)_{(s,t)} = \Psi^*(y)_{(m,n)} = y_{\rho(\Psi(n),\Psi(m))} \overset{\text{Vor.}}{=} 0,$$

denn $\rho\left(\Psi(n),\Psi(m)\right) \in N_{\cup}(G,w',\gamma')$ nach Lemma 2.8.

Ψ^* injektiv : Sei $\Psi^*(y) = \Psi^*(z)$. Für $(m,n) \in Sym(l')$ gilt: Es gibt $a, b \in Sym(l)$ mit

$$y_{(m,n)} = y_{\rho(\Psi(p),\Psi(q))} = \Psi^*(y)_{(p,q)} = \Psi^*(z)_{(p,q)} = z_{\rho(\Psi(p),\Psi(q))} = z_{(m,n)}.$$

Daraus folgt $y = z$.

Zu 3.: Mit Ψ ist auch $S(\Psi)$ bijektiv. Daher sind $\widetilde{P}$ und $\widetilde{Q}$ Einheitsmatrizen. Dies gilt auch für $\widetilde{R}$, denn aus dem Beweis von Lemma 2.25.6. geht $\left|N_{\cup}(G,w,\gamma) \cap N_{(x,y)}\right| = 1$ hervor. Verwendet man die Bezeichnungen von Seite 17, so gilt

$$(Py)_{(p,q)} \overset{1.}{=} (\Psi^*(y))_{(p,q)} = y_{S(\Psi)(p,q)} = \left(\Theta\left(S(\Psi)\right)(y)\right)_{(p,q)}$$

für alle $(p,q) \in Sym(l)$. Also gilt $P = P\left(S(\Psi)\right)$ und $\det(P) = \pm 1$. Die Abbildung $(\Psi,\psi) : N_{l \times k} \to N_{l' \times k'}$ ist bijektiv, und wegen der Definition von Q ergibt sich daher $Q = P\left((\Psi,\psi)\right)$ und $\det(Q) = \pm 1$. Die Abbildung $S_{\cup}(\Psi) : N_{\cup}(G,w,\gamma) \to N_{\cup}(G,w',\gamma')$ ist injektiv nach Voraussetzung und surjektiv nach Lemma 2.8. Daher gilt $R = P\left(S_{\cup}(\Psi)\right)$ und $\det(R) = \pm 1$.

Zu 4.: Mit Ψ ist Ψ^{-1} und somit $S\left(\Psi^{-1}\right) = S(\Psi)^{-1}$ bijektiv. Nach 1. und 3. gilt $\left(\Psi^{-1}\right)^*(y) = P\left(S\left(\Psi^{-1}\right)\right) y = P\left(S(\Psi)\right)^{-1} y = P^{-1} y$. Wegen $\det(P) = \pm 1$ ist daher $\left(\Psi^{-1}\right)^*$ ein Homomorphismus, für den $\Psi^* \left(\Psi^{-1}\right)^* = id$ und $\left(\Psi^{-1}\right)^* \Psi^* = id$ gilt. □

Bemerkung Wählt man in Satz 2.29 für w eine bijektive Eckennummerierung und für γ eine bijektive Kantennummerierung, so geht aus 2.29.2. hervor, dass der zugehörige Kern jeden zu einer surjektiven Ecken- und Kantennummerierung gehörigen Kern als Unterraum / Untergruppe enthält.

Satz 2.30 *Für ein orientiertes Graphendiagramm (D,o) sei (in der Generalvoraussetzung zu diesem Abschnitt auf Seite 41) $G := G(D)$ der induzierte orientierte Graph.*

Weiterhin seien w, w' surjektiv sowie $(D, \gamma, o) \in \mathcal{D}_l$ und $(D, \gamma', o) \in \mathcal{D}_{l'}$. Für jedes $y \in Kern\left(f_{(G(D),w',\gamma')}\right)$ gilt

$$L_{\Psi^*(y)}(D, \gamma, o) = L_y(D, \gamma', o).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
L_{\Psi^*(y)}(D,\gamma,o) &\overset{\text{Def. 2.12}}{=} \sum_{(s,t)\in Sym(l)} \Psi^*(y)_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
&\overset{2.25.3.}{=} \sum_{(p,q)\in Sym(l')} \sum_{(s,t)\in N_{(p,q)}} y_{S(\Psi)(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
&= \sum_{(p,q)\in Sym(l')} y_{(p,q)} \cdot \sum_{(s,t)\in N_{(p,q)}} w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{\{(p,q)\in Sym(l')|p\neq q\}} y_{(p,q)} \cdot \sum_{(s,t)\in N_{(p,q)}} w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{(p,q)\in Sym(l')} y_{(p,q)} \cdot w^{D,o}_{\gamma'^{-1}(e_p),\gamma'^{-1}(e_q)} = L_y(D,\gamma',o).
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Für $p = q$ ist $y_{(p,q)} = 0$ nach Definition 2.18.3. auf Seite 39.

Zu $(**)$: Für $p \neq q$ gilt :

$$\begin{aligned}
\sum_{(s,t)\in N_{(p,q)}} w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} &\overset{s\neq t}{=} \sum_{(s,t)\in N_{(p,q)}} \sum_{f\in\gamma^{-1}(e_s)} \sum_{g\in\gamma^{-1}(e_t)} \sum_{\{\tau_x\in cr(D)|x\in f\cap g\}} \epsilon(D,o)(\tau_x) \\
&= \sum_{\{\rho(s,t)\in Sym(l)|s\in\Psi^{-1}(p),t\in\Psi^{-1}(q)\}} \sum_{f\in\gamma^{-1}(e_s)} \sum_{g\in\gamma^{-1}(e_t)} \sum_{\{\tau_x\in cr(D)|x\in f\cap g\}} \epsilon(D,o)(\tau_x) \\
&\overset{p\neq q}{=} \sum_{s\in\Psi^{-1}(p)} \sum_{t\in\Psi^{-1}(q)} \sum_{f\in\gamma^{-1}(e_s)} \sum_{g\in\gamma^{-1}(e_t)} \sum_{\{\tau_x\in cr(D)|x\in f\cap g\}} \epsilon(D,o)(\tau_x) \\
&= \sum_{f\in\gamma'^{-1}(e_p)} \sum_{g\in\gamma'^{-1}(e_q)} \sum_{\{\tau_x\in cr(D)|x\in f\cap g\}} \epsilon(D,o)(\tau_x) \overset{p\neq q}{=} w^{D,o}_{\gamma'^{-1}(e_p),\gamma'^{-1}(e_q)}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Umorientierungen

Definition 2.31 *Ein orientierter Graph $G = (V, E, g)$ geht aus einem orientierten Graphen $G' = (V, E, g')$ durch* **Umorientieren** *der Kanten $K \subset E$ hervor, wenn für die Inzidenzabbildungen*

$$g(e) = \begin{cases} g'(e) & : \quad e \notin K \\ t\left(g'(e)\right) & : \quad e \in K \end{cases}$$

gilt. Dabei ist die **Vertauschungsabbildung** *$t : V \times V \to V \times V$ definiert durch $(x, y) \mapsto (y, x)$.* □

Satz 2.32 *Vorgelegt seien orientierte Graphen $G = (V, E, g)$ und $G' = (V, E, g')$ zusammen mit einer surjektiven Kantennummerierung γ und einer surjektiven Eckennummerierung w. Der Graph G' gehe aus G durch Umorientieren der Kanten $K := \gamma^{-1}(e_l)$, $l \in \{1, \ldots, |E|\}$ hervor. Dann ist die Abbildung*

$$o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)} : Kern\, f_{(G,w,\gamma)} \to Kern\, f_{(G',w,\gamma)}$$

definiert durch

$$\left[o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)}(y)\right]_{(s,t)} := \begin{cases} y_{(s,t)} & : \ (s \neq l \ \wedge \ t \neq l) \ \vee \ (s = t = l) \\ -y_{(s,t)} & : \ (s = l \ \vee \ t = l) \ \wedge \ (s \neq t) \end{cases}$$

ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $o_{(G',w,\gamma)}^{(G,w,\gamma)}$.

Beweis Sei $n := |E|$ und $k := |V|$. Zunächst wird

$$IO\,(G, w, \gamma)_{i,s} = \begin{cases} IO\,(G', w, \gamma)_{i,s} & : \ s \neq l \\ -IO\,(G', w, \gamma)_{i,s} & : \ s = l \end{cases}$$

für $(s, i) \in N_{n,k}$ gezeigt. Dabei sei $IO(X, w, \gamma)_{i,s} = |A_X| - |B_X|$ für $X \in \{G, G'\}$ analog zu Satz 1.9 auf Seite 14. Falls $s \neq l$ eintritt, gilt $f \notin \gamma^{-1}(e_s)$ für jede Kante f aus K. Daher berechnet man

$$\begin{aligned} (e, v) \in A_G \quad &\Leftrightarrow \quad (e, v) \in \gamma^{-1}(e_s) \times w^{-1}(v_i) : g(e) = (v, u), u \neq v \\ &\Leftrightarrow \quad (e, v) \in \gamma^{-1}(e_s) \times w^{-1}(v_i) : g'(e) = (v, u), u \neq v \Leftrightarrow (e, v) \in A_{G'}. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man $B_G = B_{G'}$. Also gilt $IO\,(G, w, \gamma)_{i,s} = IO\,(G', w, \gamma)_{i,s}$. Für $s = l$ erhält man auf dieselbe Art $A_G = B_{G'}$ und $A_{G'} = B_G$. Man berechnet

$$IO\,(G, w, \gamma)_{i,s} = |A_G| - |B_G| = |B_{G'}| - |A_{G'}| = -IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,s}.$$

Nun wird nachgewiesen, dass $o := o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)}$ wohldefiniert ist. Dazu sei $y \in \text{Kern}\, f_{(G,w,\gamma)}$. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \left[\mathcal{A}\left(G', w, \gamma\right) \cdot o(y)\right]_{(s,i)} = \sum_{(p,q) \in Sym(n)} \mathcal{A}\left(G', w, \gamma\right)_{(s,i),(p,q)} \cdot o(y)_{(p,q)} \\ &= \sum_{\{p | \rho(p,s) \in Sym(n)\}} IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,p} \cdot o(y)_{\rho(p,s)} = \sum_{p=1}^{n} IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,p} \cdot o(y)_{\rho(p,s)} =: (*). \end{aligned}$$

Für $s = l$ gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad &= \quad \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{n} IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,p} \left(-y_{\rho(p,l)}\right) + IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,l} y_{\rho(l,l)} \\ &= \quad -\sum_{p=1}^{n} IO\,(G, w, \gamma)_{i,p}\, y_{\rho(p,l)} \quad + 0 \ = -\left[\mathcal{A}(G, w, \gamma) \cdot y\right]_{i,l} \overset{\text{Vor.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Für $s \neq l$ berechnet man

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{n} IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,p} y_{\rho(p,s)} + IO\left(G', w, \gamma\right)_{i,l}\left(-y_{\rho(l,s)}\right)\\
&= \sum_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{n} IO\left(G, w, \gamma\right)_{i,p} y_{\rho(p,s)} + IO\left(G, w, \gamma\right)_{i,l} y_{\rho(l,s)}\\
&= \sum_{p=1}^{n} IO\left(G, w, \gamma\right)_{i,p} y_{\rho(p,s)} \quad = [\mathcal{A}(G, w, \gamma) \cdot y]_{i,s} \overset{\text{Vor.}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Da o komponentenweise definiert ist, handelt es sich um einen Homomorphismus abelscher Gruppen. Außerdem gilt offenbar

$$o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)} \circ o_{(G',w,\gamma)}^{(G,w,\gamma)} = id_{\mathrm{Kern}\, f_{(G',w,\gamma)}} \quad \text{sowie} \quad o_{(G',w,\gamma)}^{(G,w,\gamma)} \circ o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)} = id_{\mathrm{Kern}\, f_{(G,w,\gamma)}}.$$

□

2.5 Verschlingungsinvarianten von Teilkomplexen

Es liegt nahe zu untersuchen, ob die Invariante $L_y(D_\mathcal{Y}, \cdot, \cdot, \cdot)$ zu einem Diagramm $D_\mathcal{Y}$ eines Teilkomplexes $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{Z}$ aus der Invariante $L_z(D_\mathcal{Z}, \cdot, \cdot, \cdot)$ zu einem geeigneten Diagramm $D_\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}$ gewonnen werden kann. In Satz 2.36 auf Seite 53 wird gezeigt, dass dies unter gewissen, nur die Nummerierung betreffenden Voraussetzungen für bestimmte $y \in \mathrm{Kern}\left(f_{(G(D_\mathcal{Y}),\cdot,\cdot)}\right)$ und $z \in \mathrm{Kern}\left(f_{(G(D_\mathcal{Z}),\cdot,\cdot)}\right)$ insofern möglich ist, dass dann $L_y(D_\mathcal{Y}, \cdot, \cdot, \cdot) = L_z(D_\mathcal{Z}, \cdot, \cdot, \cdot)$ gilt. Diese Gleichung kann als notwendige Bedingung an die Realisierbarkeit konkreter Einbettungen von Teilgraphen oder auch Knotentypen interpretiert werden, siehe [24], Theorem 1.2. In gewissen Fällen sind Ergebnisse über hinreichende Bedingungen erzielt worden, siehe dazu [24], Theorem 1.4., [26], §1 und [31], Theorem.

Vorgelegt sei die Situation aus der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27.

Definition 2.33 *Zu $l, l' \in \mathbb{N}$ und einer injektiven Abbildung $g : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l'\}$ sei ein Homomorphismus*

$$g_* : M^{tr}\left(Sym(l), \mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(Sym(l'), \mathbb{G}\right)$$

gegeben durch

$$[g_*(y)]_{(p,q)} := \begin{cases} y_{\rho(g^{-1}(p), g^{-1}(q))} & : \ p, q \in Bild(g) \\ 0 & : \ p \notin Bild(g) \ \vee \ q \notin Bild(g) \end{cases}.$$

In 2.1 seien Ψ und ψ injektiv. Darüber hinaus trete einer der folgenden Fälle ein:

a) $\gamma_H^{-1}(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$.

b) γ_G *ist surjektiv und* (γ_G, w_G), (γ_H, w_H), (ϕ, Φ) *sind Homomorphismen.*

Dann lässt sich wegen Lemma 2.9 auf Seite 30 im Fall a) bzw. Lemma 2.10 im Fall b) ein Homomorphismus

$$(\Psi,\psi)_* : M^{tr}\left(N_{l_G \times k_G} \cup N_\cup(G, w_G, \gamma_G), \mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(N_{l_H \times k_H} \cup N_\cup(H, w_H, \gamma_H), \mathbb{G}\right)$$

definieren durch

$$[(\Psi,\psi)_*(y)]_{(p,q)} := \begin{cases} y_{(\Psi^{-1}(p),\psi^{-1}(q))} & : \ (p,q) \in N_{l_H \times k_H} \ \wedge \ p \in Bild(\Psi) \ \wedge \ q \in Bild(\psi) \\ y_{\rho(\Psi^{-1}(p),\Psi^{-1}(q))} & : \ (p,q) \in N_\cup(H, w_H, \gamma_H) \ \wedge \ p,q \in Bild(\Psi) \\ 0 & : \ sonst \end{cases}.$$

□

Ab nun gelten in diesem Kapitel für $X \in \{G, H\}$ die folgenden Abkürzungen: $\mathcal{A}(X) := \mathcal{A}(X, w_X, \gamma_X), A(X) := A(X, w_X, \gamma_X), B(X) := B(X, w_X, \gamma_X), IO(X) := IO(X, w_X, \gamma_X)$, $N_\cup(X) := N_\cup(X, w_X, \gamma_X), f_X := f_{(X, w_X, \gamma_X)}$.

Satz 2.34 *Es seien* Ψ, ψ *injektiv,* $w_H, w_G, \gamma_H, \gamma_G$ *surjektiv und* $\gamma_H^{-1}(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$ *(also ist* F *surjektiv). Dann kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} M^{tr}(Sym(l_G), \mathbb{G}) & \xrightarrow{f_G} & M^{tr}(N_{l_G \times k_G} \cup N_\cup(G)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\Psi,\psi)_*} \\ M^{tr}(Sym(l_H), \mathbb{G}) & \xrightarrow{f_H} & M^{tr}(N_{l_H \times k_H} \cup N_\cup(H)) \end{array}.$$

Beweis **1. Fall :** $(p,q) \in N_{l_H \times k_H}, \Psi(r) = p, \psi(s) = q$.

$$((\Psi,\psi)_* f_G(y))_{(p,q)} = f_G(y)_{(r,s)} = (A(G) \cdot y)_{(r,s)} \tag{2.31}$$

$$= \sum_{(x,y) \in Sym(l_G)} A(G)_{(r,s),(x,y)} \cdot y_{(x,y)}$$

$$= \sum_{\rho(x,r) \in Sym(l_G)} IO(G)_{s,x} \cdot y_{\rho(x,r)}$$

$$\overset{2.11}{=} \sum_{\rho(x,r) \in Sym(l_G)} IO(H)_{\psi(s),\Psi(x)} \cdot y_{\rho(x,r)} \tag{2.32}$$

$$\overset{z := \Psi(x)}{=} \sum_{z \in \text{Bild } \Psi} IO(H)_{q,z} \cdot y_{\rho(\Psi^{-1}(z),r)}$$

$$= \sum_{z \in \text{Bild } \Psi} IO(H)_{q,z} \cdot \Psi_*(y)_{\rho(p,z)} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\rho(z,p)\in Sym(l_H)} A(H)_{(p,q),\rho(z,p)} \cdot \Psi_*(y)_{\rho(z,p)} \\
&= \sum_{(z,n)\in Sym(l_H)} A(H)_{(p,q),(z,n)} \cdot \Psi_*(y)_{(z,n)} \\
&= (A(H)\cdot \Psi_*(y))_{(p,q)} = (f_H\Psi_*(y))_{(p,q)} \,.
\end{aligned}$$

2. Fall : $(p,q) \in N_{l_H\times k_H}, p \notin \text{Bild}\,(\Psi)$. Der linke Term in (2.31) ist definitionsgemäß Null. Dasselbe gilt für $\Psi_*(y)_{\rho(p,z)}$ in (2.33).

3. Fall : $(p,q) \in N_{l_H\times k_H}, q \notin \text{Bild}\,(\psi)$. Wie im zweiten Fall ist der linke Term in (2.31) definitionsgemäß Null. In (2.33) ist $IO(H)_{q,z} = 0$ wegen Lemma 2.6 auf Seite 30 und Hilfssatz 2.16 auf Seite 37.

4. Fall : $(p,q) \in N_\cup(H), \Psi(r) = p, \Psi(s) = q$. Nach Lemma 2.9 auf Seite 30 gilt $\rho(r,s) \in N_\cup(G)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
(f_H\Psi_*(y))_{(p,q)} &= (B(H)\cdot\Psi_*(y))_{(p,q)} = \Psi_*(y)_{(p,q)} = y_{\rho(r,s)} \\
&= (B(G)\cdot y)_{\rho(r,s)} = f_G(y)_{\rho(r,s)} = ((\Psi,\psi)_* f_G(y))_{(p,q)} \,.
\end{aligned}$$

5. Fall : $(p,q) \in N_\cup(H), p \notin \text{Bild}\,(\Psi)$ oder $q \notin \text{Bild}\,(\Psi)$. In der vorigen Rechnung sind sowohl $\Psi_*(y)_{(p,q)}$ als auch $((\Psi,\psi)_* f_G(y))_{(p,q)}$ definitionsgemäß Null. □

Der Satz 2.34 bedeutet, dass Ψ_* den Kern von f_G in den Kern von f_H abbildet. Dies gilt sogar, wenn an ψ keine Voraussetzungen geknüpft werden:

Satz 2.35 *Es sei Ψ injektiv,$w_H, w_G, \gamma_H, \gamma_G$ surjektiv und $\gamma_H^{-1}\,(Bild\,(\Phi)) \subset Bild\,(F)$ (also ist F surjektiv). Dann ist die Abbildung*

$$\Psi_* : Kern\,(f_G) \to Kern\,(f_H)$$

wohldefiniert und injektiv.

Beweis Sei $f_G(y) = 0$. Es wird $f_H\Psi_*(y) = 0$ gezeigt.

1. Fall : $(p,q) \in N_{l_H\times k_H}, \Psi(r) = p, q \in \text{Bild}\,(\psi)$. Wie in Satz 2.34 berechnet man

$$\begin{aligned}
(f_H\Psi_*(y))_{(p,q)} &\overset{(2.32)}{=} \sum_{\rho(x,r)\in Sym(l_G)} IO(H)_{q,\Psi(x)} \cdot y_{\rho(x,r)} \\
&\overset{2.11}{=} \sum_{\rho(x,r)\in Sym(l_G)} \sum_{z\in\psi^{-1}(q)} IO(G)_{z,x} \cdot y_{\rho(x,r)} \\
&= \sum_{z\in\psi^{-1}(q)} \sum_{\rho(x,r)\in Sym(l_G)} A(G)_{(r,z),\rho(x,r)} \cdot y_{\rho(x,r)} \\
&= \sum_{z\in\psi^{-1}(q)} (A(G)\cdot y)_{(\Psi^{-1}(p),z)} = \sum_{z\in\psi^{-1}(q)} f_G(y)_{(\Psi^{-1}(p),z)} = 0.
\end{aligned}$$

2. Fall : $(p, q) \in N_{l_H \times k_H}, p \notin \text{Bild}(\Psi)$. Analog zum zweiten Fall in Satz 2.34.

3. Fall : $(p, q) \in N_{l_H \times k_H}, q \notin \text{Bild}(\psi)$. Analog zum dritten Fall in Satz 2.34.

4. Fall : $(p, q) \in N_{\cup}(H), \Psi(r) = p, \Psi(s) = q$. Nach Lemma 2.9 auf Seite 30 gilt $\rho(r, s) \in N_{\cup}(G)$. Daher gilt:

$$(f_H \Psi_*(y))_{(p,q)} = (B(H) \cdot \Psi_*(y))_{(p,q)} = \Psi_*(y)_{(p,q)} = y_{\rho(r,s)} = 0.$$

5. Fall : $(p, q) \in N_{\cup}(H), p \notin \text{Bild}(\Psi)$ oder $q \notin \text{Bild}(\Psi)$. In der vorigen Rechnung ist $\Psi_*(y)_{(p,q)}$ definitionsgemäß Null.

Ψ_* injektiv : Es gelte $\Psi_*(x) = \Psi_*(y)$. Sei $(m, n) \in Sym(l_G)$ mit $\Psi(m) = p$ und $\Psi(n) = q$. Dann gilt

$$x_{(m,n)} = x_{(\Psi^{-1}(p),\Psi^{-1}(q))} = \Psi_*(x)_{\rho(p,q)} = \Psi_*(y)_{\rho(p,q)} = y_{(\Psi^{-1}(p),\Psi^{-1}(q))} = y_{(m,n)}.$$

Daraus folgt $x = y$. □

Gegeben seien Zellenkomplexe $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ und eine zelluläre Inklusion $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$. Für eine Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ und eine reguläre Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ gilt $\pi\Gamma(\mathcal{Y}) \subset \pi\Gamma(\mathcal{Z})$ sowie $cr(D_{\mathcal{Y}}) \subset cr(D_{\mathcal{Z}})$. Man notiert dann $D_{\mathcal{Y}} \subset D_{\mathcal{Z}}$. Sind $(\mathcal{Y}, o_{\mathcal{Y}})$, $(\mathcal{Z}, o_{\mathcal{Z}})$ orientierte Zellenkomplexe, so dass $o_{\mathcal{Y}}$ die Einschränkung von $o_{\mathcal{Z}}$ ist, schreibt man $\left(D_{\mathcal{Y}}, o_{D_{\mathcal{Y}}}\right) \subset \left(D_{\mathcal{Z}}, o_{D_{\mathcal{Z}}}\right)$ für die entsprechenden orientierten Diagramme. Diese liefern einen injektiven Homomorphismus $(f, F) : G(D_{\mathcal{Y}}) \to G(D_{\mathcal{Z}})$ definiert durch $f(v) = v$ und $F(e) = e$ der induzierten orientierten Graphen. Darüber hinaus gilt $\epsilon(\tau, D_{\mathcal{Y}}) = \epsilon(\tau, D_{\mathcal{Z}})$ für jede Kreuzung $\tau \in cr(D_{\mathcal{Y}})$.

Satz 2.36 *Es seien $\left(D_{\mathcal{Y}}, o_{D_{\mathcal{Y}}}\right) \subset \left(D_{\mathcal{Z}}, o_{D_{\mathcal{Z}}}\right)$ orientierte Diagramme wie in der obigen Situation. In der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 seien $G := G(D_{\mathcal{Y}})$, $H := G(D_{\mathcal{Z}})$, (f, F) der obige injektive Homomorphismus, γ_H, γ_G, w_G und w_H surjektiv, Φ,ϕ injektiv und $\gamma_H^{-1}(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$. Für $y \in Kern(f_G)$ gilt*

$$L_y\left(D_{\mathcal{Y}}, \gamma_{G(D_{\mathcal{Y}})}, o_{D_{\mathcal{Y}}}\right) = L_{\Psi_*(y)}\left(D_{\mathcal{Z}}, \gamma_{G(D_{\mathcal{Z}})}, o_{D_{\mathcal{Z}}}\right).$$

Beweis

$$\begin{aligned} L_y\left(D_{\mathcal{Y}}, \gamma_G, o_{D_{\mathcal{Y}}}\right) &= \sum_{(p,q)\in Sym(l_G)} y_{(p,q)} \cdot w^{D_{\mathcal{Y}}, o_{D_{\mathcal{Y}}}}_{\gamma_G^{-1}(e_p),\gamma_G^{-1}(e_q)} \\ &\overset{2.25.3}{=} \sum_{(s,t)\in Sym(l_H)} \sum_{(p,q)\in N_{(s,t)}} y_{(p,q)} \cdot w^{D_{\mathcal{Y}}, o_{D_{\mathcal{Y}}}}_{\gamma_G^{-1}(e_p),\gamma_G^{-1}(e_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\Psi,\psi \text{ inj.}}{=} \sum_{\{(s,t)\in Sym(l_H)|N_{(s,t)}\neq\emptyset\}} y_{\rho(\Psi^{-1}(s),\Psi^{-1}(t))}\cdot w^{D_{\mathcal{Y}},o_{D_{\mathcal{Y}}}}_{\gamma_G^{-1}(e_{\Psi^{-1}(s)}),\gamma_G^{-1}(e_{\Psi^{-1}(t)})}\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{\{(s,t)\in Sym(l_H)|N_{(s,t)}\neq\emptyset\}} \Psi_*(y)_{(s,t)}\cdot w^{D_{\mathcal{Y}},o_{D_{\mathcal{Y}}}}_{F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_s)),F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_t))}\\
&\overset{(**)}{=} \sum_{\{(s,t)\in Sym(l_H)|N_{(s,t)}\neq\emptyset\}} \Psi_*(y)_{(s,t)}\cdot w^{D_{\mathcal{Z}},o_{D_{\mathcal{Z}}}}_{\gamma_H^{-1}(e_s),\gamma_H^{-1}(e_t)}\\
&= \sum_{(s,t)\in Sym(l_H)} \Psi_*(y)_{(s,t)}\cdot w^{D_{\mathcal{Z}},o_{D_{\mathcal{Z}}}}_{\gamma_H^{-1}(e_s),\gamma_H^{-1}(e_t)} = L_{\Psi_*(y)}\left(D_{\mathcal{Z}},\gamma_H,o_{D_{\mathcal{Z}}}\right).
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Es gilt $\gamma_G^{-1}\left(e_{\Psi^{-1}(s)}\right) = F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_s)\right)$ für $s \in \text{Bild}\,(\Psi)$:

$\subset$: $x \in \gamma_G^{-1}\left(e_{\Psi^{-1}(s)}\right) \Rightarrow \gamma_H F(x) = \Phi\gamma_G(x) = \Phi\left(e_{\Psi^{-1}(s)}\right) = e_s$.

$\supset$: $x \in F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_s)\right) \Rightarrow \Phi\gamma_G(x) = \gamma_H F(x) = e_s \Rightarrow \gamma_G(x) \in \Phi^{-1}(e_s) = e_{\Psi^{-1}(s)}$.

Zu $(**)$: Zunächst gilt : $e_s \in \text{Bild}\,(\Phi) \Rightarrow \gamma_H^{-1}(e_s) \subset \text{Bild}\,(F) \overset{F\equiv id}{\Rightarrow} F^{-1}\left(\gamma_H^{-1}(e_s)\right) = \gamma_H^{-1}(e_s)$. Damit berechnet man für $s \neq t$:

$$\begin{aligned}
w^{D_{\mathcal{Y}},o_{D_{\mathcal{Y}}}}_{F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_s)),F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_t))} &= \sum_{(f,g)\in F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_s))\times F^{-1}(\gamma_H^{-1}(e_t))} \sum_{\{\tau_x\in cr(D_{\mathcal{Y}})|x\in f\cap g\}} \epsilon(\tau_x, D_{\mathcal{Y}})\\
&= \sum_{(f,g)\in \gamma_H^{-1}(e_s)\times\gamma_H^{-1}(e_t)} \sum_{\{\tau_x\in cr(D_{\mathcal{Z}})|x\in f\cap g\}} \epsilon(\tau_x, D_{\mathcal{Z}})\\
&= w^{D_{\mathcal{Z}},o_{D_{\mathcal{Z}}}}_{\gamma_H^{-1}(e_s),\gamma_H^{-1}(e_t)}
\end{aligned}$$

Für $s = t$ gilt $y_{\rho(\Psi^{-1}(s),\Psi^{-1}(t))} = 0$ nach Definition 2.18.3. auf Seite 39, denn es gilt $y \in \text{Kern}\,(f_G)$ nach Voraussetzung. □

2.6 Vereinfachte Darstellung der Verschlingungsinvariante

Vorgelegt sei weiterhin die Situation aus der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27. Für $(p, q) \in N_\cup(G)$ und $y \in \text{Kern}\,(f_G)$ gilt $y_{(p,q)} = 0$ nach Definition 2.18.3. auf Seite 39. Daher lässt sich L_y aus Definition 2.12 auf Seite 32 für „kleinere" Indexmengen einführen.

Am Ende dieses Abschnittes befindet sich auf Seite 61 eine Abbildung, die einen Teil der in 2.5 und 2.6 bewiesenen Sätze zusammenfasst.

Definition 2.37 *Zu einem orientierten Graphen $G = (V, E, g)$ mit einer Eckennummerierung $w : V \to \mathcal{V}_k$ und einer Kantennummerierung $\gamma : E \to \mathcal{E}_l$ definiert man*

$$\begin{aligned}
IE\,(G, w, \gamma) &:= Sym(l)\backslash N_\cup(G, w, \gamma),\\
IV(G, w, \gamma) &:= \{(s, i) \in N_{l\times k} \mid s \notin ad(i, G, w, \gamma)\}
\end{aligned}$$

sowie Homomorphismen

$$\begin{aligned} j_{(G,w,\gamma)} &: M^{tr}\left(IV(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(N_{l\times k} \cup N_{\cup}(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right), \\ i_{(G,w,\gamma)} &: M^{tr}\left(IE(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(Sym(l),\mathbb{G}\right) \end{aligned}$$

durch

$$\left[j_{(G,w,\gamma)}(x)\right]_{(p,q)} := \begin{cases} x_{(p,q)} & : \ (p,q) \in IV(G,w,\gamma) \\ 0 & : \ (p,q) \in N_{l\times k} \backslash IV(G,w,\gamma) \\ 0 & : \ (p,q) \in N_{\cup}(G,w,\gamma) \end{cases}$$

bzw.

$$\left[i_{(G,w,\gamma)}(x)\right]_{(p,q)} := \begin{cases} x_{(p,q)} & : \ (p,q) \in IE(G,w,\gamma) \\ 0 & : \ (p,q) \notin IE(G,w,\gamma) \end{cases}.$$

Sind sowohl w als auch γ surjektiv, so sei die Matrix

$$\mathcal{M}(G,w,\gamma) \in M_{|IV(G,w,\gamma)|\times|IE(G,w,\gamma)|}\left(IV(G,w,\gamma), IE(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right)$$

gegeben durch $[\mathcal{M}(G,w,\gamma)]_{(s,i),(p,q)} := [\mathcal{A}(G,w,\gamma)]_{(s,i),(p,q)}$. Der zugehörige Homomorphismus wird bezeichnet mit

$$G_{(G,w,\gamma)} : M^{tr}\left(IE(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(IV(G,w,\gamma),\mathbb{G}\right)$$

und ist festgelegt durch $G_{(G,w,\gamma)}(y) := \mathcal{M}(G,w,\gamma) \cdot y$. □

Für $X \in \{G, H\}$ gelten ab jetzt in diesem Kapitel die folgenden Notationen : $IE(X) := IE(X, w_X, \gamma_X), IV(X) := IV(X, w_X, \gamma_X), \mathcal{M}(X) := \mathcal{M}(X, w_X, \gamma_X), G_X := G_{(X,w_X,\gamma_X)}$, $i_X := i_{(X,w_X,\gamma_X)}, j_X := j_{(X,w_X,\gamma_X)}$.

Satz 2.38 *Es seien w_G und γ_G surjektiv. Das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} M^{tr}\left(IE(G),\mathbb{G}\right) \arrow[r, "G_G"] \arrow[d, "i_G"] & M^{tr}\left(IV(G),\mathbb{G}\right) \arrow[d, "j_G"] \\ M^{tr}\left(Sym(l_G),\mathbb{G}\right) \arrow[r, "f_G"] & M^{tr}\left(N_{l_G\times k_G} \cup N_{\cup}(G),\mathbb{G}\right) \end{tikzcd}.$$

Beweis **1. Fall :** $(p,q) \in IV(G)$.

$$\begin{aligned} \left(f_G i_G(x)\right)_{(p,q)} &= \left(A(G) \cdot i_G(x)\right)_{(p,q)} = \sum_{(s,t)\in Sym(l_G)} A(G)_{(p,q),(s,t)} \cdot i_G(x)_{(s,t)} \\ &= \sum_{(s,t)\in IE(G)} A(G)_{(p,q),(s,t)} \cdot x_{(s,t)} = \sum_{(s,t)\in IE(G)} \mathcal{M}(G)_{(p,q),(s,t)} \cdot x_{(s,t)} \\ &= \left(G_G(x)\right)_{(p,q)} = \left(j_G\left(G_G(x)\right)\right)_{(p,q)}. \end{aligned}$$

2. Fall : $(p,q) \in N_{l_G\times k_G} \backslash IV(G)$. Es gilt $\mathcal{A}(G)_{(p,q),(s,t)} = 0$ für alle $(s,t) \in IE(G)$, denn

1. $p \notin \{s,t\} : \mathcal{A}(G)_{(p,q),(s,t)} = 0$ nach Definition.

2. $p = s : (p,q) \notin IV(G) \Rightarrow s = p \in ad(q, G, w_G, \gamma_G) \overset{(s,t)\in IE(G)}{\Longrightarrow} t \notin ad(q, G, w_G, \gamma_G)$
$\Rightarrow \mathcal{A}(G)_{(p,q),(s,t)} = 0$.

3. $p = t$: analog zu 2.

Daher gilt

$$(f_G i_G(x))_{(p,q)} \overset{\text{wie 1. Fall}}{=} \sum_{(s,t)\in IE(G)} A(G)_{(p,q),(s,t)} \cdot x_{(s,t)} = 0 = \left(j_G\left(G_G(x)\right)\right)_{(p,q)} .$$

3. Fall : $(p,q) \in N_\cup(G)$.

$$(f_G i_G(x))_{(p,q)} = (B(G) \cdot i_G(x))_{(p,q)} = i_G(x)_{(p,q)} = 0 = \left(j_G\left(G_G(x)\right)\right)_{(p,q)} .$$

□

Satz 2.39 *Es seien w_G und γ_G surjektiv. In dem Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Kern\,(G_G) \arrow[r, "Inklusion"] \arrow[d, "\kappa"'] & M^{tr}\,(IE(G), \mathbb{G}) \arrow[d, "i_G"] \\ Kern\,(f_G) \arrow[r, "Inklusion"] & M^{tr}\,(Sym(l_G), \mathbb{G}) \end{tikzcd}$$

ist die Abbildung $\kappa(x) := i_G(x)$ ein Isomorphismus.

Beweis Mit i_G ist auch κ ein injektiver Homomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass κ surjektiv ist. Dazu sei $z \in \text{Kern}\,(f_G)$. Definiere $z' \in M^{tr}\,(IE(G), \mathbb{G})$ durch $z'_{(p,q)} := z_{(p,q)}$. Für alle $(p,q) \in N_\cup(G)$ gilt : $0 = f_G(z)_{(p,q)} = (B(G)\cdot z)_{(p,q)} = z_{(p,q)}$. Daher gelten:

1. $\boldsymbol{i_G(z') = z}$: $\forall (p,q) \in Sym(l_G)$:

$$i_G(z')_{(p,q)} = \left\{ \begin{array}{rcl} z'_{(p,q)} & : & (p,q) \in IE(G) \\ 0 & : & (p,q) \notin IE(G) \end{array} \right\} = z_{(p,q)}.$$

2. $\boldsymbol{z'} \in$ **Kern** $\boldsymbol{G_G}$: $j_G G_G(z') \overset{2.38}{=} f_G i_G(z') = f_G(z) = 0 \overset{j_G \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} G_G(z') = 0$.

Insgesamt erhält man $\kappa(z') = i_G(z') = z$. □

Definition 2.40 *Für $l \in \mathbb{N}$, $(D, \gamma, o) \in \mathcal{D}_l$, eine Eckennummerierung $w : V_D \to \mathcal{V}_k$ und $y \in M^{tr}\,(IE(G(D), w, \gamma), \mathbb{G})$ definiere*

$$L_y(D, \gamma, o) := \sum_{(s,t)\in IE(G(D),w,\gamma)} y_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)}. \qquad \square$$

Satz 2.41 *Für $(D,\gamma,o) \in \mathcal{D}_l$, eine surjektive Eckennummerierung $w : V_D \to \mathcal{V}_k$ und jedes Element $y \in Kern\left(G_{(G(D),w,\gamma)}\right)$ gilt $L_y(D,\gamma,o) = L_{\kappa(y)}(D,\gamma,o)$.*

Beweis

$$\begin{aligned}
L_y(D,\gamma,o) = & \sum_{(s,t)\in IE(G(D),w,\gamma)} y_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
= & \sum_{(s,t)\in IE(G(D),w,\gamma)} \kappa(y)_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} + \sum_{(s,t)\in Sym(l)\setminus IE(G(D),w,\gamma)} \overbrace{\kappa(y)_{(s,t)}}^{=0} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} \\
= & \sum_{(s,t)\in Sym(l)} \kappa(y)_{(s,t)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_s),\gamma^{-1}(e_t)} = L_{\kappa(y)}(D,\gamma,o).
\end{aligned}$$

□

Für die Abbildungen G_G und G_H lässt sich ein zu Satz 2.34 auf Seite 51 analoges Resultat in Satz 2.46 auf Seite 59 herleiten. Dazu werden in 2.42 zunächst Abbildungen $\Psi^{\bullet}_{\bullet}$ und $(\Psi,\psi)^{\bullet}_{\bullet}$ definiert, die sich in Satz 2.44 und 2.45 als Einschränkungen von Ψ_* und $(\Psi,\psi)_*$ herausstellen.

Definition 2.42 *Zu den Daten aus der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 definiert man Homomorphismen*

$$\Psi^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)} : M^{tr}\left(IE(G,w_G,\gamma_G),\mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(IE(H,w_H,\gamma_H),\mathbb{G}\right),$$

$$(\Psi,\psi)^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)} : M^{tr}\left(IV(G,w_G,\gamma_G),\mathbb{G}\right) \to M^{tr}\left(IV(H,w_H,\gamma_H),\mathbb{G}\right)$$

durch

$$\left[\Psi^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)}(x)\right]_{(p,q)} := \begin{cases} 0 & : \ p \notin Bild(\Psi) \ \vee \ q \notin Bild(\Psi) \\ \displaystyle\sum_{(n,m)\in N_{(p,q)}\cap IE(G,w_G,\gamma_G)} x_{(n,m)} & : \ p,q \in Bild(\Psi) \end{cases}$$

bzw.

$$\left[(\Psi,\psi)^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)}(x)\right]_{(s,i)} := \begin{cases} 0 & : \ s \notin Bild(\Psi) \ \vee \ i \notin Bild(\psi) \\ \displaystyle\sum_{(t,j)\in M_{(s,i)}\cap IV(G,w_G,\gamma_G)} x_{(t,j)} & : \ s \in Bild(\Psi) \ \wedge \ i \in Bild(\psi) \end{cases}.$$

□

Die Abbildungen der obigen Definition werden in diesem Kapitel nun durch $\Psi^H_G := \Psi^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)}$ und $(\Psi,\psi)^H_G := (\Psi,\psi)^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)}$ abgekürzt.

Lemma 2.43 *Für die Mengen $IE(\cdot)$ und $IV(\cdot)$ aus Definition 2.37 gelten folgende Aussagen:*

1. $(\Psi(s), \psi(i)) \in IV(H, w_H, \gamma_H) \Rightarrow (s, i) \in IV(G, w_G, \gamma_G)$.

2. $\rho(\Psi(p), \Psi(q)) \in IE(H, w_H, \gamma_H) \Rightarrow \rho(p, q) \in IE(G, w_G, \gamma_G)$.

3. *Sind* ϕ, Φ *injektiv und* $\gamma_H^{-1}(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$, *so gilt* $\Leftarrow$ *in 1. und 2.*

4. *Sind* $(\phi, \Phi), (w_G, \gamma_G), (w_H, \gamma_H)$ *Homomorphismen* ϕ, Φ *injektiv und* γ_G *surjektiv, so gilt* $\Leftarrow$ *in 1. und 2.*

Beweis **Zu 1. :** $(s, i) \notin IV(G) \Leftrightarrow s \in ad(i, G, w_G, \gamma_G) \underbrace{\overset{2.5.1.}{\Longrightarrow}}_{(*)} \Psi(s) \in ad(\psi(i), H, w_H, \gamma_H) \Leftrightarrow (\Psi(s), \psi(i)) \notin IV(H)$.

Zu 2. : $\rho(p, q) \notin IE(G) \Leftrightarrow \rho(p, q) \in N_\cup(G) \underbrace{\overset{2.5.1.}{\Longrightarrow}}_{(**)} \rho(\Psi(p), \Psi(q)) \in N_\cup(H) \Leftrightarrow \rho(\Psi(p), \Psi(q)) \notin IE(H)$.

Zu 3. : Lemma 2.9 auf Seite 30 liefert $\Leftarrow$ in $(**)$. Bei $(*)$ gilt: $\Psi(s) \in ad(\psi(i), H, w_H, \gamma_H) \overset{2.5.2.}{\Longrightarrow} \exists x \in ad(i, G, w_G, \gamma_G) : \Psi(x) = \Psi(s) \Rightarrow x = s \Rightarrow s \in ad(i, G, w_G, \gamma_G)$.

Zu 4. : Lemma 2.10 auf Seite 31 liefert $\Leftarrow$ in $(**)$. Die Rückrichtung in $(*)$ erhält man wie in 3. aus Lemma 2.5.3. □

Satz 2.44 *Es seien* Ψ, ψ *injektiv und* $\gamma_H^{-1}(Bild(\Phi)) \subset Bild(F)$. *Dann kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
M^{tr}(IV(G), \mathbb{G}) \arrow[r, "(\Psi,\psi)_G^H"] \arrow[d, "j_G"'] & M^{tr}(IV(H), \mathbb{G}) \arrow[d, "j_H"] \\
M^{tr}(N_{l_G \times k_G} \cup N_\cup(G), \mathbb{G}) \arrow[r, "(\Psi,\psi)_*"'] & M^{tr}(N_{l_H \times k_H} \cup N_\cup(H), \mathbb{G})
\end{tikzcd}.$$

Beweis **1. Fall :** $(p, q) \in IV(H), \Psi(r) = p, \psi(s) = q$.

$$\begin{aligned}
\left[j_H(\Psi, \psi)_G^H(y)\right]_{(p,q)} &= (\Psi, \psi)_G^H(y)_{(p,q)} = \sum_{(t,j) \in M_{(p,q)} \cap IV(G)} y_{(t,j)} \\
&\overset{\Psi, \psi \text{ injektiv}}{=} y_{(r,s)} \overset{2.43}{=} j_G(y)_{(r,s)} = [(\Psi, \psi)_* j_G(y)]_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

2. Fall : $(p, q) \in N_{l_H \times k_H} \backslash IV(H), \Psi(r) = p, \psi(s) = q$. Definitionsgemäß gilt $\left[j_H(\Psi, \psi)_G^H(y)\right]_{(p,q)} = 0$ und wegen Lemma 2.43 gilt $j_G(y)_{(r,s)} = 0$.

3. Fall : $(p, q) \in N_{l_H \times k_H}, p \notin \text{Bild}(\Psi)$ oder $q \notin \text{Bild}(\psi)$. Nach Definiton von $(\Psi, \psi)_G^H$ und $(\Psi, \psi)_*$ sind in obiger Rechnung beide Seiten der Gleichung Null.

4. Fall : $(p,q) \in N_{\cup}(H), \Psi(r) = p, \Psi(s) = q$. Nach Lemma 2.9 auf Seite 30 gilt $\rho(r,s) \in N_{\cup}(G)$, also

$$\left[j_H \left(\Psi,\psi\right)_G^H (y)\right]_{(p,q)} = 0 = j_G(y)_{(r,s)} = \left[(\Psi,\psi)_* j_G(y)\right]_{(p,q)} .$$

5. Fall : $(p,q) \in N_{\cup}(H), p \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$ oder $q \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$. Definitionsgemäß sind beide Seiten gleich Null. □

Satz 2.45 *Es seien Ψ, ψ injektiv und $\gamma_H^{-1}\left(Bild(\Phi)\right) \subset Bild(F)$. Dann kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} M^{tr}\left(IE(H),\mathbb{G}\right) \arrow[d, "i_H"'] & M^{tr}\left(IE(G),\mathbb{G}\right) \arrow[l, "\Psi_G^H"'] \arrow[d, "i_G"] \\ M^{tr}\left(Sym(l_H),\mathbb{G}\right) & M^{tr}\left(Sym(l_G),\mathbb{G}\right) \arrow[l, "\Psi_*"] \end{tikzcd} .$$

Beweis **1. Fall :** $(p,q) \in IE(H), \Psi(r) = p, \Psi(s) = q$.

$$\begin{aligned} \left[i_H \Psi_G^H(y)\right]_{(p,q)} &= \Psi_G^H(y)_{(p,q)} = \sum_{(m,n)\in N_{(p,q)}\cap IE(G)} y_{(m,n)} \\ &\overset{2.43}{=} y_{\rho(r,s)} = i_G(y)_{\rho(r,s)} = \left[\Psi_* i_G(y)\right]_{(p,q)} . \end{aligned}$$

2. Fall : $(p,q) \notin IE(H), \Psi(r) = p, \Psi(s) = q$. Definitionsgemäß gilt $\left[i_H \Psi_G^H(y)\right]_{(p,q)} = 0$ und aus Lemma 2.43 folgt $i_G(y)_{\rho(r,s)} = 0$.

3. Fall : $(p,q) \notin IE(H), p \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$ oder $q \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$. Wie im zweiten Fall gilt $\left[i_H \Psi_G^H(y)\right]_{(p,q)} = 0$ und nach Definition von Ψ_* gilt $\left[\Psi_* i_G(y)\right]_{(p,q)} = 0$.

4. Fall : $(p,q) \in IE(H), p \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$ oder $q \notin \mathrm{Bild}\,(\Psi)$. Hier gilt $\Psi_G^H(y)_{(p,q)} = 0$ und $\left[\Psi_* i_G(y)\right]_{(p,q)} = 0$. □

Satz 2.46 *Es seien Ψ, ψ injektiv, $w_H, w_G, \gamma_H, \gamma_G$ surjektiv und $\gamma_H^{-1}\left(Bild(\Phi)\right) \subset Bild(F)$ (also ist F surjektiv). Dann kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} M^{tr}\left(IE(H),\mathbb{G}\right) \arrow[r, "G_H"] & M^{tr}\left(IV(H),\mathbb{G}\right) \\ M^{tr}\left(IE(G),\mathbb{G}\right) \arrow[u, "\Psi_G^H"] \arrow[r, "G_G"'] & M^{tr}\left(IV(G),\mathbb{G}\right) \arrow[u, "(\Psi,\psi)_G^H"'] \end{tikzcd} .$$

Beweis Sei $(s,i) \in IV(H)$. Zunächst gilt für $\Psi(t) = s$ die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \exists n \in \{1,\ldots,l_G\} : \rho(t,n) \in IE(G) &\overset{2.43}{\Leftrightarrow} \exists n \in \{1,\ldots,l_G\} : \rho\left(\Psi(t),\Psi(n)\right) \in IE(H) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in \mathrm{Bild}\,(\Psi) : \rho(s,z) \in IE(H). \end{aligned}$$

1. Fall : $\Psi(t) = s, \psi(j) = i, \exists n \in \{1, \ldots, l_G\} : \rho(t,n) \in IE(G)$.

$$
\begin{aligned}
\left[(\Psi,\psi)_G^H\, G_G(x)\right]_{(s,i)} &= \sum_{(m,n)\in M_{(s,i)}\cap IV(G)} G_G(x)_{(m,n)} \stackrel{2.43}{=} G_G(x)_{(t,j)} && (2.34)\\
&= \sum_{(m,n)\in IE(G)} \mathcal{M}(G)_{(t,j),(m,n)} \cdot x_{(m,n)} = \sum_{(m,n)\in IE(G)} A(G)_{(t,j),(m,n)} \cdot x_{(m,n)}\\
&= \sum_{\rho(t,n)\in IE(G)} IO(G)_{j,n} \cdot x_{\rho(t,n)} && (2.35)\\
&\stackrel{2.11}{=} \sum_{\rho(t,n)\in IE(G)} IO(H)_{\psi(j),\Psi(n)} \cdot x_{\rho(t,n)}\\
&\stackrel{2.43}{=} \sum_{\rho(s,\Psi(n))\in IE(H)} IO(H)_{i,\Psi(n)} \cdot x_{\rho(\Psi^{-1}(s),n)}\\
&\stackrel{z:=\Psi(n)}{=} \sum_{z\in \text{Bild }\Psi\,:\,\rho(z,s)\in IE(H)} IO(H)_{i,z} \cdot x_{\rho(\Psi^{-1}(s),\Psi^{-1}(z))} && (2.36)\\
&\stackrel{2.43}{=} \sum_{z\in \text{Bild }\Psi\,:\,\rho(z,s)\in IE(H)} A(H)_{(s,i),\rho(s,z)} \cdot \Psi_G^H(x)_{\rho(s,z)} && (2.37)\\
&= \sum_{\rho(s,z)\in IE(H)} \mathcal{M}(H)_{(s,i),\rho(s,z)} \cdot \Psi_G^H(x)_{\rho(s,z)}\\
&= \left[\mathcal{M}(H)\cdot \Psi_G^H(x)\right]_{(s,i)} = \left[G_H \Psi_G^H(x)\right]_{(s,i)}.
\end{aligned}
$$

2. Fall : $s \notin \text{Bild}\,(\Psi)$. Nach Definition gelten $\left[(\Psi,\psi)_G^H\, G_G(x)\right]_{(s,i)} = 0$ in (2.34) und $\Psi_G^H(x)_{\rho(s,z)} = 0$ in (2.37).

3. Fall : $i \notin \text{Bild}\,(\psi)$. Nach Definition gelten $\left[(\Psi,\psi)_G^H\, G_G(x)\right]_{(s,i)} = 0$ in (2.34) und $IO(H)_{i,z} = 0$ in (2.36) nach Lemma 2.6 auf Seite 30 und Hilfssatz 2.16 auf Seite 37.

4. Fall : $\forall n \in \{1, \ldots, l_G\} : \rho(t,n) \notin IE(G)$. Nach der einleitenden Äquivalenzumformung sind die Terme in (2.35) und (2.37) gleich Null. □

Bemerkung Die Sätze 2.34 auf Seite 51, 2.35 auf Seite 52, 2.44 auf Seite 58, 2.45 auf Seite 59 und 2.46 auf Seite 59 bleiben gültig, wenn man die dort jeweils auftretende Voraussetzung a) aus Definition 2.33 auf Seite 50 durch die Voraussetzung b) aus 2.33 ersetzt. In den Beweisen benutzt man die Lemmata 2.5.3. auf Seite 29, 2.7 auf Seite 30 und 2.10 auf Seite 31.

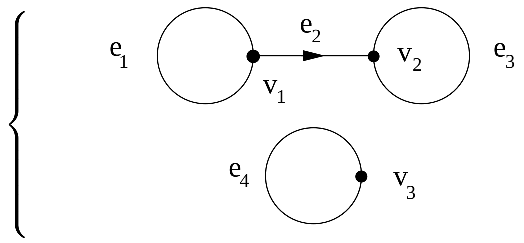
Bemerkung Insgesamt ist in 2.5 und 2.6 die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachgewiesen worden:

$$
\begin{tikzcd}
M^{tr}\left(IE(H),\mathbb{G}\right) \arrow[rrr, "i_H"] \arrow[dddd, "G_H"'] & & & M^{tr}\left(Sym(l_H),\mathbb{G}\right) \arrow[dddd, "f_H"] \\
 & \text{Kern } G_G \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2.39"] \arrow[ur, phantom, "2.45"] & \text{Kern } f_G \arrow[d] & \\
\arrow[r, phantom, "2.46"] & M^{tr}\left(IE(G),\mathbb{G}\right) \arrow[r, "i_G"] \arrow[d, "G_G"] \arrow[uul, "\Psi_G^H"] \arrow[dr, phantom, "2.38"] & M^{tr}\left(Sym(l_G),\mathbb{G}\right) \arrow[d, "f_G"] \arrow[uur, "\Psi_*"'] \arrow[r, phantom, "2.34"] & \\
 & M^{tr}\left(IV(G),\mathbb{G}\right) \arrow[r, "j_G"] \arrow[dl, "(\Psi,\psi)_G^H"] \arrow[dr, phantom, "2.44"] & M^{tr}\left(N_{l_G\times k_G}\cup N_{\cup}(G),\mathbb{G}\right) \arrow[dr, "(\Psi,\psi)_*"'] & \\
M^{tr}\left(IV(H),\mathbb{G}\right) \arrow[rrr, "j_H"] & & & M^{tr}(N_{l_H\times k_H}\cup N_{\cup}(H),\mathbb{G})
\end{tikzcd}
$$

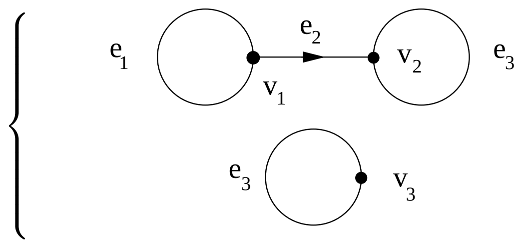
2.7 Beispiele zu Kapitel 2

Wie folgt seien mit Ecken- und Kantennummerierungen versehene orientierte Graphen (H, w_H, γ_H), (H, w'_H, γ'_H) und (G, w_G, γ_G) gegeben.

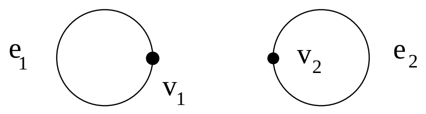
$(H, w_H, \gamma_H) \quad :=$



$\left(H, w'_H, \gamma'_H\right) \quad :=$



$(G, w_G, \gamma_G) \quad :=$



Da (w_H, γ_H) und (w_G, γ_G) Homomorphismen sind, berechnet man vermöge der Inzidenzmatrizen:

$\mathcal{M}(H, w_H, \gamma_H) =$

	(1,3)	(1,4)	(2,4)	(3,4)
(1,2)	−0	0	0	0
(1,3)	0	−0	0	0
(2,3)	0	0	−0	0
(3,1)	−0	0	0	0
(3,3)	0	0	0	−0
(4,1)	0	−0	1	0
(4,2)	0	0	−1	0

sowie

$\mathcal{M}(G, w_G, \gamma_G) =$

	(1,2)
(1,2)	−0
(2,1)	−0

.

Die In-Out-Matrix zu (H, w'_H, γ'_H) liefert

$\mathcal{M}\left(H, w'_H, \gamma'_H\right) =$

	(1,3)
(1,2)	0
(2,3)	0
(3,1)	0

.

Dabei sind in der linken Spalte und der obersten Zeile die entsprechenden Indexmengen mitnotiert worden. Aus diesen Matrizen lassen sich abelsche Gruppen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Kern}\left(G_{(H,w_H,\gamma_H)}\right) = \left\{(y_{(1,3)}, y_{(1,4)}, 0, y_{(3,4)} \,|\, y_{(1,3)}, y_{(1,4)}, y_{(3,4)} \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\\
&\mathrm{Kern}\left(G_{\left(H,w'_H,\gamma'_H\right)}\right) = \left\{y_{(1,3)} \,|\, y_{(1,3)} \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z},\\
&\mathrm{Kern}\left(G_{(G,w_G,\gamma_G)}\right) = \left\{y_{(1,2)} \,|\, y_{(1,2)} \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

ablesen. Mit $0_{(s,\,t)}$ ist hier gemeint, dass eine Null an der Position (s, t) bezüglich der Indexmenge steht.

Gegeben sei nun ein injektiver Homomorphismus $(f, F) : G \to H$ und die kommutativen Diagramme (2.1) auf Seite 27. Dabei soll $\Phi(e_1) := e_3$, $\Phi(e_2) := e_4$ also $\Psi(1) = 3$, $\Psi(2) = 4$, sowie $\phi(v_1) := v_2$, $\phi(v_2) := v_3$ also $\psi(1) = 2$, $\psi(2) = 3$ gelten. Dann berechnet sich die Abbildung

$$\Psi^{(H,w_H,\gamma_H)}_{(G,w_G,\gamma_G)} : \mathrm{Kern}\left(G_{(G,w_G,\gamma_G)}\right) \to \mathrm{Kern}\left(G_{(H,w_H,\gamma_H)}\right)$$

zu $\Psi_G^H\left(y_{(1,2)}\right) = \left(0_{(1,3)}, 0_{(1,4)}, 0_{(2,4)}, y_{(1,2)}\right)$. Also gilt $\text{Bild}\left(\Psi_G^H\right) = \{(0,0,0,n)\,|\,n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Definiert man darüber hinaus injektive Abbildungen $\Psi(1x,2y) : \{1,2\} \to \{1,2,3,4\}$ durch $\Psi(1x,2y)(1) := x$ und $\Psi(1x,2y)(2) := y$, folgt offenbar

$$\text{Kern}\left(G_{(H,w_H,\gamma_H)}\right) = \text{Bild}\left(\Psi(13,24)_G^H\right) \oplus \text{Bild}\left(\Psi(11,23)_G^H\right) \oplus \text{Bild}\left(\Psi(11,24)_G^H\right).$$

Nun seien wie in (2.30) auf Seite 41 kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} & E_H \arrow[dl, "\gamma_H"'] \arrow[dr, "\gamma'_H"] & \\ \mathcal{E}_4 \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathcal{E}_3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V_H \arrow[dl, "w_H"'] \arrow[dr, "w'_H"] & \\ \mathcal{V}_3 \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{V}_3 \end{tikzcd}$$

vorgelegt. Dabei gelte $\Phi(e_i) := e_i$ für $i \in \{1,2,3\}$, $\Phi(e_4) := e_3$ und $\phi(v_i) := v_i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \text{Kern}\left(G_{\left(H,w'_H,\gamma'_H\right)}\right) \arrow[r, "\widetilde{\Psi}^*"] \arrow[d, "\kappa_1"', "\cong"] & \text{Kern}\left(G_{(H,w_H,\gamma_H)}\right) \arrow[d, "\kappa_2"', "\cong"] \\ \text{Kern}\left(f_{\left(H,w'_H,\gamma'_H\right)}\right) \arrow[r, "\Psi^*"] & \text{Kern}\left(f_{(H,w_H,\gamma_H)}\right) \end{tikzcd}$$

werden die Abbildungen κ_1, κ_2 und Ψ^* berechnet:

$$\kappa_1\left(y_{(1,3)}\right) = \left(0_{(1,1)}, 0_{(1,2)}, y_{(1,3)}, 0_{(2,2)}, 0_{(2,3)}, 0_{(3,3)}\right),$$

$$\begin{aligned} \Psi^*\left(0,0,y_{(1,3)},0,0,0\right) &= \left(0_{(1,1)}, 0_{(1,2)}, y_{(1,3)}, y_{(1,3)}, 0_{(2,2)}, 0_{(2,3)}, 0_{(2,4)}, 0_{(3,3)}, 0_{(3,4)}, 0_{(4,4)}\right) \\ &= \kappa_2\left(y_{(1,3)}, y_{(1,3)}, 0_{(2,4)}, 0_{(3,4)}\right). \end{aligned}$$

So erhält man $\widetilde{\Psi}^* = \kappa_2^{-1} \circ \Psi^* \circ \kappa_1$. Insgesamt lassen sich die Abbildungen auch als

$$\widetilde{\Psi}^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad , \quad n \mapsto (n,n,0) \quad \text{und}$$

$$\Psi_{(G,w_G,\gamma_G)}^{(H,w_H,\gamma_H)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad , \quad n \mapsto (0,0,n)$$

schreiben. $\square$

Kapitel 3

Die Wu-Invariante

In diesem Kapitel wird die Darstellung der Verschlingungsinvarianten aus Abschnitt 2.6 mit den Ergebnissen aus [23] zusammengeführt. Dies geschieht in 3.2 auf Seite 68. Dort werden die folgenden Begrifflichkeiten und Aussagen über Dualräume benötigt.

3.1 Dualräume

In diesem Abschnitt sei $\mathbb{G}$ ein Körper oder $(\mathbb{G},+) = (\mathbb{Z},+)$ und V eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe oder ein $\mathbb{G}$-Vektorraum mit Basis $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Für den Dualraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(V,\mathbb{G}) =: V^*$ gibt es eine duale Basis $\{v_1^*,\ldots,v_n^*\}$, für die $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol) mit $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt, siehe [21], 13.1.7. Der zugehörige Isomorphismus wird mit $\delta_V : V \to V^*$, $v_i \mapsto v_i^*$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ bezeichnet. Darüber hinaus sei

$$\phi_V : V \xrightarrow{\cong} M^{tr}\left(\{1,\ldots,n\},\mathbb{G}\right), \quad v_i \mapsto e_i, \quad i \in \{1,\ldots,n\}$$

das Koordinatensystem zur vorgelegten Basis, falls V torsionsfrei ist. Der zu einem Homomorphismus $f : V \to W$ gehörige duale Homomorphismus wird mit $f^* : W^* \to V^*$, $f^*(\psi) := \psi \circ f$ notiert. Außerdem seien $V^{**} := (V^*)^*$ und $f^{**} := (f^*)^*$.

Satz 3.1 *Die Abbildung $\Phi_V : V \to V^{**}$ definiert durch $\Phi_V(v)(f) := f(v)$, $v \in V$, $f \in V^*$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis $\quad$ **Φ_V Homomorphismus :** Für $v,w \in V$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{G}$ gilt

$$\Phi_V(\lambda v + \mu w)(f) = f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w) = \lambda\Phi_V(v)(f) + \mu\Phi_V(w)(f).$$

Φ_V injektiv : Vorgelegt sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \neq 0$. Dann gibt es einen Index $s \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_s \neq 0$. Definiere $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(V, \mathbb{G})$ durch

$$f(v_i) := \begin{cases} 1 & : \quad i = s \\ 0 & : \quad i \neq s \end{cases}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dann gilt $\Phi_V(v)(f) = f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) = \lambda_s \neq 0$. Also ist $\Phi_V(v) \neq 0$.

Φ_V surjektiv : Die duale Basis von V^{**} sei $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ mit $w_i := v_i^*$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vorgelegt sei nun ein Element $f = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i^* \in V^{**}$. Definiere $v := \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \in V$. Dann gilt $\Phi_V(v) = f$, denn für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ berechnet man:

$$f(w_j) = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i w_i^* \right) (w_j) = \mu_j = v_j^* \left(\sum_{i=1}^n \mu_i v_i \right) = w_j\,(v) = \Phi_V(v)(w_j).$$

□

Satz 3.2 *Es seien V, W endlich erzeugte freie abelsche Gruppen oder $\mathbb{G}$-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. In dem Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[r, "\pi_W"] \arrow[d, "\Phi_W"'] & W/\mathit{Bild}\, f \arrow[d, "\Phi'_W"'] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \arrow[r, "\pi_{W^{**}}"] & W^{**}/\mathit{Bild}\, f^{**} \end{tikzcd}$$

seien $\pi_W, \pi_{W^{**}}$ Projektionen und $\Phi'_W\,(w + \mathit{Bild}\, f) := \Phi_W(w) + \mathit{Bild}\, f^{**}$ für $w \in W$. Dann kommutiert das Diagramm und Φ'_W ist bijektiv.

Beweis Zunächst kommutiert das linke Diagramm, denn für $g \in W^*$ gilt

$$(\Phi_W(f(v)))\,(g) = g\,(f(v)) = f^*(g)(v) = \Phi_V(v)\,(f^*(g)) = f^{**}\,(\Phi_V(v))\,(g).$$

Da Φ_W und Φ_V nach Satz 3.1 Isomorphismen sind, lässt sich leicht nachprüfen, dass Φ'_W wohldefiniert ist. Die Bijektivität ergibt sich aus dem 5er-Lemma der algebraischen Topologie. □

Satz 3.3 *Es seien V, W endlich erzeugte freie und torsionsfreie abelsche Gruppen oder $\mathbb{G}$-Vektorräume mit Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Die Diagramme*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_V"'] & W \arrow[d, "\phi_W"'] \\ M^{tr}(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{G}) \arrow[r, "f'"] & M^{tr}(\{1, \ldots, m\}, \mathbb{G}) \end{tikzcd} ,$$

$$\begin{tikzcd}
W^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\phi_{W^*}"'] & V^* \arrow[d, "\phi_{V^*}"] \\
M^{tr}(\{1,\ldots,m\},\mathbb{G}) \arrow[r, "(f^*)'"] & M^{tr}(\{1,\ldots,n\},\mathbb{G})
\end{tikzcd}$$

seien kommutativ, und der Homomorphismus f sei gegeben durch $f(v_i) := \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}w_j$. Für die Matrix $A := (a_{j,i}) \in M_{m\times n}(\mathbb{G})$ gelten

1. $f'(x) = A \cdot x$
2. $(f^*)'(x) = A^{tr} \cdot x$.

Beweis **Zu 1.:** Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt

$$f'(e_i) = \phi_W f \phi_V^{-1}(e_i) = \phi_W f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}\phi_W(w_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}e_j = A \cdot e_i.$$

Zu 2.: Zunächst gilt

$$f^*(w_j^*) = \sum_{x=1}^{n} a_{j,x}v_x^* \tag{3.1}$$

für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$, denn für $i \in \{1,\ldots,n\}$ berechnet man

$$f^*(w_j^*)(v_i) = \left(w_j^* \circ f\right)(v_i) = w_j^*\left(\sum_{x=1}^{m} a_{x,i}w_x\right) = a_{j,i} = \left(\sum_{x=1}^{n} a_{j,x}v_x^*\right)(v_i).$$

Daraus folgt

$$(f^*)'(e_j) = \phi_{V^*}f^*\phi_{W^*}^{-1}(e_j) = \phi_{V^*}f^*(w_j^*) \overset{(3.1)}{=} \sum_{x=1}^{n} a_{j,x}e_x = A^{tr} \cdot e_j$$

für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$. □

Nach [18], Satz 61.9 sind Untergruppen von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen wieder frei. Daher lässt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 3.4 *Es seien V, W endlich erzeugte freie abelsche Gruppen oder $\mathbb{G}$-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Weiterhin seien $\{u_1,\ldots,u_r\}$ und $\{b_1,\ldots,b_k\}$ Basen von Kern f bzw. Bild f mit $f(a_i) = b_i$ für $i \in \{1,\ldots,k\}$ sowie $(\text{Kern} f)^0 := \{\psi \in V^* \mid \psi(x) = 0$ für alle $x \in \text{Kern} f\}$. Dann gelten:*

1. *$\{u_1,\ldots,u_r,a_1,\ldots,a_k\}$ ist eine $\mathbb{G}$-Basis von V.*
2. *$\{a_1^*,\ldots,a_k^*\}$ ist eine $\mathbb{G}$-Basis von $(\text{Kern} f)^0$.*
3. *Die Abbildung $p_f : (\text{Kern} f)^* \to V^*/(\text{Kern} f)^0,\ u_i^* \mapsto u_i^* + (\text{Kern} f)^0,\ i \in \{1,\ldots,r\}$ ist ein Isomorphismus.*

4. $W/_{\mathit{Bild}\, f}$ *torsionsfrei* $\Longrightarrow$ $(\mathit{Kern}\, f)^0 = \mathit{Bild}\, f^*$.

Beweis **Zu 1.:** Sei $v \in V$ und $f(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$. Definiert man $v' := \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$, so gilt: $f(v) = f(v') \Rightarrow 0 = f(v - v') \Rightarrow \exists \mu_i : v - v' = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i \Rightarrow v = v' + \sum_{i=1}^r \mu_i u_i$. Also ist $\{u_1, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_k\}$ ein Erzeugendensystem von V. Letztere Menge ist linear unabhängig, denn : $\sum_{i=1}^r \mu_i u_i + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \Rightarrow \forall i : \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \mu_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i : \mu_i = 0$.

Zu 2.: Offenbar sind $a_1^*, \ldots, a_k^*$ linear unabhängig. Es gilt $\langle a_1^*, \ldots, a_k^* \rangle_{\mathbb{G}} = (\mathrm{Kern}\, f)^0$:

$\subset$: $\forall i, j : u_j \neq a_i \Rightarrow \forall i, j : a_i^*(u_j) = 0$.

$\supset$: $\phi = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i^* + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i^* \in (\mathrm{Kern}\, f)^0 \Rightarrow \forall i : 0 = \phi(u_i) = \mu_i \Rightarrow \phi = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i^*$.

Zu 3.: $\boldsymbol{p_f}$ **injektiv :** Sei $u = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i^* \in (\mathrm{Kern}\, f)^*$ mit $p_f(u) = 0$. Daraus folgt $u \in (\mathrm{Kern}\, f)^0$ also gilt $\mu_j = u(u_j) = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$. Also ist $u = 0$.

$\boldsymbol{p_f}$ **surjektiv :** Sei $v + (\mathrm{Kern}\, f)^0 \in V^*/_{(\mathrm{Kern}\, f)^0}$ und $v = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i^* + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i^*$. Dann gilt $p_f\left(\sum_{i=1}^r \mu_i u_i^*\right) = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i^* + (\mathrm{Kern}\, f)^0 \overset{2.}{=} v + (\mathrm{Kern}\, f)^0$.

Zu 4.: **$\supset$:** $\phi \in \mathrm{Bild}\, f^* \Longrightarrow \exists \psi \in W^* : \phi = f^*(\psi) = \psi \circ f \Longrightarrow \forall w \in \mathrm{Kern}\, f : \phi(w) = 0 \Longrightarrow \phi \in (\mathrm{Kern}\, f)^0$.

$\subset$: Zu $\phi \in (\mathrm{Kern}\, f)^0$ soll $\psi \in W^*$ mit $f^*(\psi) = \phi$ konstruiert werden. Da $W/_{\mathrm{Bild}\, f}$ torsionsfrei ist, gibt es eine $\mathbb{G}$-Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W, so dass $\{w_1, \ldots, w_k\}$, $k \leq m$ eine $\mathbb{G}$-Basis von $\mathrm{Bild}\, f$ ist, siehe [18], Satz 61.18 und die darauffolgende Bemerkung. Wie in der ersten Aussage erhält man eine Basis $\{u_1, \ldots, u_r, a_1', \ldots, a_k'\}$ von V mit $f(a_i') = w_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ und kann daher $\psi : W \to \mathbb{G}$ definieren durch

$$\psi(w_i) := \begin{cases} \phi(a_i') & : \quad 1 \leq i \leq k \\ 0 & : \quad k+1 \leq i \leq m \end{cases} .$$

Dann gilt $f^*(\psi)(a_i') = \psi f(a_i') = \psi(w_i) = \phi(a_i')$ sowie $f^*(\psi)(u_i) = \psi(0) = 0 = \phi(u_i)$, also erhält man $f^*(\psi) = \phi$. □

Satz 3.5 *Es seien V, W endlich erzeugte freie abelsche Gruppen oder $\mathbb{G}$-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von Kern f. Wenn sowohl W als auch $V^*/_{\mathit{Bild}\, f^*}$ torsionsfrei ist, ist die Abbildung $p_f' : \mathit{Kern}\, f \to V^*/_{\mathit{Bild}\, f^*}$ gegeben durch $u_i \mapsto u_i^* + \mathit{Bild}\, f^*$ ein Isomorphismus.*

Beweis Zunächst wird nachgewiesen, dass $W/_{\mathrm{Bild}\, f}$ frei und torsionsfrei ist:

$$W/_{\mathrm{Bild}\, f} \overset{3.2}{\cong} (W^*)^*/_{\mathrm{Bild}\, (f^*)^*} \overset{\text{Vor. und 3.4.4.}}{=} W^{**}/_{(\mathrm{Kern}\, f^*)^0} \overset{3.4.3.}{\cong} (\mathrm{Kern}\, f^*)^* .$$

Da mit W auch W^* torsionsfrei ist, ist auch $\mathrm{Kern}\, f^* \subset W^*$ torsionsfrei. Also gilt dies auch für $(\mathrm{Kern}\, f^*)^*$. Nach Satz 3.4.3. und 3.4.4. erhält man $p_f' = p_f \circ \delta_{\mathrm{Kern}(f)}$. □

3.2 Der Verschlingungsmodul von Taniyama

In [23] wird zu einem eindimensionalen orientierten Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ ein Kohomologiemodul $L(\mathcal{Z}) := H^2(D_2(\mathcal{Z}), \sigma\,; \mathbb{Z})$ und zu einer Einbettung $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ die **WU-Invariante** $\mathcal{L}(f) \in L(\mathcal{Z})$ konstruiert. Dort wird der abstrakte Graph $G(\mathcal{Z})$ mit dem Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ identifiziert. Darüber hinaus sind nur einfache Graphen zugelassen (siehe [23], Seite 209, zweiter Absatz). Es stellt sich heraus, dass $\mathcal{L}$ eine schwache Homotopieinvariante topologischer Graphen ist ([23],Corollary 1.6). Schwache Homotopie von Einbettungen von Graphen ist eine von acht grundlegenden topologischen Äquivalenzrelationen eingebetteter Graphen, die in [22] definiert werden. Eine davon ist die homologische Äquivalenz, [22], §1 Definition (7). Zwei Einbettungen f und g sind genau dann homologisch äquivalent, wenn $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ gilt, [23], Main Theorem.

Es seien w eine bijektive Ecken- und γ eine bijektive Kantennummerierung von $\mathcal{Z}$. In diesem Kapitel wird $\operatorname{Kern} G_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} \cong L(\mathcal{Z})$ gezeigt (Satz 3.7 auf Seite 70). Dazu verwendet man eine kombinatorische Darstellung von $L(\mathcal{Z})$, die im zweiten Abschnitt von [23] hergeleitet wird. Dort wird implizit mit bijektiven Nummerierungen der Ecken und Kanten gearbeitet. Die verwendeten schiefsymmetrischen singulären Kettengruppen $A_1(D_2(\mathcal{Z}), \sigma)$ und $A_2(D_2(\mathcal{Z}), \sigma)$ über $\mathbb{Z}$ lassen sich wie folgt als freie Gruppen über $\mathbb{Z}$ präsentieren:

$$A_1 := A_1(D_2(\mathcal{Z}), \sigma) = \left\langle V_{(s,i)} \,|\, (s,i) \in IV(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$
$$A_2 := A_2(D_2(\mathcal{Z}), \sigma) = \langle E_{(p,q)} \,|\, (p,q) \in IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \rangle_{\mathbb{Z}}. \tag{3.2}$$

Dies liegt daran, dass zum einen $(p,q) \in IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)$ nach Definition 2.37 auf Seite 54 und Lemma 2.4 auf Seite 28 genau dann gilt, wenn es keine Ecke von $G(\mathcal{Z})$ gibt, zu der $\gamma^{-1}(e_p)$ und $\gamma^{-1}(e_q)$ beide inzident sind, und dass zum anderen $(s,i) \in IV(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)$ bedeutet, dass $w^{-1}(v_i)$ nicht inzident zu $\gamma^{-1}(e_s)$ ist. Daher sind die Erzeugnisse der Mengen $\{E_{ij} | 1 \leq i < j \leq n, e_i \cap e_j = \emptyset\}$ und $\{V_{si} | 1 \leq s \leq n, 1 \leq i \leq m, v_i \notin e_s\}$ aus [23], Seite 211 unten, gleich A_2 bzw. A_1. Für die entsprechenden dualen $\mathbb{Z}$-Moduln erhält man in [23] die Darstellungen

$$A^1 := A^1(D_2(\mathcal{Z}), \sigma) = \langle V^{(s,i)} \,|\, (s,i) \in IV(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \rangle_{\mathbb{Z}} \quad \text{und}$$
$$A^2 := A^2(D_2(\mathcal{Z}), \sigma) = \langle E^{(p,q)} \,|\, (p,q) \in IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Es wird nun das Diagramm (3.3) auf Seite 69 betrachtet, in dem $\delta^1 = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(d_1, id)$ der Korandoperator und $d_1 : A_2 \to A_1$ der Randoperator aus [23] ist. Die weiteren Abbildungen sind definiert durch $\theta_1\left(V^{(s,i)}\right) := e_{(s,i)}$, $\theta_2\left(E^{(p,q)}\right) := e_{(p,q)}$, $\pi_0(x) := x + \operatorname{Bild} \delta^1$,

$\pi_1(x) := x + \mathrm{Bild}\left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)'$ und $\Theta(\pi_0(x)) := \pi_1(\theta_2(x))$. Benutzt man in Satz 3.3 auf Seite 65 die hier auftretenden Indexmengen $IE(\cdot)$ und $IV(\cdot)$, ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M^{tr}\left(IV\left(G(\mathcal{Z}),w,\gamma\right),\mathbb{Z}\right)^* \arrow[r, "G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}"] \arrow[d, "\phi_{M^{tr}(IV(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z})^*}"'] & M^{tr}\left(IE\left(G(\mathcal{Z}),w,\gamma\right),\mathbb{Z}\right)^* \arrow[d, "\phi_{M^{tr}(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z})^*}"] \\
M^{tr}\left(IV\left(G(\mathcal{Z}),w,\gamma\right),\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "\left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)'"] & M^{tr}\left(IE\left(G(\mathcal{Z}),w,\gamma\right),\mathbb{Z}\right)
\end{tikzcd}$$

mit $\phi_{M^{tr}(IV(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z})^*}\left(v^*_{(s,i)}\right) = v_{(s,i)}$ und $\phi_{M^{tr}(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z})^*}\left(e^*_{(p,q)}\right) = e_{(p,q)}$. Dabei gilt $\left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)'(x) = \mathcal{M}(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)^{tr} \cdot x$ gemäß Satz 3.3.2. Der Korandopertor berechnet sich laut [23], Seite 212, zu

$$\delta^1(V^{(s,i)}) = \sum_{\mathrm{In}(p)=i} E^{\rho(s,p)} - \sum_{\mathrm{Te}(q)=i} E^{\rho(s,q)}$$

wobei $\mathrm{In}(p) = i$ in der hier benutzten Notation $I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,p} = 1$ und $\mathrm{Te}(q) = i$ an dieser Stelle $I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,q} = -1$ bedeutet.

$$\begin{tikzcd}
A^1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\delta^1"'] & M^{tr}\left(IV(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z}\right) \arrow[d, "(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)})'"] \\
A^2 \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\pi_0"'] & M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z}\right) \arrow[d, "\pi_1"] \\
A^2/\mathrm{Bild}\,\delta^1 =: L(\mathcal{Z}) \arrow[r, "\Theta"] & M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z}\right)/\mathrm{Bild}\,(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)})' =: \mathcal{L}'
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Satz 3.6 *Das Diagramm (3.3) ist kommutativ, und Θ ist ein Isomorphismus.*

Beweis Sei $(p,q) \in IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)$ und $(s,i) \in IV(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)$. Man berechnet:

$$\left[\theta_2\delta^1\left(V^{(s,i)}\right)\right]_{(p,q)} = \left[\sum_{\mathrm{In}(x)=i} e_{\rho(s,x)} - \sum_{\mathrm{Te}(x)=i} e_{\rho(s,x)}\right]_{(p,q)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg[\sum_{\substack{\{x \mid \rho(x,s) \in IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma) \\ \wedge\, I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,x}=1\}}} e_{\rho(x,s)} - \sum_{\substack{\{x \mid \rho(x,s) \in IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma) \\ \wedge\, I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,x}=-1\}}} e_{\rho(x,s)} \Bigg]_{(p,q)} \\
&= \Bigg[\sum_{\rho(x,s)\in IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,x} \cdot e_{\rho(x,s)} \Bigg]_{(p,q)} \\
&= \left\{ \begin{array}{rcl} I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,q} & : & p=s \\ I(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{i,p} & : & q=s \\ 0 & : & s \notin \{p,q\} \end{array} \right\} \overset{1.9,\ \text{S.}14}{=} \mathcal{A}(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)_{(s,i),(p,q)} \\
&= \mathcal{M}(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)^{tr}_{(p,q),(s,i)} = \left[\mathcal{M}(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)^{tr} \cdot e_{(s,i)}\right]_{(p,q)} \\
&= \left[\left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)' \theta_1 \left(V^{(s,i)}\right)\right]_{(p,q)} .
\end{aligned}
$$

Daher kommutiert der obere Teil des Diagramms (3.3).

Θ wohldefiniert:

$$
\begin{aligned}
& x + \operatorname{Bild} \delta^1 = y + \operatorname{Bild} \delta^1 \in L(\mathcal{Z}) \\
\Rightarrow\ & x - y \in \operatorname{Bild} \delta^1 \overset{\theta_1, \theta_2 \text{ Isomorphismen}}{\Longrightarrow} \theta_2(x-y) \in \operatorname{Bild} \left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)' \\
\Rightarrow\ & \Theta\left(x + \operatorname{Bild} \delta^1\right) = \theta_2(x) + \operatorname{Bild} \left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)' = \theta_2(y) + \operatorname{Bild} \left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)' \\
& = \Theta\left(y + \operatorname{Bild} \delta^1\right).
\end{aligned}
$$

Aus dem in der algebraischen Topologie bekannten 5er-Lemma folgt, dass Θ ein Isomorphismus ist. □

Satz 3.7 *Es gilt* $\operatorname{Kern} G_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} \cong L(\mathcal{Z})$.

Beweis Aus Theorem 4.9. in [23] geht hervor, dass $L(\mathcal{Z})$ torsionsfrei ist. Daher ist $\mathcal{L}'$ nach Satz 3.6 auch torsionsfrei.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Kern} G_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} & \overset{p'_{G_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}}}{\cong} M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z}\right)^* / \operatorname{Bild} G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} && (3.4) \\
& \cong M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma),\mathbb{Z}\right) / \operatorname{Bild} \left(G^*_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}\right)' (= \mathcal{L}') && (3.5) \\
& \cong L(\mathcal{Z}). && (3.6)
\end{aligned}
$$

Aus dem unteren Diagramm in Satz 3.3 auf Seite 65 ergibt sich der Isomorphismus in (3.5). Daher ist auch der rechte Ausdruck in (3.4) torsionsfrei. Nach Satz 3.5 auf Seite 67 ist $p'_{G_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}}$ ein Isomorphismus. Der Isomorphismus in (3.6) ist die Abbildung Θ aus Satz 3.6. □

Nun wird gezeigt, dass die Invariante $L_y(D, \gamma_D, o)$ aus Definition 2.40 auf Seite 56 mit der WU-Invariante $\mathcal{L}(\Gamma)$ einer Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ über das Kroneckerprodukt

$$\kappa : H^2\left(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z}\right) \times H_2\left(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z}\right) \to \mathbb{Z}$$

zusammenhängt. Dies ist durch $\kappa\left([\phi], [x]\right) = \phi(x)$ gegeben, siehe 13.3 bzw. 13.4.6 in [21]. Nach Proposition 2.1. aus [23] lässt sich die WU-Invariante schreiben als

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \left[\sum_{(p,q)\in IE(G(D),w_D,\gamma_D)} E^{(p,q)} \cdot w^{D,o}_{\gamma_D^{-1}(e_p),\gamma_D^{-1}(e_q)}\right] \in L(\mathcal{Z})$$

wobei (w_D, γ_D) eine bijektive Nummerierung eines orientierten Diagramms (D, o) ist. Der Isomorphismus

$$\alpha : M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma), \mathbb{Z}\right) \to A_2, \quad e_{(p,q)} \mapsto E_{(p,q)}, \quad \text{(siehe (3.2))}$$

liefert im folgenden Satz Homologieklassen $[\alpha(y)] \in H_2\left(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z}\right)$.

Satz 3.8 *Es seien $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex, $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung, $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ eine reguläre Projektion und (D, o') ein orientiertes Diagramm zu $\mathcal{Z}$. Weiterhin seien (w, γ) und (w_D, γ_D) bijektive Nummerierungen von $\mathcal{Z}$ bzw. D, so dass $w_D \circ \pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0} = w$ und $\gamma_D \circ \mathcal{P}(\pi)\,|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)\,|_{\mathcal{Z}_1} = \gamma$ erfüllt sind. Für $y \in M^{tr}\left(IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma), \mathbb{Z}\right)$ gilt dann*

$$\kappa\left(\mathcal{L}(\Gamma), [\alpha(y)]\right) = L_y(D, \gamma_D, o').$$

Beweis Zunächst wird gezeigt, dass $IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = IE(G(D), w_D, \gamma_D)$ gilt:
$I(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \overset{1.9}{=} IO(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) \overset{1.10,\ S.15}{=} IO(G(D), w_D, \gamma_D) \overset{1.9}{=} I(G(D), w_D, \gamma_D) \overset{2.4,\ S.28}{\Longrightarrow}$
$\forall i : ad(i, G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = ad(i, G(D), w_D, \gamma_D) \overset{2.2,\ S.28}{\Longrightarrow} N_\cup(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = N_\cup(G(D), w_D, \gamma_D)$
$\overset{2.37,\ S.54}{\Longrightarrow} IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = IE(G(D), w_D, \gamma_D)$.

Daher kann man y schreiben als

$$y = \sum_{(p,q)\in IE(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)} y_{(p,q)} \cdot e_{(p,q)} = \sum_{(p,q)\in IE(G(D),w_D,\gamma_D)} y_{(p,q)} \cdot e_{(p,q)}$$

und berechnet

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\mathcal{L}(\Gamma), [\alpha(y)]\right) &= \left(\sum_{(p,q)\in IE(G(D),w_D,\gamma_D)} E^{(p,q)} w^{D,o'}_{\gamma_D^{-1}(e_p),\gamma_D^{-1}(e_q)}\right)\left(\sum_{(p,q)\in IE(G(D),w_D,\gamma_D)} y_{(p,q)} E_{(p,q)}\right) \\
&= \sum_{(p,q)\in IE(G(D),w_D,\gamma_D)} y_{(p,q)} \cdot w^{D,o'}_{\gamma_D^{-1}(e_p),\gamma_D^{-1}(e_q)} \overset{2.40,\ S.56}{=} L_y(D, \gamma_D, o').
\end{aligned}$$

□

Satz 3.9 *Es sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex , $f, g : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ Einbettungen, $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ eine geeignete reguläre Projektion und $(D_f, o_f), (D_g, o_g)$ orientierte Diagramme zu $\mathcal{Z}$. Darüber hinaus seien $(w, \gamma), \left(w_{D_f}, \gamma_{D_f}\right)$ und $\left(w_{D_g}, \gamma_{D_g}\right)$ bijektive Nummerierungen von $\mathcal{Z}$ bzw. D_f, D_g, so dass für $(D, \Gamma) \in \{(D_f, f), (D_g, g)\}$ die Bedingungen $w_D \circ \pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0} = w$ und $\gamma_D \circ \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1} = \gamma$ erfüllt sind. Dann gilt*

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \iff \forall y \in \mathit{Kern}\, G_{(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)} : L_y\left(D_g, \gamma_{D_g}, o_g\right) = L_y\left(D_f, \gamma_{D_f}, o_f\right).$$

Beweis

⇒: $L_y\left(D_f, \gamma_{D_f}, o_f\right) \overset{3.8}{=} \kappa\left(\mathcal{L}(f), [\alpha(y)]\right) \overset{\text{Vor.}}{=} \kappa\left(\mathcal{L}(g), [\alpha(y)]\right) \overset{3.8}{=} L_y\left(D_g, \gamma_{D_g}, o_g\right).$

⇐: Seien $\mathcal{L}(f) = [\phi_f]$ und $\mathcal{L}(g) = [\phi_g]$. Aus

$$\begin{aligned} \phi_f(\alpha(y)) &= \kappa\left(\mathcal{L}(f), [\alpha(y)]\right) = L_y\left(D_f, \gamma_{D_f}, o_f\right) \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} L_y\left(D_g, \gamma_{D_g}, o_g\right) = \kappa\left(\mathcal{L}(g), [\alpha(y)]\right) = \phi_g(\alpha(y)) \end{aligned}$$

folgt $((\phi_f - \phi_g) \circ \alpha)(y) = 0$ für alle $y \in \text{Kern}\, G_{(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)}$ nach Satz 2.21 auf Seite 40. Dann gilt: $\delta_{M^{tr}(IE(G(\mathcal{Z}), w, \gamma), \mathbb{Z})}\left(\theta_2\left(\phi_f - \phi_g\right)\right) = \alpha^*\left(\phi_f - \phi_g\right) = \left(\phi_f - \phi_g\right) \circ \alpha \in \left(\text{Kern}\, G_{(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)}\right)^0 \overset{(3.4),\, 3.5,\, 3.4.4.}{=} \text{Bild}\, G_{(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)}{}^* \implies \theta_2\left(\phi_f - \phi_g\right) \in \text{Bild}\left(G_{(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)}{}^*\right)' \implies \phi_f - \phi_g \in \text{Bild}\, \delta^1 \implies \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g).$ □

Bemerkung Die Konstruktion des Verschlingungsmoduls aus Kapitel 2 liefert also für bijektive Nummerierungen bis auf Isomorphie den von Taniyama betrachteten Kohomologiemodul. Die Konstruktion aus Kapitel 2 hängt natürlich von den Reidemeisterbewegungen I bis V ab. Im Allgemeinen ist es also möglich von einer anderen Äquivalenzrelation auf den Diagrammen auszugehen, etwa der der „steifen Ecken", die in [7], III definiert wird. Dieser Ansatz wird allerdings in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

Kapitel 4

Kontraktion einer Kante

Entfernt man eine Kante eines Graphen und „identifiziert“ die zugehörigen Ecken, so spricht man von einer Kontraktion. Für einen abstrakten Graphen bedeutet dies, dass zunächst eine Kante *und* eine Ecke entfernt werden müssen, um dann aus den jeweils um ein Element reduzierten Ecken- und Kantenmengen einen neuen Graphen zu konstruieren. Dabei verändert sich offensichtlich die Inzidenzmatrix und der Eckengrad der an der Kontraktion beteiligten Ecke. Mit dieser Thematik beschäftigen sich die folgenden beiden Abschnitte 4.1 und 4.2 auf Seite 79. In Abschnitt 4.4 wird ein Homomorphismus zwischen den zu den an der Kontraktion beteiligten Graphen gehörenden Verschlingungsmoduln konstruiert. Dieser ist ein Isomorphismus, wenn der Eckengrad der zu entfernenden Ecke Zwei ist.
Außerdem werden in 4.3 auf Seite 85 Graphenhomomorphismen „hochgehoben“ und „heruntergedrückt“ : Sei $(f, F) : G \to H$ ein Graphenhomomorphismus. Ensteht H aus L durch Kontraktion einer Kante, so wird untersucht, wie ein Homomorphismus von G nach L mittels (f, F) definiert („hochgehoben“) werden kann. Geht umgekehrt L aus einer Kontraktion von H hervor, so soll der Homomorphismus (f, F) von G nach L „heruntergedrückt“ werden. Diese Konstruktionen induzieren Homomorphismen für die Verschlingungsmoduln. Dass sie mit den zu den entsprechenden Kontraktionen induzierten Homomorphismen aus Abschnitt 4.4 verträglich sind, wird in Abschnitt 4.4.3 gezeigt.

Die Ergebnisse dieses Kapitels werden im weiteren Verlauf der Arbeit insbesondere für Kontraktionen an zweiwertigen Ecken benötigt.

4.1 Die (p,e,q)-Kontraktion

Es werden die Begriffe Kontraktion (Definition 4.1), Eckengrad (Definition 4.5) und Teilgraph (Definition 4.3) eingeführt.

Definition 4.1 *Sei $G := (V, E, g)$ ein orientierter bzw. unorientierter Graph, $e \in E$, $\nu g(e) = \{p, q\}$ bzw. $g(e) = \{p, q\}$ und $p \neq q$. Zu diesen Daten sei die Inklusion $i(p, V) : V \backslash \{p\} \to V$,*

$$\begin{array}{rccl} \psi(p,q,V): & V & \longrightarrow & V\backslash\{p\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x & : \quad x \neq p \\ q & : \quad x = p \end{cases} \end{array}$$

*und, sofern $E\backslash\{e\} \neq \emptyset$ ist, die Inklusion $j(e, E) : E\backslash\{e\} \to E$ sowie $g(p, e, q) : E\backslash\{e\} \to V\backslash\{p\} \times V\backslash\{p\}$, $x \mapsto (\psi(p, q, V) \times \psi(p, q, V)) \circ g \circ j(e, E)(x)$, bzw. $g(p, e, q) : E\backslash\{e\} \to \mathcal{P}_2(V\backslash\{p\})$, $x \mapsto \mathcal{P}_2(\psi(p, q, V)) \circ g \circ j(e, E)(x)$, gegeben. Dann nennt man den Graphen $\mathcal{C}_{p,e,q}(G) := (V\backslash\{p\}, E\backslash\{e\}, g(p, e, q))$ die (p, e, q)-**Kontraktion** von G. Für $E\backslash\{e\} = \emptyset$ setzt man $\mathcal{C}_{p,e,q}(G) := (V\backslash\{p\}, \emptyset, \emptyset)$.* □

Satz 4.2 *Die Abbildung $(\psi(q, p, V) \circ i(p, V), Id) : \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \to \mathcal{C}_{q,e,p}(G)$ ist ein Isomorphismus, sofern $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist.*

Beweis Durch Fallunterscheidung verifiziert man $\psi(q, p, V) = \psi(q, p, V)i(p, V)\psi(p, q, V)$. Damit gilt für orientierte Graphen

$$\begin{aligned} g(q,e,p)Id &= g(q,e,p) = (\psi(q,p,V) \times \psi(q,p,V))\, gj(e,E) \\ &= (\psi(q,p,V)i(p,V)\psi(p,q,V) \times \psi(q,p,V)i(p,V)\psi(p,q,V))\, gj(e,E) \\ &= (\psi(q,p,V)i(p,V) \times \psi(q,p,V)i(p,V))\, (\psi(p,q,V) \times \psi(p,q,V))\, gj(e,E) \\ &= (\psi(q,p,V)i(p,V) \times \psi(q,p,V)i(p,V))\, g(p,e,q). \end{aligned}$$

Benutzt man statt $(\psi(q, p, V) \times \psi(q, p, V))$ die Abbildung $\mathcal{P}_2(\psi(q, p, V))$, erhält man das Resultat für unorientiertes G. □

Definition 4.3 *Es seien $G = (V_G, E_G, g_G)$ und $H := (V_H, E_H, g_H)$ Graphen. Der Graph H heißt* **Teilgraph** *von G, wenn $H = \emptyset$ ist oder $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$ gilt, und es einen injektiven Homomorphismus $(f, F) : H \to G$ gibt. Man notiert $H < G$. Für alle $x \in E_G \cap E_H$ gelte nun $g_G(x) = g_H(x)$. Für $X \in \{G \cap H, G \cup H\}$ definiert man Graphen $X := (V_X, E_X, g_X)$ wie folgt:*

1. $G \cup H$: $E_{G\cup H} := E_G \cup E_H$, $V_{G\cup H} := V_G \cup V_H$,

$$g_{G\cup H}(x) := \begin{cases} g_H(x) & : \quad x \in E_H \\ g_G(x) & : \quad x \in E_G \end{cases} .$$

2. $G \cap H$: *Sofern* $V_{G\cap H} \neq \emptyset$ *ist, seien* $E_{G\cap H} := E_G \cap E_H$, $V_{G\cap H} := V_G \cap V_H$, $g_{G\cap H}(x) := g_H(x) = g_G(x)$. *Ansonsten ist* $G \cap H := \emptyset$.

□

Korollar 4.4 *Es seien* G, H, L *Graphen.*

1. *Sofern die folgenden Graphen jeweils gemäß Definiton 4.3 gegeben sind gelten:* $G \cap H < H$, $G \cap H < G$, $G \cap H < G \cup H$, $G < G \cup H$ *sowie* $H < G \cup H$.

2. *Genau dann ist* $G \cap H$ *definiert, wenn* $H \cap G$ *es ist. Dann gilt* $G \cap H = H \cap G$.

3. *Genau dann ist* $G \cup H$ *definiert, wenn* $H \cup G$ *es ist. Dann gilt* $G \cup H = H \cup G$.

4. *Genau dann ist* $(G \cup H) \cup L$ *definiert, wenn* $G \cup (H \cup L)$ *es ist. Dann gilt* $(G \cup H) \cup L = G \cup (H \cup L)$.

5. *Genau dann ist* $G \cap (H \cup L)$ *definiert, wenn* $G \cap H$ *und* $G \cap L$ *es sind. Dann gilt* $G \cap (H \cup L) = (G \cap H) \cup (G \cap L)$.

Beweis Die ersten drei Aussagen ergeben sich unmittelbar aus Definition 4.3. Die vierte Behauptung ergibt sich aus den folgenden Äquivalenzen: $(G \cup H) \cup L$ definiert $\Leftrightarrow \forall x \in E_H \cap E_G : g_H(x) = g_G(x)$ und $\forall x \in (E_G \cup E_H) \cap E_L : g_{G\cup H}(x) = g_L(x) \Leftrightarrow \forall x \in E_H \cap E_G : g_H(x) = g_G(x)$ und $\forall x \in E_H \cap E_L : g_H(x) = g_L(x)$ und $\forall x \in E_G \cap E_L : g_G(x) = g_L(x)$ $\Leftrightarrow \forall x \in E_G \cap (E_H \cup E_L) : g_G(x) = g_{H\cup L}(x)$ und $\forall x \in E_H \cap E_L : g_H(x) = g_L(x) \Leftrightarrow$ $G \cup (H \cup L)$ definiert.

Die letzte Behauptung ergibt sich aus den Äquivalenzen: $G \cap (H \cup L)$ definiert $\Leftrightarrow \forall x \in E_G \cap (E_H \cup E_L) : g_G(x) = g_{H\cup L}(x) \Leftrightarrow \forall x \in (E_G \cap E_H) \cup (E_G \cap E_L) : g_G(x) = g_{H\cup L}(x) \Leftrightarrow$ $\forall x \in (E_G \cap E_H) : g_G(x) = g_H(x)$ und $\forall x \in (E_G \cap E_L) : g_G(x) = g_L(x) \Leftrightarrow G \cap H$ und $G \cap L$ definiert. □

Definition 4.5 *Sei* $G = (V, E, g)$ *ein mittels* (w, γ) *bijektiv nummerierter unorientierter Graph. Der* **Eckengrad** *einer Ecke* $v \in V$ *ist für* $v_s := w(v)$ *definiert durch* $\deg_{(G,w,\gamma)}(v) := \sum_{x=1}^{|E|} I(G, w, \gamma)_{s,x}$. *Im folgenden Satz 4.6 wird gezeigt, dass der Eckengrad nicht von der Wahl einer Nummerierung abhängt, daher schreibt man* $\deg_G(v) := \deg_{(G,w,\gamma)}(v)$. *Ist* $G =$

(V, E, g) orientiert, so definiert man den Eckengrad von $v \in V$ als den Eckengrad von v bezüglich des zugrundeliegenden unorientierten Graphen νG. Ist G ein Teilgraph von H, so setzt man $\deg_G(v) := 0$ für $v \notin V_G$. Ein **Blatt** *ist eine Ecke vom Grad 1. Ein* **trivalent***er Graph besitzt ausschließlich Ecken vom Grad 3.* □

Satz 4.6 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph, (w_i, γ_i), $i \in \{1, 2\}$ bijektive Nummerierungen von G und $v \in V$. Dann gilt $\deg_{(G,w_1,\gamma_1)}(v) = \deg_{(G,w_2,\gamma_2)}(v)$.*

Beweis Die Kompositionen $w_1 \circ w_2^{-1} : \mathcal{V}_{|V|} \to \mathcal{V}_{|V|}$ und $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} : \mathcal{E}_{|E|} \to \mathcal{E}_{|E|}$ sind bijektiv, daher gibt es $\sigma \in S_{|V|}$ und $\xi \in S_{|E|}$, so dass $w_1 w_2^{-1}(v_s) = v_{\sigma(s)}$ für alle $s \in \{1, \cdots, |V|\}$ und $\gamma_1 \gamma_2^{-1}(e_j) = e_{\xi(j)}$ für alle $j \in \{1, \ldots, |E|\}$ gelten. Sei $v \in V : w_2(v) = v_s \implies v = w_2^{-1}(v_s) \implies w_1(v) = v_{\sigma(s)}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\deg_{(G,w_2,\gamma_2)}(v) &= \sum_{x=1}^{|E|} I(G, w_2, \gamma_2)_{s,x} \overset{1.11}{=} \sum_{x=1}^{|E|} I(G, w_1, \gamma_1)_{\sigma(s),\xi(x)} \\ &\overset{j:=\xi(x)}{=} \sum_{j=1}^{|E|} I(G, w_1, \gamma_1)_{\sigma(s),j} = \deg_{(G,w_1,\gamma_1)}(v).\end{aligned}$$

□

Satz 4.7 *Für $X \in \{G, H, H_i\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein Graph.*

1. $\forall v \in V_{G\cup H} : Inz(v, G \cup H) = Inz(v, G) \cup Inz(v, H)$.
2. $\forall v \in V_{G\cap H} : Inz(v, G \cap H) = Inz(v, G) \cap Inz(v, H)$.
3. $\forall v \in V_{G\cup H} : Sch(v, G \cup H) = Sch(v, G) \cup Sch(v, H)$.
4. $\forall v \in V_{G\cap H} : Sch(v, G \cap H) = Sch(v, G) \cap Sch(v, H)$.
5. $\forall v \in V_G : \deg_G(v) = |Inz(v, G)| + |Sch(v, G)|$.
6. $\deg_{G\cup H}(v) = \deg_G(v) + \deg_H(v) - \deg_{G\cap H}(v)$.
7. $G < H \implies \forall v \in V_G : \deg_G(v) \leq \deg_H(v)$.
8. $\forall v \in V_{\bigcup_{i=1}^n H_i} : \deg_{\bigcup_{i=1}^n H_i}(v) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \deg_{\bigcap_{j=1}^k H_{i_j}}(v)$.
9. $G < H \implies \forall v \in V_G : Inz(v, G) = Inz(v, H) \setminus (E_H \setminus E_G)$.

Beweis Die Aussagen 1. bis 4. folgen aus den Definitionen 4.3 und 1.7 auf Seite 13.

Zu 5.: Sei (w, γ) eine bijektive Nummerierung für G und $w(v) = v_i$. Es genügt, die Aussage für einen nicht-orientierten Graphen G zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
\deg_G(v) &= \sum_{j=1}^{|E_G|} I(G,w,\gamma)_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \\ \gamma^{-1}(e_j) \in \\ Inz(v,G) \setminus Sch(v,G)\}}} I(G,w,\gamma)_{i,j} + \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \\ \gamma^{-1}(e_j) \in Sch(v,G)\}}} I(G,w,\gamma)_{i,j} \\
&\overset{1.8}{=} \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \gamma^{-1}(e_j) \\ \in Inz(v,G) \setminus Sch(v,G)\}}} 1 + \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \\ \gamma^{-1}(e_j) \in Sch(v,G)\}}} 2 \\
&= \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \gamma^{-1}(e_j) \\ \in Inz(v,G) \setminus Sch(v,G)\}}} 1 + \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \\ \gamma^{-1}(e_j) \in Sch(v,G)\}}} 1 + \sum_{\substack{\{j \in \{1,\ldots,|E_G|\} \mid \\ \gamma^{-1}(e_j) \in Sch(v,G)\}}} 1 \\
&= |Inz(v,G)| + |Sch(v,G)|\,.
\end{aligned}
$$

Zu 6.:

$$
\begin{aligned}
\deg_{G\cup H}(v) &\overset{5.}{=} |Inz(v,G\cup H)| + |Sch(v,G\cup H)| \overset{1.-4.}{=} |Inz(v,G)| + |Inz(v,H)| \\
&\quad - |Inz(v,G\cap H)| + |Sch(v,G)| + |Sch(v,H)| - |Sch(v,G\cap H)| \\
&\overset{5.}{=} \deg_G(v) + \deg_H(v) - \deg_{G\cap H}(v).
\end{aligned}
$$

Zu 7.: Definiere $L := (V_L, E_L, g_L)$ durch $E_L := E_H \setminus E_G$, $V_L := (V_H \setminus V_G) \cup (V_H \cap V_G)$ und $g_L(x) := g_H(x)$ für alle $x \in E_L$. Dann ist L ein Graph, für den $L \cup G = H$, $E_G \cap E_L = \emptyset$ und $\deg_{G\cap L}(v) = 0$ für alle $v \in V_{G\cap L}$ gilt. Man berechnet für $v \in V_G$:

$$\deg_H(v) = \deg_{G\cup L}(v) \overset{6.}{=} \deg_G(v) + \deg_L(v) - \deg_{G\cap L}(v) \geq \deg_G(v).$$

Zu 8.: Der Beweis wird mit Induktion nach n geführt.

$\boldsymbol{n = 1:}$ $\deg_{H_1}(v) = \deg_{H_1}(v)$.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1:}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \left[\sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1 \\ \wedge\, i_k \neq n+1}} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) + \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1 \\ \wedge\, i_k = n+1}} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) \right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k=n+1} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) + 0 + \deg_{H_{n+1}}(v) \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{k-1}\le n \\ \wedge\, i_k=n+1}} \deg_{\bigcap_{j=1}^{k} H_{i_j}}(v) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \deg_{\bigcup_{i=1}^{n} H_i}(v) + \deg_{H_{n+1}}(v) + \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l} \sum_{1\le i_1<\dots<i_l\le n} \deg_{\bigcap_{j=1}^{l} H_{n+1}\cap H_{i_j}}(v) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \deg_{\bigcup_{i=1}^{n} H_i}(v) + \deg_{H_{n+1}}(v) - \deg_{\bigcup_{i=1}^{n} H_{n+1}\cap H_i}(v) \\
&\overset{6.}{=} \deg_{H_{n+1}\cup\bigcup_{i=1}^{n} H_i}(v).
\end{aligned}$$

Zu 9.: Es genügt, die Aussage für nicht-orientierte Graphen zu zeigen: $x \in Inz(v,H) \wedge x \notin E_H \setminus E_G \Leftrightarrow v \in g_H(x) \;\wedge\; x \in E_G \overset{G\le H}{\Leftrightarrow} v \in g_G(x) \Leftrightarrow x \in Inz(v,G)$. □

Kontrahiert man an einer Ecke vom Grad zwei, so hängt der Isomorphietyp des resultierenden unorientierten Graphen nicht von der Wahl der wegzulassenden Kante ab:

Satz 4.8 *Sei $G = (V,E,g)$ ein unorientierter Graph, $e,f \in E$, $e \neq f$, $g(e) = \{p,q\}$, $p \neq q$, $g(f) = \{p,z\}$, $p \neq z$ und $\deg_G(p) = 2$. Außerdem seien die Abbildungen $h : V\setminus\{p\} \to V\setminus\{p\}$, $h(x) := x$, und $H : E\setminus\{e\} \to E\setminus\{f\}$ durch $H(x) := x$ für $x \neq f$ und $H(f) := e$ gegeben. Dann ist $(h,H) : \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \to \mathcal{C}_{p,f,z}(G)$ ein Isomorphismus unorientierter Graphen.*

Beweis Offenbar ist sowohl h als auch H eine bijektive Abbildung. Es handelt sich um einen Homomorphismus, denn für $x \in E \setminus \{e\}$ ergibt sich die Fallunterscheidung:

1. Fall: $x \neq f$. Dann gilt $x \notin Inz(p,G) = \{e,f\}$, also $p \notin g(x)$. Man berechnet

$$\begin{aligned}
g(p,f,z)\circ H(x) &= g(p,f,z)(x) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p,z,V)\right)(g(x)) = g(x) \\
&= \mathcal{P}_2\left(\psi(p,q,V)\right)(g(x)) = g(p,e,q)(x) = \mathcal{P}_2(h)\circ g(p,e,q)(x).
\end{aligned}$$

2. Fall: $x = f$. Sowohl für $q \neq z$ als auch für $q = z$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
g(p,f,z)\circ H(f) &= g(p,f,z)(e) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p,z,V)\right)(g(e)) = \{q,z\} = \mathcal{P}_2(h)\left(\{q,z\}\right) \\
&= \mathcal{P}_2(h)\mathcal{P}_2\left(\psi(p,q,V)\right)(\{p,z\}) = \mathcal{P}_2(h)\circ g(p,e,q)(f).
\end{aligned}$$

□

Der nächste Satz zeigt, dass man sich bei einer Kontraktion in gewisser Weise auf Teilgraphen zurückziehen kann:

Satz 4.9 *Es seien $G = (V_G, E_G, g_G)$, $H = (V_H, E_H, g_H)$ Graphen und $p \in V_G \backslash V_H$, $e \in E_G \backslash E_H$. Dann gilt $C_{p,e,q}(G \cup H) = C_{p,e,q}(G) \cup H$, sofern beide Graphen definiert sind.*

Beweis Zunächst sind die Ecken- bzw. Kantenmengen der beteiligten Graphen identisch:

$$E_{C_{p,e,q}(G\cup H)} = E_{G\cup H}\backslash\{e\} = E_G\backslash\{e\} \cup E_H = E_{C_{p,e,q}(G)} \cup E_H = E_{C_{p,e,q}(G)\cup H},$$

$$V_{C_{p,e,q}(G\cup H)} = V_{G\cup H}\backslash\{p\} = V_G\backslash\{p\} \cup V_H = V_{C_{p,e,q}(G)} \cup V_H = V_{C_{p,e,q}(G)\cup H}.$$

Für $x \in E_{C_{p,e,q}(G\cup H)}$ berechnet man nun : $g_{C_{p,e,q}(G\cup H)}(x) = \mathcal{P}_2(\psi(p,q,V_{G\cup H}))g_{G\cup H}(x) =$

$$= \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_2(\psi(p,q,V_G))\,(g_G(x)) = g_{C_{p,e,q}(G)}(x) & : & x \in E_G\backslash\{e\} \\ \mathcal{P}_2(\psi(p,q,V_H))\,(g_H(x)) \stackrel{p\notin V_H}{=} g_H(x) & : & x \in E_H \end{array} \right\} = g_{C_{p,e,q}(G)\cup H}(x).$$

Wenn G orientiert ist, verwendet man $(\psi(p,q,\cdot) \times \psi(p,q,\cdot))$ statt $\mathcal{P}_2(\psi(p,q,\cdot))$. □

4.2 Auswirkungen einer Kontraktion auf die Inzidenzmatrix und den Eckengrad

Es werden die Inzidenzmatrizen eines orientierten (Satz 4.11) und eines nicht-orientierten (Satz 4.12 auf Seite 83) Graphen $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ untersucht. Daraus ergibt sich in Satz 4.13 auf Seite 84 eine Gradformel für den Eckengrad bei einer Kontraktion.

Generalvoraussetzung 4.10 *Gegeben sei die Situation aus Definition 4.1. In den kommutativen Diagrammen*

$$\begin{array}{ccc} V\backslash\{p\} & \xrightarrow{i(p,V)} & V \\ \downarrow w_{C_{p,e,q}(G)} & & \downarrow w_G \\ \mathcal{V}_{k_G-1} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{V}_{k_G} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E\backslash\{e\} & \xrightarrow{j(e,E)} & E \\ \downarrow \gamma_{C_{p,e,q}(G)} & & \downarrow \gamma_G \\ \mathcal{E}_{l_G-1} & \xrightarrow{\Xi} & \mathcal{E}_{l_G} \end{array} \tag{4.1}$$

seien $k_G \geq 2$, $l_G \geq 2$ sowie Σ und Ξ gegeben durch Bijektionen

$$\sigma \;:\; \{1,\ldots,k_G-1\} \to \{1,\ldots,k_G\}\backslash\{s\} \quad \textit{und} \tag{4.2}$$

$$\xi \;:\; \{1,\ldots,l_G-1\} \to \{1,\ldots,l_G\}\backslash\{x\} \tag{4.3}$$

also $\Sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$ *und* $\Xi(e_i) = e_{\xi(i)}$. *Dabei gelte* $w_G(p) = v_s, w_G(q) = v_t$ *und* $\gamma_G(e) = e_x$. *Für* $k_G \geq 2$ *und* $l_G = 1$ *sei nur das linke Diagramm aus (4.1) vorgelegt.* □

Für einen Graphen X, zu dem eine Eckennummerierung w und eine Kantennummerierung γ gegeben ist, wird in diesem Abschnitt $I(X) := I(X, w, \gamma)$ bzw. $I(\nu X) := I(X, w, \gamma)$ geschrieben. Darüber hinaus gelte die Generalvoraussetzung 4.10 mit $l_G \geq 2$.

Satz 4.11 *Die orientierten Graphen* $G = (V, E, g)$ *und* $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ *seien mittels*(w_G, γ_G) *bzw.* $\left(w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}, \gamma_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)$ *bijektiv nummeriert. Für ihre Inzidenzmatrizen gilt*

$$I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G), w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}, \gamma_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)_{k,l} = \begin{cases} I\left(G, w_G, \gamma_G\right)_{\sigma(k),\xi(l)} & : \sigma(k) \neq t \\ I\left(G, w_G, \gamma_G\right)_{t,\xi(l)} + I\left(G, w_G, \gamma_G\right)_{s,\xi(l)} & : \sigma(k) = t \end{cases}$$

für $k \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$ *und* $l \in \{1, \ldots, |E| - 1\}$. *Tritt in der obigen Addition* -0 *auf, so soll die Schreibweise* $-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 1 + (-1) = (-1) + 1$ *gelten. Andernfalls ist dort die Addition in* $\mathbb{Z}$ *gemeint.*

Beweis Innerhalb dieses Beweises werden zusätzlich folgende Abkürzungen verwendet: $\psi := \psi(p, q, V)$, $w := w_G$, $\gamma := \gamma_G$, $w' := w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ sowie $\gamma' := \gamma_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$. Die Bedingungen aus der Behauptung sind äquivalent zu $\sigma(k) = t \Leftrightarrow v_{\sigma(k)} = v_t \overset{(4.1)}{\Leftrightarrow} w(w')^{-1}(v_k) = w(q) \Leftrightarrow v_k = w'(q)$. Der Beweis wird durch eine Fallunterscheidung geführt. Es werden die vier Fälle $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{k,l} \in \{1, -1, 0, -0\}$ untersucht. Für die durch die Nummerierung induzierte Orientierung $h_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ von $\left(\mathcal{V}_{|V|-1}, \mathcal{E}_{|E|-1}, h_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)$ gilt $h_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} = (w' \times w')\, g(p, e, q)(\gamma')^{-1}$. Für $1 \leq l \leq |E| - 1$ gibt es also $a, b \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} (v_a, v_b) &= h_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(e_l) = \left(w' \times w'\right) g(p, e, q)(\gamma')^{-1}(e_l) \\ &= \left(w' \times w'\right) (\psi \times \psi)\, gj(e, E)(\gamma')^{-1}(e_l) \\ &\Leftrightarrow \; ((w')^{-1}(v_a), (w')^{-1}(v_b)) = (\psi \times \psi) \underbrace{gj(e, E)(\gamma')^{-1}(e_l)}_{=:(x,y)}. \end{aligned}$$

Für die Orientierung von $\left(\mathcal{V}_{|V|}, \mathcal{E}_{|E|}, h_G\right)$ gilt $h_G = (w \times w)\, g\gamma^{-1}$. Daher kann mittels

$$h_G\left(e_{\xi(l)}\right) = (w \times w)\, g\gamma^{-1}(e_{\xi(l)}) \overset{(4.1)}{=} (w \times w)\, gj(e, E)(\gamma')^{-1}(e_l) = (w \times w)\,(x, y)$$

die rechte Seite der Behauptung berechnet werden.

1) $\mathbf{I}(\mathcal{C}_{\mathbf{p,e,q}}(\mathbf{G}))_{\mathbf{k,l}} = \mathbf{1}$: In diesem Fall gilt also $a = k$, $a \neq b$ und $x \neq y$. Tritt $v_k \neq w'(q)$ ein, so folgt $x \neq p$ und $x \neq q$. Also muss $x = (w')^{-1}(v_k)$ und somit $(w \times w)(x, y) = (v_{\sigma(k)}, w(y))$ gelten. Daher gilt auch $I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 1$, denn wegen $x \neq y$ ist $w(y) \neq v_{\sigma(k)}$ (w bijektiv). Tritt $v_k = w'(q)$ ein, so muss $x = p$ oder $x = q$ gelten. Sei zunächst $x = q$. Wegen $(w \times w)(q, y) = (v_t, w(y))$ gilt $I(G)_{t,\xi(l)} = 1$. Weiterhin ist $I(G)_{s,\xi(l)} = 0$, denn: $I(G)_{s,\xi(l)} \neq 0 \Rightarrow v_s = w(p) = w(y) \Rightarrow y = p \Rightarrow q = (w')^{-1}(v_b) \Rightarrow k = b = a$. Widerspruch! Im Fall $x = p$ schließt man genauso. Also gilt insgesamt $I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)} = 1 = I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{k,l}$.

2) $\mathbf{I}(\mathcal{C}_{\mathbf{p,e,q}}(\mathbf{G}))_{\mathbf{k,l}} = -\mathbf{1}$: Der Beweis der Behauptung verläuft analog zum ersten Fall, indem man an den entsprechenden Stellen die Komponenten vertauscht.

3) $\mathbf{I}(\mathcal{C}_{\mathbf{p,e,q}}(\mathbf{G}))_{\mathbf{k,l}} = \mathbf{0}$: Hier gilt $a \neq k$ und $b \neq k$, also auch $\sigma(a) \neq \sigma(k)$ und $\sigma(b) \neq \sigma(k)$. Betrachte nun die Fälle i) $x \neq p \wedge y \neq p$, ii) $x = p \wedge y \neq p$, iii) $y = p \wedge x \neq p$ sowie iv) $x = y = p$. Sei zunächst $v_k \neq w'(q)$.

i) $(w \times w)(x, y) \overset{\substack{\psi(x)=x \\ \psi(y)=y}}{=} (w(w')^{-1}(v_a), w(w')^{-1}(v_b)) = (v_{\sigma(a)}, v_{\sigma(b)}) \Rightarrow I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 0.$

ii) $(w \times w)(x, y) = (v_s, v_{\sigma(b)})$ und $I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 0$, denn: $I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} \neq 0 \overset{\sigma(k)\neq\sigma(b)}{\Rightarrow} v_s = v_{\sigma(k)} \Rightarrow s \in \operatorname{Bild}\sigma$. Widerspruch zu (4.2)!

iii) Man vertauscht in ii) die Rollen von x und y.

iv) $(w \times w)(p, p) = (v_s, v_s) \implies I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 0$, denn $s \notin \operatorname{Bild}\sigma$.

Nun trete der Fall $v_k = w'(q)$ ein. Dann gilt $t = \sigma(k)$.

i) Wie oben in i) folgt $I(G)_{t,\xi(l)} = 0$ aus $t \neq \sigma(a)$ und $t \neq \sigma(b)$. Es gilt auch $I(G)_{s,\xi(l)} = 0$, denn sowohl aus $v_s = v_{\sigma(a)}$ als auch aus $v_s = v_{\sigma(b)}$ folgt $s \in \operatorname{Bild}\sigma$. Widerspruch zu (4.2)!

ii) $x = p \Rightarrow q = (w')^{-1}(v_a) \Rightarrow v_a = w'(q) = v_k \Rightarrow a = k$. Widerspruch!

iii) $y = p \Rightarrow q = (w')^{-1}(v_b) \Rightarrow v_b = w'(q) = v_k \Rightarrow b = k$. Widerspruch!

iv) Wegen ii) und iii) tritt auch dieser Fall nicht ein.

4) $\mathbf{I}(\mathcal{C}_{\mathbf{p,e,q}}(\mathbf{G}))_{\mathbf{k,l}} = -\mathbf{0}$: In diesem Fall gilt $a = b = k$. Vorerst sei $v_k \neq w'(q)$. Dann folgt $x \neq p$, $y \neq p$ und daher $x = y = (w')^{-1}(v_k)$. Also $(w \times w)(x, x) = (v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k)})$ und $I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = -0$. Sei nun $v_k = w'(q)$. Daraus ergibt sich $q = (w')^{-1}(v_a) = (w')^{-1}(v_b)$. Es sind daher für (x, y) die folgenden vier Fälle möglich:

1. $(x,y) = (p,p) \Leftrightarrow I(G)_{s,\xi(l)} = -0 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} = 0.$
2. $(x,y) = (p,q) \Leftrightarrow I(G)_{s,\xi(l)} = 1 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} = -1.$
3. $(x,y) = (q,p) \Leftrightarrow I(G)_{s,\xi(l)} = -1 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} = 1.$
4. $(x,y) = (q,q) \Leftrightarrow I(G)_{s,\xi(l)} = 0 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} = -0.$

Es wird nun gezeigt, dass mit $k = \sigma^{-1}(t)$ nur in diesen vier von allen in der linken Tabelle aufgezeigten Fällen $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{k,l} = -0$ gilt. Dazu werden die Fälle einzeln betrachtet.

$I(G)_{s,\xi(l)} \backslash I(G)_{t,\xi(l)}$	0	1	-1	-0
0	(11)	(12)	(13)	(14)
1	(21)	(22)	(23)	(24)
-1	(31)	(32)	(33)	(34)
-0	(41)	(42)	(43)	(44)

$I(G)_{s,\xi(l)} \backslash I(G)_{t,\xi(l)}$	0	1	-1	-0
0	0	1	-1	-0
1	1		-0	
-1	-1	-0		
-0	-0			

Um $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l}$ zu berechnen, muss $(w' \times w')\,(\psi \times \psi)\, gj(e,E)(\gamma')^{-1}(e_l)$ ausgewertet werden. Dazu sei $(v_a, v_b) := (w \times w) \circ g \circ \gamma^{-1}(e_{\xi(l)})$. Die Gleichheit $g \circ \gamma^{-1}(e_{\xi(l)}) \overset{(4.1)}{=} gj(e,E)(\gamma')^{-1}(e_l)$ ergibt $(w' \times w')\,(\psi \times \psi)\; gj(e,E)(\gamma')^{-1}\;(e_l) = (w'\psi w^{-1}(v_a),\; w'\psi\; w^{-1}(v_b)) =: (*)$.

Im Fall (11) gilt $a, b \notin \{s,t\}$, daher $w^{-1}(v_a) \neq p$ und $w^{-1}(v_b) \neq p$, demnach $(*) = (v_{\sigma^{-1}(a)},\; v_{\sigma^{-1}(b)})$. Daraus folgt $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = 0$. In (12) erhält man $a = t$ und $b \notin \{s,t\}$. Deshalb gilt $(*) = (w'\psi(q),\; v_{\sigma^{-1}(b)}) = (w'(q),\; v_{\sigma^{-1}(b)}) = (v_{\sigma^{-1}(t)},\; v_{\sigma^{-1}(b)})$. Daher gilt $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = 1$. Vertauscht man die Rollen von a und b in Fall (12), so erhält man im Fall (13) $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = -1$. Tritt (14) ein so gilt $a = b = t$, also $(*) = (v_{\sigma^{-1}(t)}, v_{\sigma^{-1}(t)})$, daher $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = -0$. Der Fall (21) erzwingt $a = s$ und $b \notin \{s,t\}$. Dann folgt $(*) = (w'\psi(p), v_{\sigma^{-1}(b)}) = (w'(q), v_{\sigma^{-1}(b)}) = (v_{\sigma^{-1}(t)}, v_{\sigma(-1(b)})$. Also $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = 1$. Der Fall (22) tritt nicht ein, denn $s = t = a$ ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $p \neq q$. Im Fall (23) gilt $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = -0$, denn aus $a = s$ und $b = t$ folgt $(*) = (v_{\sigma^{-1}(t)},\; v_{\sigma^{-1}(t)})$.

Die Fälle (31), (32), (41) sind analog zu (21) bzw. (23) bzw. (14) zu berechnen. Alle restlichen Fälle ergeben denselben Widerspruch wie (22). Das Ergebnis ist in der Tabelle auf der rechten Seite zusammengefasst. Hinsichtlich dieser Tabelle kann man in diesem Zusammenhang die Schreibweise $-0 = 0 + (-0) = (-0) + 0 = 1 + (-1) = (-1) + 1$ verwenden und es folgt somit die Behauptung des Satzes für 4): $I(C_{p,e,q}(G))_{k,l} = -0 \Leftrightarrow$ $1. \vee 2. \vee 3. \vee 4. \overset{\text{Schreibweise}}{\Leftrightarrow} I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)} = -0.$ □

Bemerkung In der Behauptung des Satzes 4.11 kann man $-0 = 0 \in \mathbb{Z}$ setzen. Dann verzichtet man auf die dort erwähnte Schreibweise, verliert aber die Informationen über die Schlaufen.

Satz 4.12 *Die orientierten Graphen $G = (V, E, g)$ und $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ seien mittels (w_G, γ_G) bzw. $\left(w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}, \gamma_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)$ bijektiv nummeriert. Für die Inzidenzmatrizen der zugehörigen nicht-orientierten Graphen gilt:*

$$I\left(\nu\mathcal{C}_{p,e,q}(G), w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}, \gamma_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)_{k,l} = \begin{cases} I\left(\nu G, w_G, \gamma_G\right)_{\sigma(k),\xi(l)} : \sigma(k) \neq t \\ I\left(\nu G, w_G, \gamma_G\right)_{t,\xi(l)} + I\left(\nu G, w_G, \gamma_G\right)_{s,\xi(l)} : \sigma(k) = t \end{cases}$$

für $k \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$ und $l \in \{1, \ldots, |E| - 1\}$.

Beweis Es sei $H = (V_H, E_H, g_H)$ ein mittels (w_H, γ_H) bijektiv nummerierter orientierter Graph. Nach Korollar 1.5 auf Seite 13 kann die Nummerierung auch für den zugrundeliegenden nicht-orientierten Graphen νH verwendet werden. An Definition 1.8 erkennt man, dass folgende Äquivalenzen gelten:

$$I\left(\nu H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I\left(H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} = 0, \tag{4.4}$$

$$I\left(\nu H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad I\left(H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} = -0, \tag{4.5}$$

$$I\left(\nu H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad I\left(H, w_H, \gamma_H\right)_{k,l} \in \{1, -1\}. \tag{4.6}$$

1. Fall: $I\left(\nu\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} = 0$. Nach Satz 4.11 und (4.4) gilt für $\sigma(k) \neq t$:

$$0 = I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} = I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} = I(\nu G)_{\sigma(k),\xi(l)}.$$

Für $\sigma(k) = t$ gilt $0 = I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} = I(G)_{t,\xi(l)} + I(G)_{s,\xi(l)}$ nach 4.11. Daraus folgt $I(G)_{t,\xi(l)} = 0 = I(G)_{s,\xi(l)}$ mithilfe der rechten Tabelle von Seite 82. Aus (4.4) ergibt sich dann die Behauptung.

2. Fall: $I\left(\nu\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} = 2$. Für $\sigma(k) \neq t$ erhält man:

$$-0 \overset{(4.5)}{=} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} \overset{4.11}{=} I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} \overset{(4.5)}{\Longrightarrow} I(\nu G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 2.$$

Für $\sigma(k) = t$ gilt $-0 \overset{(4.5)}{=} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)_{k,l} \overset{4.11}{=} I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)}$. Laut der rechten Tabelle auf Seite 82 treten daher folgende Situationen auf:

$I(G)_{s,\xi(l)}$	$I(G)_{t,\xi(l)}$
0	-0
-0	0
1	-1
-1	1

$\Longrightarrow$

$I(\nu G)_{s,\xi(l)}$	$I(\nu G)_{t,\xi(l)}$	$I(\nu G)_{s,\xi(l)} + I(\nu G)_{t,\xi(l)}$
0	2	2
2	0	2
1	1	2
1	1	2

3. Fall: $I\left(\nu\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\right)_{k,l} = 1$. Für $\sigma(k) \neq t$ gilt

$$\{1,-1\} \overset{(4.6)}{\ni} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\right)_{k,l} = I(G)_{\sigma(k),\xi(l)} \overset{(4.6)}{\Longrightarrow} I(\nu G)_{\sigma(k),\xi(l)} = 1.$$

Für $\sigma(k) = t$ gilt $\{1,-1\} \overset{(4.6)}{\ni} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\right)_{k,l} \overset{4.11}{=} I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)}$. Laut der rechten Tabelle auf Seite 82 treten daher folgende Situationen auf:

$I(G)_{s,\xi(l)}$	$I(G)_{t,\xi(l)}$
0	1
1	0
-1	0
0	-1

$\Longrightarrow$

$I(\nu G)_{s,\xi(l)}$	$I(\nu G)_{t,\xi(l)}$	$I(\nu G)_{s,\xi(l)} + I(\nu G)_{t,\xi(l)}$
0	1	1
1	0	1
1	0	1
0	1	1

□

Satz 4.13 *Sei $G = (V, E, g)$ ein unorientierter Graph. Für $e \in E$, $g(e) = \{p, q\}$, $p \neq q$ und $v \in V\backslash\{p\}$ gilt*

$$\deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(v) = \begin{cases} \deg_G(v) & : \quad v \neq q \\ \deg_G(p) + \deg_G(v) - 2 & : \quad v = q \end{cases}.$$

Beweis Für G und $\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)$ sei die Situation aus 4.10 gegeben. Dabei seien (w_X, γ_X) bijektive Nummerierungen für $X \in \{G, \mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\}$. Sei $v \in V \setminus \{p\}$ und $w_G(v) = v_i$. Zunächst erhält man:

$$\begin{aligned} v \in V \setminus \{p\} \quad &\Longrightarrow \quad v_i = w_G(v) \neq w_G(p) = v_s \Longrightarrow i \neq s \Longrightarrow i \in \operatorname{Bild}\sigma \\ &\Longrightarrow \quad w_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(v) = \Sigma^{-1} w_G(v) = v_{\sigma^{-1}(i)}. \end{aligned}$$

1. Fall: $v \neq q$. Dann gilt $i \neq t$ wegen $v_i = w_G(v) \neq w_G(q) = v_t$ und

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(v) &= \sum_{j=1}^{|E|-1} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\right)_{\sigma^{-1}(i),j} \overset{4.12}{=} \sum_{j=1}^{|E|-1} I(G)_{i,\xi(j)} \\ &= \sum_{j' \in \{1,\ldots,|E|\}\backslash\{x\}} I(G)_{i,j'} \overset{(*)}{=} \sum_{j'=1}^{|E|} I(G)_{i,j'} = \deg_G(v). \end{aligned}$$

Zu $(*)$: $v \notin \{p, q\} \Rightarrow v_i \notin \{v_s, v_t\} = \{w_G(p), w_G(q)\} = \mathcal{P}_2(w_G)g(e) = h_G\gamma_G(e) = h_G(e_x) \Rightarrow I(G)_{i,x} = 0$.

2. Fall: $v = q$. Dann gilt $i = t$. Man berechnet:

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(v) &= \sum_{j=1}^{|E|-1} I\left(\mathcal{C}_{p,e,q}\left(G\right)\right)_{\sigma^{-1}(i),j} \overset{4.12}{=} \sum_{j=1}^{|E|-1} I(G)_{s,\xi(j)} + I(G)_{t,\xi(j)} \\ &= \sum_{j' \in \{1,\ldots,|E|\}\backslash\{x\}} I(G)_{s,j'} + \sum_{j' \in \{1,\ldots,|E|\}\backslash\{x\}} I(G)_{t,j'} \\ &\overset{(**)}{=} \deg_G(p) + \deg_G(q) - 2. \end{aligned}$$

Zu $(**)$: $h_G(e_x) = \{v_s, v_t\} \Rightarrow I(G)_{s,x} = I(G)_{t,x} = 1$. □

4.3 Hochheben und Herunterdrücken von Graphenhomomorphismen

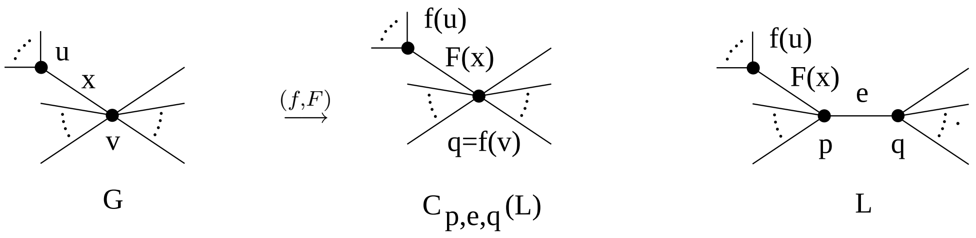
In Satz 4.16 auf Seite 86 wird gezeigt, dass ein injektiver Homomorphismus $(f, F) : G \to H$ einen Homomorphismus von der (p, e, q)-Kontraktion von G nach der $(f(p), F(e), f(q))$-Kontraktion von H induziert. Ist L eine Kontraktion von H außerhalb des Bildes von F, so lässt sich in Satz 4.17 auf Seite 87 ein Homomorphismus von G nach L angeben. Umgekehrt kann man aus einem Homomorphismus von G nach L einen Homomorphismus von G nach H konstruieren. Unter welchen Bedingungen dies möglich ist, wird in Satz 4.18 auf Seite 88 vorgestellt.

Definition 4.14 *Vorgelegt seien Graphen* $G = (V_G, E_G, g_G)$ *und* $L = (V_L, E_L, g_L)$*. Zu* $p, q \in V_L$*,* $e \in E_L$ *sei* $C_{p,e,q}(L)$ *definiert und ein Homomorphismus* $(f, F) : G \to C_{p,e,q}(L)$ *gegeben. Zu diesen Daten definiere*

$$M_w^v(f, F) := \{x \in Inz(v, G) \mid F(x) \in Inz(w, L)\} \subset E_G$$

für $v \in V_G$ *und* $w \in \{p, q\}$*.*

Bemerkung In Abbildung (4.7) wird als Beispiel die Situation $x \in M_p^u(f, F)$ dargestellt:



(4.7)

Lemma 4.15 *Gegeben sei die Situation aus Definition 4.14. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. $v \in f^{-1}(q) : \quad M_p^v(f, F) \cup M_q^v(f, F) = Inz(v, G).$
2. $\forall v \in V_G : \quad x \in M_p^v(f, F) \cap M_q^v(f, F) \quad \Rightarrow \quad g_{C_{p,e,q}(L)}(F(x)) = \{q\}.$
3. *f injektiv,* $v = f^{-1}(q) \; : \quad x \in M_p^v(f, F) \cap M_q^v(f, F) \quad \Rightarrow \quad g_G(x) = \{v\}.$
4. $C_{p,e,q}(L)$ *hat keine Schlaufen* $\quad \Rightarrow \quad M_q^v(f, F) \cap M_p^v(f, F) = \emptyset.$
5. *f injektiv,* $v = f^{-1}(q)$*,* $Sch(v, G) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad M_p^v(f, F) \cap M_q^v(f, F) = \emptyset.$

6. *Für einen Homomorphismus* $(\phi, \Phi) : J \to G$ *von Graphen* J *und* G *ist*

$$\widetilde{\Phi} : M_w^v((f,F) \circ (\phi, \Phi)) \longrightarrow M_w^{\phi(v)}(f,F),$$

$x \mapsto \Phi(x)$ *fur* $w \in \{p,q\}$ *wohldefiniert. Wenn* (ϕ,Φ) *ein Isomorphismus ist, dann ist* $\widetilde{\Phi}$ *bijektiv, und darüber hinaus gilt* $M_w^{\phi(v)}(f,F) = \emptyset \Leftrightarrow M_w^v((f,F)\circ(\phi,\Phi)) = \emptyset$.

Beweis Es genügt, die Behauptung für nicht-orientierte Graphen zu zeigen. Es sei $H = (V_H, E_H, g_H) = C_{p,e,q}(L)$.

Zu 1.: Die Inklusion $\subset$ ist definitionsgemäß richtig. Wie folgt ergibt sich $\supset : x \in Inz(v,G) \implies v \in g_G(x) \implies q = f(v) \in g_H F(x) = \mathcal{P}_2(\psi(p,q,V_L)) g_L F(x) \implies p \in g_L F(x) \vee q \in g_L F(x) \implies x \in M_p^v(f,F) \cup M_q^v(f,F)$.

Zu 2.: $q,p \in g_L F(x) \Rightarrow g_L F(x) = \{q,p\} \Rightarrow g_H F(x) = \mathcal{P}_2(\psi(p,q,V_L)) g_L F(x) = \{q\}$.

Zu 3.: $\{q\} \overset{2}{=} g_H F(x) = \mathcal{P}_2(f) g_G(x) \overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} g_G(x) = \{v\}$.

Zu 4.: Folgt aus 2.

Zu 5.: Folgt aus 3.

Zu 6.: $\widetilde{\Phi}$ wohldefiniert : $x \in M_w^v((f,F)\circ(\phi,\Phi)) \implies x \in Inz(v,J) \wedge F\Phi(x) \in Inz(w,L) \implies \Phi(x) \in Inz(\phi(v),G) \wedge F\Phi(x) \in Inz(w,L) \implies \Phi(x) \in M_w^{\phi(v)}(f,F)$.

Einerseits ist mit Φ auch $\widetilde{\Phi}$ injektiv, andererseits ist $\widetilde{\Phi}$ surjektiv : $y \in M_w^{\phi(v)}(f,F) \implies y \in Inz(\phi(v),G) \subset E_G \wedge F(y) \in Inz(w,L) \overset{(\phi,\Phi)\text{ Isomorphismus}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in E_J : \Phi(x) = y$ und $x \in Inz(v,J) \wedge (F\circ\Phi)(x) \in Inz(w,L) \implies x \in M_w^v((f,F)\circ(\phi,\Phi))$.

Aus der Beweisführung ergibt sich, dass $M_w^{\phi(v)}(f,F)$ genau dann leer ist, wenn $M_w^v((f,F)\circ(\phi,\Phi))$ es ist, sofern (ϕ,Φ) ein Isomorphismus ist. □

Satz 4.16 *Für Graphen* $X \in \{G,H\}$, $X = (V_X, E_X, g_X)$ *mit* $|E_X| \geq 2$ *sei* $(f,F) : G \to H$ *ein Homomorphismus. Vorgelegt seien Ecken* p,q *und eine Kante* e *von* G*, so dass* $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ *definiert ist, und sowohl* $f(p) \neq f(q)$ *als auch* $F^{-1}(F(e)) = \{e\}$ *gilt. Dann ist auch* $C_{f(p),F(e),f(q)}(H)$ *definiert, und* $(f(p,e,q), F(p,e,q)) : \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \to C_{f(p),F(e),f(q)}(H)$ *gegeben durch* $F(p,e,q)(x) := F(x)$ *sowie* $f(p,e,q)(x) := \psi(f(p), f(q), V_H)(f(x))$ *ist ein Homomorphismus. Sei* $M \subset V_G$*. Mit* $f\big|_{M \setminus f^{-1}(f(p))}$ *ist auch* $f(p,e,q)\big|_{M \setminus f^{-1}(f(p))}$ *injektiv.*

Mit f, F *sind* $f(p,e,q)$ *bzw.* $F(p,e,q)$ *injektiv und es gilt* $f(p,e,q)(x) = f(x)$ *für jede Ecke* x *von* $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$*. Wenn* f *bzw.* F *surjektiv ist, so ist auch* $f(p,e,q)$ *bzw.* $F(p,e,q)$ *surjektiv.*

Beweis Der Beweis wird nur für nicht-orientierte Graphen geführt. Wegen $g_H F(e) = \mathcal{P}_2(f) g_G(e) = \{f(p), f(q)\}$ ist $C_{f(p),F(e),f(q)}(H)$ wohldefiniert. Die Abbildung $F(p,e,q)$

ist wohldefiniert, denn aus $F(x) = F(e)$ folgt $x \in F^{-1}(F(e)) = \{e\}$. Ebenso ist $f(p,e,q)$ wohldefiniert: Angenommen es gibt ein $x \in V_G \setminus \{p\}$ mit $f(p,e,q)(x) = f(p)$. Daraus folgt $f(p) = f(q)$, falls $f(x) = f(p)$ gilt. Widerspruch! Wenn $f(p) \neq f(x)$ gilt, folgt $f(p,e,q)(x) = f(p) = f(x)$. Widerspruch!

Nun wird gezeigt, dass $(f(p,e,q), F(p,e,q))$ ein Homomorphismus ist. Sei $a \in V_G$. Die folgende Fallunterscheidung zeigt $f(p,e,q)\left(\psi\left(p,q,V_G\right)(a)\right) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(a))$.

1. $a = p : f(p,e,q)\left(\psi\left(p,q,V_G\right)(p)\right) = f(p,e,q)(q) = f(q) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(p))$.

2. $a \neq p \wedge f(a) = f(p)$:
$$f(p,e,q)\left(\psi\left(p,q,V_G\right)(a)\right) = f(p,e,q)(a) = f(q) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(a)).$$

3. $a \neq p \wedge f(a) \neq f(p)$:
$$f(p,e,q)\left(\psi\left(p,q,V_G\right)(a)\right) = f(p,e,q)(a) = f(a) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(a)).$$

Nun berechnet man

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_2\left(f(p,e,q)\right) g_{C_{p,e,q}(G)}(x) = \mathcal{P}_2\left(f(p,e,q)\right) \mathcal{P}_2\left(\psi(p,q,V_G)\right)\left(g_G(x)\right) \\
= \quad & \mathcal{P}_2\left(f(p,e,q) \circ \psi(p,q,V_G)\right) g_G(x) = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(f(p),f(q),V_H\right) f\right)\left(g_G(x)\right) \\
= \quad & \mathcal{P}_2\left(\psi\left(f(p),f(q),V_H\right)\right) \mathcal{P}_2(f)\left(g_G(x)\right) = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(f(p),f(q),V_H\right)\right) g_H F(x) \\
= \quad & \mathcal{P}_2\left(\psi\left(f(p),f(q),V_H\right)\right) g_H F(p,e,q)(x) = g_{C_{f(p),F(e),f(q)}(H)} F(p,e,q)(x).
\end{aligned}$$

Zum Nachweis der nächsten Aussage seien $x, y \in M \setminus f^{-1}(f(p))$, so dass $f(p,e,q)(x) = f(p,e,q)(y)$ gilt. Daraus folgt $f(x) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(x)) = f(p,e,q)(x) = f(p,e,q)(y) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(f(y)) = f(y)$, also $x = y$.

Nach Definition ist klar, dass aus der Injektivität von F die Injektivität von $F(p,e,q)$ folgt. Wenn f injektiv ist, setzt man in der vorigen Aussage $M := V_G$. Daraus ergibt sich, dass $f(p,e,q) = f(p,e,q)\big|_{V_G \setminus \{p\}}$ injektiv ist. Sei nun F surjektiv und $y \in E_{C_{f(p),F(e),f(q)}(H)} = E_H \setminus \{F(e)\}$. Dann gibt es ein $x \in E_G$ mit $F(x) = y$. Hier ist $x \neq e$, denn sonst gilt $F(e) = y \in E_H \setminus \{F(e)\}$. Widerspruch! Also gilt $F(p,e,q)(x) = F(x) = y$. Nun sei f surjektiv und $y \in V_{C_{f(p),F(e),f(q)}(H)} = V_H \setminus \{f(p)\}$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in V_G$ mit $f(x) = y$. Da $y \neq f(p)$ ist, ist $x \neq p$, also gilt $f(p,e,q)(x) = \psi\left(f(p),f(q),V_H\right)(y) = y$.

Auf dieselbe Art erhält man einen entsprechenden Beweis für orientierte Graphen. □

Satz 4.17 *Für $X \in \{G,H,L\}$ seien $X = (V_X, E_X, g_X)$ orientierte Graphen, $p,q \in V_H$, $e \in E_H$, $L := C_{p,e,q}(H)$ und $(f,F) : G \to H$ ein Homomorphismus. Zusätzlich gelte $e \notin Bild(F)$.*

1. *Die Abbildung* $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to L$ *definiert durch* $\widetilde{F}(x) := F(x)$ *für* $x \in E_G$ *und*

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad x \notin f^{-1}(p) \\ q & : \quad x \in f^{-1}(p) \end{cases}$$

   für $x \in V_G$ *ist ein Homomorphismus.*

2. $\left[f^{-1}(p) = \emptyset \text{ oder } \left(f^{-1}(p) \neq \emptyset \wedge f^{-1}(q) = \emptyset\right)\right]$ *und* (f, F) *injektiv* $\Leftrightarrow (\widetilde{f}, \widetilde{F})$ *injektiv.*

Beweis **Zu 1.:** Für $x \in E_G$ sei $g_G(x) = (a, b)$. Dann gilt : $g_L\widetilde{F}(x) = g_H(p, e, q) \circ \widetilde{F}(x) = g_H(p, e, q)\,(F(x)) = (\psi(p, q, V_H) \times \psi(p, q, V_H)) \circ (f \times f)\,(a, b) =$

$$= \left\{ \begin{array}{rcl} (f(a), f(b)) & : & a, b \notin f^{-1}(p) \\ (q, f(b)) & : & b \notin f^{-1}(p) \wedge a \in f^{-1}(p) \\ (f(a), q) & : & b \in f^{-1}(p) \wedge a \notin f^{-1}(p) \\ (q, q) & : & a, b \in f^{-1}(p) \end{array} \right\} = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right)(a, b) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) \circ g_G(x).$$

Zu 2.: **⇒:** Zunächst ist mit F auch $\widetilde{F}$ injektiv. Gilt $f^{-1}(p) = \emptyset$, so ist $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in V_G$. Also ist $\widetilde{f}$ injektiv, wenn f es ist. Sei nun $v = f^{-1}(p)$ und $x, y \in V_G$: $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y) \implies [f(x) = f(y) \wedge x, y \notin f^{-1}(p)] \vee q \in \text{Bild}(f) \vee [\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y) = q \wedge x, y \in f^{-1}(p)] \implies x = y \vee x = y = v \implies \widetilde{f}$ injektiv.
⇐: Zuerst wird $f^{-1}(p) \neq \emptyset \implies f^{-1}(q) = \emptyset$ gezeigt. Sei $v \in f^{-1}(p)$. Angenommen es gibt ein $w \in V_G$ mit $w \in f^{-1}(q) : f(w) = q \neq p \implies w \notin f^{-1}(p) \implies \widetilde{f}(w) = f(w) = q = \widetilde{f}(v) \implies w = v \implies q = f(w) = f(v) = p$. Widerspruch!
Nun wird gezeigt, dass (f, F) injektiv ist. Mit $\widetilde{F}$ ist offensichtlich auch F injektiv. Seien $x, y \in V_G$ mit $f(x) = f(y)$. Es genügt die folgenden drei Fälle zu betrachten:

1. $x \in f^{-1}(p)$, $y \in f^{-1}(p) : q = \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y) \implies x = y$.
2. $x \in f^{-1}(p)$, $y \notin f^{-1}(p) : p = f(x) = f(y) \implies y \in f^{-1}(p)$. Widerspruch! Also tritt dieser Fall nicht ein.
3. $x \notin f^{-1}(p)$, $y \notin f^{-1}(p) : \widetilde{f}(x) = f(x) = f(y) = \widetilde{f}(y) \implies x = y$.

□

Satz 4.18 *Für* $X \in \{G, H, L\}$ *seien* $X = (V_X, E_X, g_X)$ *orientierte Graphen,* $p, q \in V_L$, $e \in E_L$, $H := C_{p,e,q}(L)$ *und* $(f, F) : G \to H$ *ein injektiver Homomorphismus.*
Fall A: $q \notin$ *Bild*(f). *Dann ist* $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to L$ *definiert durch* $\widetilde{f}(x) := f(x)$ *für* $x \in V_G$ *und* $\widetilde{F}(x) := F(x)$ *für* $x \in E_G$ *ein injektiver Homomorphismus.*
Fall B: $v := f^{-1}(q)$.

1. $M_p^v(f,F) = \emptyset$: *Die Abbildung* $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to L$ *definiert durch* $\widetilde{f}(x) := f(x)$ *für* $x \in V_G$ *und* $\widetilde{F}(x) := F(x)$ *für* $x \in E_G$ *ist ein injektiver Homomorphismus.*

2. $M_q^v(f,F) = \emptyset$: *Die Abbildung* $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to L$ *definiert durch* $\widetilde{F}(x) := F(x)$ *für* $x \in E_G$*, und*
$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad x \neq v \\ p & : \quad x = v \end{cases}$$
für $x \in V_G$ *ist ein injektiver Homomorphismus. Wenn* f *eine Inklusion ist, gilt offenbar* $\widetilde{f}(x) = \psi(v, p, V_G)(x)$.

3. $M_q^v(f,F) \neq \emptyset$, $M_p^v(f,F) \neq \emptyset$ *und* $Sch(v,G) = \emptyset$: *Für den Graphen* $K = (V_K, E_K, g_K)$*, der durch* $E_K \setminus E_G = \{z\}$, $V_K \setminus V_G = \{w\}$, $E_G \subset E_K$, $V_G \subset V_K$ *und*
$$g_K(x) := \begin{cases} g_G(x) & : \quad x \in E_G \backslash M_p^v(f,F) \\ (\psi(v,w,V_K) \times \psi(v,w,V_K))\,(g_G(x)) & : \quad x \in M_p^v(f,F) \\ (w,v) & : \quad x = z \wedge g_L(e) = (p,q) \\ (v,w) & : \quad x = z \wedge g_L(e) = (q,p) \end{cases}$$
gegeben sei, und die Abbildung $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : K \to L$*, die durch*
$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad x \neq w \\ p & : \quad x = w \end{cases} \quad \text{und} \quad \widetilde{F}(x) := \begin{cases} F(x) & : \quad x \neq z \\ e & : \quad x = z \end{cases}$$
festgelegt sei, gelten:

   (a) $(\widetilde{f}, \widetilde{F})$ *ist ein injektiver Homomorphismus,*

   (b) $G = C_{w,z,v}(K)$.

   (c) $Inz(w,K) = M_p^v(f,F) \cup \{z\}$.

   (d) $\deg_K(w) = \left|M_p^v(f,F)\right| + 1$, $\deg_K(v) = \left|M_q^v(f,F)\right| + 1$.

   (e) *Die Abbildung* $(\widetilde{f}(w,z,v), \widetilde{F}(w,z,v)) : G \to H$ *aus Satz 4.16 auf Seite 86 ist durch* $(\widetilde{f}(w,z,v), \widetilde{F}(w,z,v)) = (f,F)$ *gegeben.*

Beweis Zunächst werden die Fälle A und 1. von B betrachtet. Sei $x \in E_G$. Zu zeigen ist $(*)$ in (4.8).
$$g_L\widetilde{F}(x) = g_L F(x) \overset{(*)}{=} g_H F(x) = (f \times f)\, g_G(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_G(x). \tag{4.8}$$

Im Fall A gelten:

1. $q \notin \nu g_H F(x)$, denn : $q \notin \mathrm{Bild}(f) \implies q \notin \nu\,(f \times f)\, g_G(x) = \nu g_H F(x)$.

2. $p \notin \nu g_L F(x)$, denn : $q \overset{1.}{\notin} \nu g_H F(x) = \nu\left(\psi(p,q,V_L) \times \psi(p,q,V_L)\right) g_L F(x) \Rightarrow p \notin \nu g_L F(x)$.

Im Fall 1. von B gilt auch $p \notin \nu g_L F(x)$, denn:

3. $x \notin Inz(v,G) \Rightarrow v \notin \nu g_G(x) \overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} q = f(v) \notin \nu g_H F(x) = \nu\left(\psi(p,q,V_L) \times \psi(p,q,V_L)\right) g_L F(x) \Longrightarrow p \notin \nu g_L F(x)$.

4. $x \in Inz(v,G) \overset{M_p^v(f,F)=\emptyset}{\Longrightarrow} F(x) \notin Inz(p,L) \Longrightarrow p \notin \nu g_L F(x)$.

Daher erhält man in A und 1. von B jeweils $\left(\psi(p,q,V_L) \times \psi(p,q,V_L)\right) g_L F(x) = g_L F(x)$, also $(*)$ von (4.8).

Sei nun die Situation aus 2. von B vorgelegt. Wegen 5. und 6. ist $(\widetilde{f}, \widetilde{F})$ auch in dieser Situation ein Homomorphismus:

5. $x \notin Inz(v,G) \Rightarrow v \notin \nu g_G(x) \overset{\text{wie } 3.}{\Longrightarrow} q \notin \nu g_H F(x) \overset{\text{wie } 2.}{\Longrightarrow} p \notin \nu g_L F(x) \Rightarrow (*)$ in (4.8) gilt.

6. Sei nun $x \in Inz(v,G) \overset{\text{Lemma 4.15.1}}{=} M_p^v(f,F)$: Mit $g_G(x) = (v,r)$, $r \in V_G$, gilt

$$\left(\psi(p,q,V_L) \times \psi(p,q,V_L)\right) g_L F(x) = g_H F(x) = (f \times f)\, g_G(x) = (q, f(r))\,. \tag{4.9}$$

Ist $r \neq v$, so ist $f(r) \neq q$, und aus $q \notin \nu g_L F(x)$ (wegen $x \notin M_q^v(f,F) = \emptyset$) erhält man dann $g_L F(x) = (p, f(r))$ aus (4.9). Damit errechnet man

$$\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_G(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right)(v,r) = \left(\widetilde{f}(v), \widetilde{f}(r)\right) = (p, f(r)) = g_L F(x) = g_L \widetilde{F}(x).$$

Gilt $r = v$, also $f(r) = q$, folgt $g_L F(x) = (p,p)$ aus $M_q^v(f,F) = \emptyset$ und (4.9). Daher gilt

$$\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_G(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right)(v,v) = \left(\widetilde{f}(v), \widetilde{f}(v)\right) = (p,p) = g_L F(x) = g_L \widetilde{F}(x).$$

Für $g_G(x) = (r,v)$ schließt man analog. Die Injektivität von $(\widetilde{f}, \widetilde{F})$ ergibt sich in den bisher behandelten Fällen aus der Injektivität von (f,F).

Für **(a)** im dritten Fall von B ist $g_L \widetilde{F}(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(x)$ für $x \in E_K$ zu zeigen. Dazu unterscheidet man vier Fälle:

7. $x \notin Inz(v,G)$: Aus 3. folgt $(*)$ in folgender Rechnung:

$$\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_G(x) = (f \times f)\, g_G(x) = g_H F(x) \overset{(*)}{=} g_L F(x) = g_L \widetilde{F}(x).$$

8. $x \in M_q^v(f,F)$: Mit Lemma 4.15.5 folgt $x \notin M_p^v(f,F)$ also $p \notin \nu g_L F(x)$. Zusammen mit $g_G(x) = (v,r)$ ergibt sich $\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_G(x) = \left(\widetilde{f}(v), \widetilde{f}(r)\right) = (q, f(r)) = (f \times f)\, g_G(x) = g_H F(x) = g_L F(x) = g_L \widetilde{F}(x)$. Für $g_G(x) = (r,v)$ schließt man analog.

9. $x \in M_p^v(f,F)$: Mit $g_G(x) = (v,r)$ erhält man wegen $r \neq v$ (denn $Sch(v,G) = \emptyset$)

$$\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(x) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right)(w,r) = (p, f(r)) \overset{(*)}{=} g_L F(x) = g_L \widetilde{F}(x).$$

Die Gleichung $(*)$ erhält man wie in 6., denn $x \notin M_q^v(f,F)$ wegen Lemma 4.15.5. Für $g_G(x) = (r,v)$ schließt man analog.

10. $x = z$: Sei $g_L(e) = (q,p)$. Dann gilt $\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(z) = \left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right)(v,w) = (q,p) = g_L(e) = g_L\widetilde{F}(z)$. Für $g_G(e) = (p,q)$ schließt man analog.

Aus 7. bis 10. folgt, dass $(\widetilde{f},\widetilde{F})$ ein Homomorphismus ist. Direkt an den Definitionen von $\widetilde{f}$ und $\widetilde{F}$ erkennt man deren Injektivität.

Definitionsgemäß haben die in **(b)** beteiligten Graphen dieselben Ecken- und Kantenmengen. Es ist noch $g_K(w,z,v) = g_G$ zu zeigen. Sei $x \in E_G$:

11. $x \in M_p^v(f,F)$: Für $g_G(x) = (v,r)$ gilt $g_G(x) \overset{r \neq v}{=} (\psi(w,v,V_K) \times \psi(w,v,V_K))(w,r) = (\psi(w,v,V_K) \times \psi(w,v,V_K))\, g_K(x) = g_K(w,z,v)(x)$. Für $g_G(x) = (r,v)$ schließt man analog.

12. $x \notin M_p^v(f,F)$: Für $x \in Inz(v,G)$ gilt dann $p \notin \nu g_L F(x)$. Ist $x \notin Inz(v,G)$, so erhält man $p \notin \nu g_L F(x)$ wie in 3. Also gilt: $p \notin \nu g_L F(x) = \nu g_L \widetilde{F}(x) \overset{(a)}{\Longrightarrow} w \notin \nu g_K(x) \Longrightarrow g_G(x) = g_K(x) = (\psi(w,v,V_K) \times \psi(w,v,V_K))\, g_K(x) = g_K(w,z,v)(x)$.

Zu (c): $\subset$**:** $x \in Inz(w,K) \Longrightarrow w \in \nu g_K(x) \Longrightarrow x = z$ oder $x \in M_p^v(f,F)$ gemäß der Definition von g_K.

$\supset$**:** Für $x = z$ gilt offenbar $w \in \nu g_K(x) = \{v,w\}$. Für $x \in M_p^v(f,F)$ gilt: $F(x) \in Inz(p,L) \Longrightarrow p \in \nu g_L F(x) \overset{x \neq z}{=} \nu g_L \widetilde{F}(x) = \nu\left(\widetilde{f} \times \widetilde{f}\right) g_K(x) \Longrightarrow \exists a \in \nu g_K(x) : \widetilde{f}(a) = p \Longrightarrow a = w \Longrightarrow w \in \nu g_K(x)$.

Zu (d): Es gilt $Sch(w,K) = \emptyset$: Sei $x \in E_K$ eine Schlaufe mit $\nu g_K(x) = \{w\}$. Die Definition von g_K erzwingt dann $v = w$ oder $w \in \nu g_G(x)$ oder $\nu g_G(x) = \{v\}$. Widerspruch!

Insgesamt berechnet man nun:

$$\deg_K(w) \overset{\text{5. in 4.7, S.76}}{=} |Inz(w,K)| + |Sch(w,K)| = |Inz(w,K)| \overset{\text{(c)}}{=} \left|M_p^v(f,F)\right| + 1.$$

Zum Beweis der zweiten Aussage liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} \deg_K(v) + \left|M_p^v(f,F)\right| + 1 - 2 &\overset{\text{(c)}}{=} \deg_K(v) + \deg_K(w) - 2 \\ &\overset{\text{4.13, S.84}}{=} \deg_G(v) \overset{\text{4.7, S.76}}{=} |Inz(v,G)| + |Sch(v,G)| \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} |Inz(v,G)| \overset{\text{1. und 5. in 4.15, S.85}}{=} \left|M_p^v(f,F)\right| + \left|M_q^v(f,F)\right| \end{aligned}$$

die Behauptung $\deg_K(v) - 1 = \left|M_q^v(f,F)\right|$.

Zu (e): Für $x \in V_G$ gilt : $\widetilde{f}(w,z,v)(x) \overset{\text{Satz 4.16}}{=} \widetilde{f}(x) = f(x)$. Für $x \in E_G$ gilt : $\widetilde{F}(w,z,v)(x) \overset{\text{Satz 4.16}}{=} \widetilde{F}(x) = F(x)$. □

Satz 4.19 *Es seien $X \in \{G, H\}$, $X = (V_X, E_X, g_X)$ orientierte Graphen und $p, q \in V_H$, $e \in E_H$, so dass $C_{p,e,q}(H)$ definiert ist. Zusätzlich sei $(f, F) : G \to H$ ein injektiver Homomorphismus mit $e \notin$ Bild(F). Die aus Satz 4.17.1 bekannte Abbildung $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to C_{p,e,q}(H)$ sei injektiv. Dann tritt A, B 1. oder B 2. in Satz 4.18 ein, und für den Homomorphismus $(\widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{F}}) : G \to H$ gilt $(\widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{F}}) = (f, F)$.*

Beweis Da $(\widetilde{f}, \widetilde{F})$ injektiv ist, kann Satz 4.18 angewendet werden.

$\boldsymbol{f^{-1}(p) = \emptyset}$ **:** Nach Definition von $\widetilde{f}$ gilt hier $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in V_G$. Gilt weiterhin $f^{-1}(q) = \emptyset$, so tritt Fall A in Satz 4.18 ein, d.h. $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in V_G$. Es sei nun $f(v) = q$. Dann gilt auch $\widetilde{f}(v) = q$. Außerdem folgt $M_p^v(\widetilde{f}, \widetilde{F}) = \emptyset$, denn:

$$p \notin \mathrm{Bild}(f) \implies \forall x \in E_G : p \notin \nu\,(f \times f)\, g_G(x) = \nu g_H F(x) \tag{4.10}$$

$$\implies \forall x \in E_G : \widetilde{F}(x) = F(x) \notin Inz(p, H). \tag{4.11}$$

Damit tritt der Fall B 1. aus Satz 4.18 ein, d.h. $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in V_G$.

$\boldsymbol{f^{-1}(p) \neq \emptyset}$ **:** Sei $f(v) = p$. Nach Definition von $\widetilde{f}$ gilt dann $\widetilde{f}(v) = q$. Ersetzt man p durch q in (4.10) und (4.11), ergibt sich $M_q^v(\widetilde{f}, \widetilde{F}) = \emptyset$. Daher tritt der Fall B 2. aus Satz 4.18 ein. Man berechnet

$$\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) = f(x) & : \quad x \neq v = f^{-1}(p) \\ p = f(v) = f(x) & : \quad x = v = f^{-1}(p) \end{cases}.$$

In beiden Fällen gilt in Satz 4.18 außerdem definitionsgemäß $\widetilde{\widetilde{F}}(x) = \widetilde{F}(x) = F(x)$. □

Bemerkung Da die Aussagen und Beweise der Sätze 4.17 auf Seite 87, 4.18 auf Seite 88 und 4.19 auf Seite 91 nicht von den Orientierungen abhängen, gelten diese in entsprechender Form auch für nicht-orientierte Graphen.

4.4 Die zu einer Kontraktion induzierten Homomorphismen der Verschlingungsmoduln

In Satz 4.24 auf Seite 96 wird ein Homomorphismus $op(p, e, q)$ von dem Verschlingungsmodul Kern $G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ nach Kern G_G, dem Verschlingungsmodul von G, angegeben. Hat die Ecke p den Grad zwei, so liefert Satz 4.28 auf Seite 100 einen Homomorphismus von Kern G_G nach Kern $G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$. Dieser ist laut Satz 4.29 auf Seite 103 invers zu $op(p, e, q)$. Diese Abbildungen sind laut der Sätze 4.31 auf Seite 105, 4.32 auf Seite 107, 4.33 auf Seite 109 und 4.34 auf Seite 110 mit „hochgehobenen“ und „heruntergedrückten“ Graphenhomomorphismen verträglich.

Sind zu orientierten Graphen X, Y Eckennummerierungen w_X, w_Y und Kantennummerierungen γ_X, γ_Y gegeben, so werden in diesem Abschnitt die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{array}{llll}
I(X) & := I(X, w_X, \gamma_X), & f_X & := f_{(X,w_X,\gamma_X)}, \\
IE(X) & := IE(X, w_X, \gamma_X), & \mathcal{M}(X) & := \mathcal{M}(X, w_X, \gamma_X), \\
IV(X) & := IV(X, w_X, \gamma_X), & \mathcal{A}(X) & := \mathcal{A}(X, w_X, \gamma_X), \\
N_\cup(X) & := N_\cup(X, w_X, \gamma_X), & \Psi_X^Y & := \Psi_{(X,w_X,\gamma_X)}^{(Y,w_Y,\gamma_Y)}, \\
ad(i,X) & := ad(i, X, w_X, \gamma_X), & \widetilde{\Psi}_X^Y & := \widetilde{\Psi}_{(X,w_X,\gamma_X)}^{(Y,w_Y,\gamma_Y)}. \\
G_X & := G_{(X,w_X,\gamma_X)}, & &
\end{array}$$

Es sei $G = (V, E, g)$ ein orientierter Graph und $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ eine (p, e, q)-Kontraktion. Für diese Graphen sei die Generalvoraussetzung 4.10 auf Seite 79 mit $l_G \geq 2$ vorgelegt. Dort seien (w_X, γ_X) für $X \in \{G, \mathcal{C}_{p,e,q}(G)\}$ bijektive Nummerierungen. Darüber hinaus sei $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{G}$ ein Körper. Werden in G Berechnungen durchgeführt, so gelte $-0 := 0 \in \mathbb{G}$.

4.4.1 Die Abbildung $op(p, e, q)$

Lemma 4.20

1. *$IE(G) = \{(p, q) \in Sym(l_G) \mid \forall i \in \{1, \ldots, k_G\} : I(G)_{i,p} = 0$ oder $I(G)_{i,q} = 0\}$.*

2. *$IV(G) = \{(s, i) \in N_{l_G,k_G} \mid I(G)_{i,s} = 0\}$.*

3. *Für $(k, l) \in IE(G)$ und jedes Standardbasiselement $e_{(k,l)} \in M^{tr}(IE(G), \mathbb{G})$ gilt:*

$$G_G\left(e_{(k,l)}\right) = \sum_{(k,i)\in IV(G)} I(G)_{i,l} v_{(k,i)} + \sum_{(l,i)\in IV(G)} I(G)_{i,k} v_{(l,i)}.$$

Beweis

Zu 1.: $(p, q) \notin IE(G) \overset{2.37}{\Leftrightarrow} (p, q) \in N_\cup(G) \overset{2.4}{\Leftrightarrow} \exists i : p, q \in ad(i, G) = \{j \in \{1, \ldots, l_G\} \mid I(G)_{i,j} \in \{-0, 1, -1\}\} \Leftrightarrow \exists i : I(G)_{i,p} \neq 0 \wedge I(G)_{i,q} \neq 0$.

Zu 2.: $(s, i) \notin IV(G) \overset{2.37}{\Leftrightarrow} s \in ad(i, G) \overset{2.4}{\Leftrightarrow} I(G)_{i,s} \neq 0$.

Zu 3.: Für $(x, y) \in IV(G)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left[G_G\left(e_{(k,l)}\right)\right]_{(x,y)} &\overset{2.37}{=} \left[\mathcal{M}(G) \cdot e_{(k,l)}\right]_{(x,y)} = \sum_{(n,m)\in IE(G)} \mathcal{M}(G)_{(x,y),(n,m)} \cdot \left(e_{(k,l)}\right)_{(n,m)} \\
&= \mathcal{M}(G)_{(x,y),(k,l)} \overset{2.18}{=} \begin{cases} I(G)_{y,k} & : \quad k \in ad(y, G) \wedge l = x \\ I(G)_{y,l} & : \quad l \in ad(y, G) \wedge k = x \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(k,i)\in IV(G)} I(G)_{i,l}\left(v_{(k,i)}\right)_{(x,y)} + \sum_{(l,i)\in IV(G)} I(G)_{i,k}\left(v_{(l,i)}\right)_{(x,y)}$$

$$= \left[\sum_{(k,i)\in IV(G)} I(G)_{i,l}v_{(k,i)} + \sum_{(l,i)\in IV(G)} I(G)_{i,k}v_{(l,i)}\right]_{(x,y)}$$

□

In den folgenden Aussagen werden für $a \in \{1,\dots,|E|\}$ und $l \in \{1,\dots,|E|-1\}$ die Mengen

$$\begin{aligned}
P(a,l) &:= \left\{k \in \{1,\dots,|E|\} \mid k \neq x, \rho(a,k) \in IE(G), \rho(l,\xi^{-1}(k)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\right\},\\
N(a,l) &:= \left\{k \in \{1,\dots,|E|\} \mid k \neq x, \rho(a,k) \in IE(G), \rho(l,\xi^{-1}(k)) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\right\},\\
Y_a &:= \left\{k \in \{1,\dots,|E|-1\} \mid \rho(k,\xi^{-1}(a)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\right\} \text{ für } a \neq x,\\
P_l &:= \{k \in \{1,\dots,|E|\} \mid \rho(k,\xi(l)) \in IE(G)\} \text{ und}\\
P_x &:= \{k \in \{1,\dots,|E|\} \mid \rho(k,x) \in IE(G)\}
\end{aligned}$$

benötigt.

Lemma 4.21 *Für $k,l \in \{1,\dots,|E|-1\}$, $a \in \{1,\dots,|E|\}$ gelten:*

1. $\rho(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \implies \rho(\xi(k),\xi(l)) \in IE(G)$.
2. $P(\xi(l),l) = \left\{k \in \{1,\dots,|E|\} \mid k \neq x, \rho(l,\xi^{-1}(k)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\right\}$.
3. $P_l \backslash \{x\} = N(\xi(l),l) \cup P(\xi(l),l), \quad N(\xi(l),l) \cap P(\xi(l),l) = \emptyset$.
4. $P_x = N(x,l) \cup P(x,l), \quad N(x,l) \cap P(x,l) = \emptyset$.
5. $P(a,l) \subset P(\xi(l),l), \quad a \neq x \ : \ \xi(Y_a) = P\left(a,\xi^{-1}(a)\right)$.
6. $(\xi(l),t) \notin IV(G) \wedge \rho(x,a) \notin IE(G) \implies \rho(l,\xi^{-1}(a)) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$.
7. $(\xi(l),t) \notin IV(G) \implies P(\xi(l),l) \backslash P(x,l) = \emptyset$.

Beweis **Zu 1.:** Aus $\rho(\xi(k),\xi(l)) \notin IE(G)$ folgt, dass es ein $i \in \{1,\dots,|V|\}$ gibt mit $I(G)_{i,\xi(k)} \neq 0 \wedge I(G)_{i,\xi(l)} \neq 0$. Für $i \notin \{s,t\}$ ergibt sich daraus $\rho(k,l) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ nach Satz 4.11. Ist $i \in \{s,t\}$, so folgt $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),k} = I(G)_{t,\xi(k)} + I(G)_{s,\xi(k)}$ aus Satz 4.11. Aus der rechten Tabelle auf Seite 82 liest man jeweils $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),k} \neq 0$ ab. Tauscht man k durch l aus, ergibt sich genauso $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} \neq 0$. Insgesamt folgt $\rho(k,l) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$.

Die zweite Aussage folgt aus der Ersten. Drittens und Viertens folgen jeweils direkt aus den Definitionen der entsprechenden Mengen. Die erste Aussage von 5. folgt aus 2. Die zweite Behauptung von 5. folgt aus 1. und den Definitionen.

Zu 6.: $(\xi(l),t) \notin IV(G) \wedge \rho(x,a) \notin IE(G) \implies I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge (\exists i \in \{1,\ldots,|V|\}: I(G)_{i,x} \neq 0 \wedge I(G)_{i,a} \neq 0) \implies I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge [(I(G)_{s,x} \neq 0 \wedge I(G)_{s,a} \neq 0) \vee (I(G)_{t,x} \neq 0 \wedge I(G)_{t,a} \neq 0)] \implies I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge (I(G)_{s,a} \neq 0 \vee I(G)_{t,a} \neq 0) \implies (I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge I(G)_{s,a} \neq 0) \vee (I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge I(G)_{t,a} \neq 0) \overset{(*)}{\implies} (I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),l} = I(G)_{t,\xi(l)} + I(G)_{s,\xi(l)} \neq 0) \wedge (I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),\xi^{-1}(a)} = I(G)_{t,a} + I(G)_{s,a} \neq 0) \implies \rho(l,\xi^{-1}(a)) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$. Die Folgerung $(*)$ erhält man wie in 1.

Zu 7.: Mithilfe von 2. folgt zunächst : $a \in P(\xi(l),l) \backslash P(x,l) \Leftrightarrow a \neq x \wedge \rho(l,\xi^{-1}(a)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \wedge \rho(a,x) \notin IE(G)$. Sei nun $(\xi(l),t) \notin IV(G)$. Gibt es ein $a \in P(\xi(l),l) \backslash P(x,l)$, so erhält man einen Widerspruch zu 6. Also gilt $P(\xi(l),l) \backslash P(x,l) = \emptyset$. □

Lemma 4.22 *Für $y \in Kern\, G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$, $a \in \{1,\ldots,|E|\} \backslash \{x\}$, $b \in \{1,\ldots,|V|-1\}$ gilt*

$$\sum_{k \in Y_a} \mathcal{A}(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,\xi^{-1}(a))} \cdot y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} = 0.$$

Beweis Es werden die Abküzungen $A := \mathcal{A}(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ und $M := \mathcal{M}(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ verwendet. Für $\xi^{-1}(a) \notin \{k,l\}$ gilt $A_{(\xi^{-1}(a),\sigma^{-1}(b)),\rho(k,l)} = 0$. Man erhält daher

$$\sum_{k \in Y_a} A_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,\xi^{-1}(a))} \cdot y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} = \sum_{\rho(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))} A_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,l)} \cdot y_{\rho(k,l)} = (*).$$

Ist $(\xi^{-1}(a),b) \in IV(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$, so gilt $A_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,l)} = M_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,l)}$. Daraus folgt $(*) = 0$ wegen $y \in \mathrm{Kern}\, G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$. Wenn $(\xi^{-1}(a),b) \notin IV(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ gilt, schreibt man

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{\rho(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))} y_{\rho(k,l)} A_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,l)} + \sum_{\rho(k,l) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))} 0 \cdot A_{(\xi^{-1}(a),b),\rho(k,l)} \\ &\overset{2.39}{=} \sum_{(k,l) \in Sym(|E|-1)} \kappa(y)_{(k,l)} A_{(\xi^{-1}(a),b),(k,l)} \overset{\text{Vor.}}{=} 0.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.23 *Für $y \in Kern\, G_G$, $a \in \{1,\ldots,|E|-1\}$, $b \in \{1,\ldots,|V|\}$ gilt*

$$\sum_{k \in P_a} I(G)_{b,k} \cdot y_{\rho(k,\xi(a))} = 0.$$

Beweis Es wird hier $A := \mathcal{A}(G)$ notiert. Nach Satz 2.39 ist $\kappa(y) \in \mathrm{Kern}\, f_G$, daher gilt

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{(k,l) \in Sym(|E|)} \kappa(y)_{(k,l)} A_{(\xi(a),b),(k,l)} \\ &= \sum_{(k,l) \in IE(G)} y_{(k,l)} A_{(\xi(a),b),(k,l)} + \sum_{(k,l) \notin IE(G)} 0 \cdot A_{(\xi(a),b),(k,l)} \\ &= \sum_{\substack{\{k \in \{1,\ldots,|E|\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G)\}}} A_{(\xi(a),b),\rho(k,\xi(a))} \cdot y_{\rho(k,\xi(a))} = \sum_{k \in P_a} I(G)_{b,k} \cdot y_{\rho(k,\xi(a))}.\end{aligned}$$

□

Satz 4.24 *Die Abbildung* $op(p,e,q) : Kern\,G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} \to Kern\,G_G$*, die für* $(k,l) \in IE(G)$ *und* $y \in Kern\,G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ *durch*

$$[op(p,e,q)(y)]_{(k,l)} := \begin{cases} y_{\rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l))} & : \; k \neq x \wedge l \neq x \wedge \\ & \quad \rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \\ 0 & : \; k \neq x \wedge l \neq x \wedge \\ & \quad \rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l)) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \\ I(G)_{s,x} \sum\limits_{i \in Y_l} I(G)_{t,\xi(i)} \cdot y_{\rho(i,\xi^{-1}(l))} & : \; k = x \wedge l \neq x \\ I(G)_{s,x} \sum\limits_{i \in Y_k} I(G)_{t,\xi(i)} \cdot y_{\rho(i,\xi^{-1}(k))} & : \; k \neq x \wedge l = x \end{cases}$$

gegeben sei, ist wohldefiniert.

Beweis Zur Abkürzung seien $op := op(p,e,q)$, $e_{kl} := e_{(k,l)} \in M^{tr}(IE(G), \mathbb{G})$, $v_{si} := v_{(s,i)} \in M^{tr}(IV(G), \mathbb{G})$ und $op(y)_{kl} := op(y)_{k,l}$. Man berechnet

$$\begin{aligned} G_G(op(y)) &= G_G\left(\sum_{(k,l)\in IE(G)} op(y)_{kl} e_{kl}\right) = \sum_{(k,l)\in IE(G)} op(y)_{kl} G_G(e_{kl}) \\ &= \sum_{\substack{\{1 \leq k,l \leq |E|| \\ (k,l) \in IE(G) \wedge \\ k \neq x \wedge l \neq x\}}} op(y)_{kl} G_G(e_{kl}) + \sum_{\substack{\{l \in \{1,\ldots,|E|\}| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} op(y)_{\rho(x,l)} G_G(e_{\rho(x,l)}) \\ &= \sum_{\substack{\{(k,l) \in IE(G)| \\ k \neq x \wedge l \neq x \wedge \\ \rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\}}} y_{\rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l))} \left(\sum_{\substack{\{1 \leq i \leq |V|| \\ (k,i) \in IV(G)\}}} I(G)_{i,l} v_{ki} + \sum_{\substack{\{1 \leq i \leq |V|| \\ (l,i) \in IV(G)\}}} I(G)_{i,k} v_{li} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{\{l \in \{1,\ldots,|E|\}| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} \left[I(G)_{s,x} \left(\sum_{\tau \in Y_l} I(G)_{t,\xi(\tau)} y_{\rho(\tau,\xi^{-1}(l))} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sum_{\substack{\{i \in \{1,\ldots,|V|\}| \\ (l,i) \in IV(G)\}}} I(G)_{i,x} v_{li} + \sum_{\substack{\{i \in \{1,\ldots,|V|\}| \\ (x,i) \in IV(G)\}}} I(G)_{i,l} v_{xi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sei $(a,b) \in IV(G)$. Es ist $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = 0$ zu zeigen.

Fall A : $a \neq x$. Es gilt

$$(G_G(op(y)))_{(a,b)} = \Omega(x,a) + \sum_{\substack{\{1 \leq l \leq |E| \,|\, \rho(a,l) \in IE(G) \wedge \\ l \neq x \wedge \\ \rho(\xi^{-1}(l),\xi^{-1}(a)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\}}} y_{\rho(\xi^{-1}(l),\xi^{-1}(a))} I(G)_{b,l}$$

$$= \Omega(x,a) + \sum_{l \in P(a,\xi^{-1}(a))} y_{\rho(\xi^{-1}(a),\xi^{-1}(l))} I(G)_{b,l} \overset{\text{Lemma 4.21.5}}{=} \Omega(x,a) + \sum_{k \in Y_a} y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} I(G)_{b,\xi(k)},$$

wobei

$$\Omega(x,a) := \begin{cases} I(G)_{s,x} \left(\sum_{\tau \in Y_a} I(G)_{t,\xi(\tau)} y_{\rho(\tau,\xi^{-1}(a))}\right) I(G)_{b,x} & : \ \rho(x,a) \in IE(G) \\ 0 & : \ \rho(x,a) \notin IE(G) \end{cases}.$$

1. Fall : $a \neq x \wedge \rho(x,a) \notin IE(G)$ ($\implies a \neq x \wedge (I(G)_{s,a} \neq 0 \vee I(G)_{t,a} \neq 0)$).
Für $b \notin \{s,t\}$ gilt $I(G)_{b,\xi(k)} \overset{4.11}{=} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),k} = \mathcal{A}(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{(\xi^{-1}(a),\sigma^{-1}(b)),\rho(k,\xi^{-1}(a))}$, also $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = 0$ nach Lemma 4.22. Im folgenden trete zunächst der Fall $I(G)_{s,a} \neq 0$ ein. Sei $b = t$. Es gilt dann $I(G)_{b,\xi(k)} + I(G)_{s,\xi(k)} = I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),k}$ nach Satz 4.11. Mit

$$\Sigma_1 := \sum_{k \in Y_a} y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),k} \quad \text{und}$$
$$\Sigma_2 := \sum_{k \in Y_a} y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} I(G)_{s,\xi(k)}$$

erhält man $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = \Sigma_1 - \Sigma_2$. Nach Lemma 4.22 ist $\Sigma_1 = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} k \in Y_a \quad &\implies \quad \rho(k,\xi^{-1}(a)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \overset{4.21.1}{\implies} \rho(a,\xi(k)) \in IE(G) \\ &\implies \quad I(G)_{s,\xi(k)} = 0 \vee I(G)_{s,a} = 0 \overset{I(G)_{s,a} \neq 0}{\implies} I(G)_{s,\xi(k)} = 0 \end{aligned}$$

ist auch $\Sigma_2 = 0$. Der Fall $b = s$ tritt hier nicht ein, denn sonst folgt $I(G)_{s,a} = 0$ aus $(a,b) = (a,s) \in IV(G)$.

Vertauscht man im obigen Fall $I(G)_{s,a} \neq 0$ die Rollen von s und t und schreibt $\sigma^{-1}(t)$ statt $\sigma^{-1}(b)$, so erhält man genauso $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = 0$ für $I(G)_{t,a} \neq 0$.

2. Fall : $a \neq x \wedge \rho(x,a) \in IE(G)$.
Sei zunächst $(x,b) \in IV(G)$. Es gilt demnach $I(G)_{b,x} = 0$ und daher auch $\Omega(x,a) = 0$. Da hier $b \notin \{s,t\}$ gilt, erhält man $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = 0$ wie im ersten Fall. Tritt $(x,b) \notin IV(G)$ ein, so folgt $I(G)_{b,x} \in \{1,-1\}$, denn $I(G)_{b,x} \neq -0$. Also muss $b = s$ oder $b = t$ gelten. Sei vorerst $b = t$. Aus $I(G)_{s,x} I(G)_{t,x} = -1$ folgt sofort $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = 0$. Im Fall $b = s$ ergibt sich $(G_G(op(y)))_{(a,b)} = \sum_{k \in Y_a} y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} \left(I(G)_{t,\xi(k)} + I(G)_{s,\xi(k)}\right) \overset{\text{Satz 4.11}}{=}$ $\sum_{k \in Y_a} y_{\rho(k,\xi^{-1}(a))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(t),k} \overset{\text{Lemma 4.22}}{=} 0$.

Fall B: $a = x$. Sei $(x,b) \in IV(G)$. Dann gilt

$$(G_G(op(y))_{(a,b)} = \sum_{\substack{\{1 \leq l \leq |E|| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{b,l} \left(\sum_{k \in Y_l} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(G)_{t,\xi(k)} \right) = (*).$$

Nun sei $y_{\rho(\alpha,\beta)} := 0$ für $\rho(\alpha,\beta) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ und $1 \leq \alpha, \beta \leq |E| - 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(*) = & \sum_{\substack{\{1 \leq l \leq |E|| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{b,l} \left(\sum_{1 \leq k \leq |E|-1} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(G)_{t,\xi(k)} \right) \\
= & \sum_{1 \leq k \leq |E|-1} \sum_{\substack{\{1 \leq l \leq |E|| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(G)_{s,x} I(G)_{b,l} I(G)_{t,\xi(k)} \\
= & \sum_{1 \leq k \leq |E|-1} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \sum_{\substack{\{1 \leq l \leq |E|| \\ \rho(x,l) \in IE(G)\}}} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(G)_{b,l} \\
\overset{\text{Satz 4.11, } b \neq t}{=} & \sum_{\substack{\{1 \leq k \leq |E|-1| \\ (\xi(k),t) \notin IV(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \left(\sum_{l \in P_x} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),\xi^{-1}(l)} \right) \\
\overset{\text{Lemma 4.21.4}}{=} & \sum_{\substack{\{1 \leq k \leq |E|-1| \\ (\xi(k),t) \notin IV(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \left(\sum_{l \in P(x,k)} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),\xi^{-1}(l)} \right) \\
\overset{\text{Lemma 4.21.5}}{=} & \sum_{\substack{\{1 \leq k \leq |E|-1| \\ (\xi(k),t) \notin IV(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \left(\sum_{l \in P(\xi(k),k)} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),\xi^{-1}(l)} \right. \\
& \left. - \sum_{l \in P(\xi(k),k) \setminus P(x,k)} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),\xi^{-1}(l)} \right) \\
\overset{\substack{\text{Lemma 4.21.5} \\ 4.21.7}}{=} & \sum_{\substack{\{1 \leq k \leq |E|-1| \\ (\xi(k),t) \notin IV(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \left(\sum_{\substack{l \in P(\xi(k),k) \\ = \xi(Y_{\xi(k)})}} y_{\rho(k,\xi^{-1}(l))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),\xi^{-1}(l)} \right) \\
\overset{l' := \xi^{-1}(l)}{=} & \sum_{\substack{\{1 \leq k \leq |E|-1| \\ (\xi(k),t) \notin IV(G)\}}} I(G)_{s,x} I(G)_{t,\xi(k)} \underbrace{\left(\sum_{l' \in Y_{\xi(k)}} y_{\rho(k,l')} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{\sigma^{-1}(b),l'} \right)}_{\overset{\text{Lemma 4.22}}{=} 0} = 0.
\end{aligned}$$

□

4.4.2 Die Abbildung $po(p, e, q)$

Für $l \in \{1, \ldots, |E| - 1\}$ seien die Mengen

$$B(x, l, s) := \{k \in \{1, \ldots, |E|\} | k \neq x, \rho(k, \xi(l)) \in IE(G), (k, s) \notin IV(G), (k, t) \in IV(G)\},$$
$$B(x, l, t) := \{k \in \{1, \ldots, |E|\} | k \neq x, \rho(k, \xi(l)) \in IE(G), (k, t) \notin IV(G), (k, s) \in IV(G)\}$$

vorgelegt. In den Lemmata 4.26, 4.27 und im Satz 4.28 wird die Bedingung $\deg_G(p) = 2$ gefordert. In diesem Zusammenhang sei $Inz(p, G) = \{f, e\}$, $f \neq e$, $\nu g(f) = \{p, r\}$, $\gamma_G(f) =: e_z$ und $w_G(r) =: v_u$.

Lemma 4.25 *Für $l \in \{1, \ldots, |E| - 1\}$ gelten die Implikationen*

1. $(\xi(l), s) \in IV(G) \wedge (\xi(l), t) \notin IV(G) \implies N(\xi(l), l) = B(x, l, s)$,
2. $(\xi(l), s) \notin IV(G) \wedge (\xi(l), t) \in IV(G) \implies N(\xi(l), l) = B(x, l, t)$,
3. $(\xi(l), s) \in IV(G) \wedge (\xi(l), t) \in IV(G) \implies N(\xi(l), l) = \emptyset$,
4. $(\xi(l), s) \notin IV(G) \wedge (\xi(l), t) \notin IV(G) \implies N(\xi(l), l) = \emptyset$.

Beweis Die folgenden Umformungen beweisen das Lemma:

$$\begin{aligned}
k \in N(\xi(l), l) \Leftrightarrow\ & k \neq x \wedge \big(\forall j \in \{1, \ldots, |E|\} : I(G)_{j,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{j,k} = 0\big) \\
& \wedge \big(\exists i \in \{1, \ldots, |E| - 1\} : I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{i,l} \neq 0 \wedge I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{i,\xi^{-1}(k)} \neq 0\big) \\
\Leftrightarrow\ & k \neq x \wedge \big(\forall j \in \{1, \ldots, |E|\} : I(G)_{j,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{j,k} = 0\big) \\
& \wedge \big(I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0\big) \wedge (I(G)_{s,k} + I(G)_{t,k} \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & k \neq x \wedge \big(\forall j \in \{1, \ldots, |E|\} \backslash \{s, t\} : I(G)_{j,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{j,k} = 0\big) \\
& \wedge \big(I(G)_{s,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{s,k} = 0\big) \wedge \big(I(G)_{t,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{t,k} = 0\big) \\
& \wedge \big(I(G)_{s,\xi(l)} + I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0\big) \wedge (I(G)_{s,k} + I(G)_{t,k} \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & k \neq x \wedge \big(\forall j \in \{1, \ldots, |E|\} \backslash \{s, t\} : I(G)_{j,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{j,k} = 0\big) \\
& \wedge \big[\big(I(G)_{s,\xi(l)} = 0 \wedge I(G)_{t,k} = 0 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} \neq 0 \wedge I(G)_{s,k} \neq 0\big) \\
& \vee \big(I(G)_{s,k} = 0 \wedge I(G)_{t,\xi(l)} = 0 \wedge I(G)_{s,\xi(l)} \neq 0 \wedge I(G)_{t,k} \neq 0\big)\big] \\
\Leftrightarrow\ & k \neq x \wedge \big(\forall j \in \{1, \ldots, |E|\} \backslash \{s, t\} : I(G)_{j,\xi(l)} = 0 \vee I(G)_{j,k} = 0\big) \\
& \wedge [((\xi(l), s) \in IV(G) \wedge (k, t) \in IV(G) \wedge (\xi(l), t) \notin IV(G) \wedge (s, k) \notin IV(G)) \\
& \vee ((\xi(l), t) \in IV(G) \wedge (k, s) \in IV(G) \wedge (\xi(l), s) \notin IV(G) \wedge (t, k) \notin IV(G))] \\
\Leftrightarrow\ & [(\xi(l), s) \in IV(G) \wedge (\xi(l), t) \notin IV(G) \wedge k \in B(x, l, s)] \\
& \vee [(\xi(l), t) \in IV(G) \wedge (\xi(l), s) \notin IV(G) \wedge k \in B(x, l, t)] .
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.26 *Für $y \in Kern\, f_G$, $a \in \{1, \ldots, |E|\}$ und $\deg_G(p) = 2$ gilt $y_{\rho(a,x)} I(G)_{s,x} + y_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z} = 0$.*

Beweis Es sei $A := \mathcal{A}(G)$.

$$0 = f_G(y) = \sum_{\substack{\{1 \le k, l \le |E| \mid \\ (k,l) \in Sym(|E|)\}}} A(G)_{(a,s),(k,l)} y_{(k,l)} = \sum_{\substack{\{1 \le l \le |E| \mid \\ \rho(a,l) \in Sym(|E|)\}}} A(G)_{(a,s),\rho(a,l)} y_{\rho(a,l)}$$

$$= \sum_{1 \le l \le |E|} I(G)_{s,l} y_{\rho(a,l)} = y_{\rho(a,x)} I(G)_{s,x} + y_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z}.$$

□

Lemma 4.27 *Für $y \in Kern\, G_G$, $a \in \{1, \ldots, |E|\}$ und $\deg_G(p) = 2$ gelten*

1. $\rho(x,a),\ \rho(z,a) \in IE(G) \implies y_{\rho(z,a)} I(G)_{s,z} + y_{\rho(x,a)} I(G)_{s,x} = 0,$
2. $\rho(x,a) \notin IE(G) \wedge \rho(z,a) \in IE(G) \implies y_{\rho(a,z)} = 0,$
3. $\rho(x,a) \in IE(G) \wedge \rho(z,a) \notin IE(G) \implies y_{\rho(x,a)} = 0.$

Beweis Im ersten Fall gilt $y_{\rho(x,a)} I(G)_{s,x} \overset{2.39}{=} \kappa(y)_{\rho(x,a)} I(G)_{s,x} \overset{4.26}{=} -\kappa(y)_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z}$ $= -y_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z}$. Im zweiten Fall erhält man $y_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z} = k(y)_{\rho(a,z)} I(G)_{s,z} \overset{\text{Lemma 4.26}}{=}$ $-\kappa(y)_{\rho(a,x)} I(G)_{s,x} = 0$. Wegen $I(G)_{s,z} \neq 0$ folgt daraus $y_{\rho(a,z)} = 0$. Dementsprechend zeigt man die dritte Aussage. □

Satz 4.28 *Für $\deg_G(p) = 2$ ist die Abbildung $po(p,e,q) : Kern\, G_G \to Kern\, G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$, $[po(p,e,q)(y)]_{(k,l)} := y_{\rho(\xi(k),\xi(l))}$, $(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ wohldefiniert.*

Beweis Es werden die Abkürzungen $po := po(p,e,q)$ und $v_{si} := v_{(s,i)}$ benutzt. Zunächst ist $\rho(\xi(k), \xi(l)) \in IE(G)$ nach Lemma 4.21.1. Zu zeigen bleibt $G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(po(y)) = 0$.

$$G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(po(y)) = \sum_{(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))} po(y)_{(k,l)} G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(e_{(k,l)})$$

$$\overset{4.20.3.}{=} \sum_{\substack{(k,l) \in \\ IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))}} y_{\rho(\xi(k),\xi(l))} \Bigg(\sum_{\substack{(k,i) \in \\ IV(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))}} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{i,l} v_{ki} + \sum_{\substack{(l,i) \in \\ IV(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))}} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{i,k} v_{li} \Bigg).$$

Sei nun $(a,b) \in IV(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$. Zu zeigen ist $\big(G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(po(y))\big)_{(a,b)} = 0$. Dazu berechnet man

$$\big(G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(po(y))\big)_{(a,b)} = \sum_{\substack{\{1 \le k \le |E|-1 \mid \\ \rho(a,k) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\}}} y_{\rho(\xi(a),\xi(k))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,k}$$

$$= \sum_{k \in Y_{\xi(a)}} y_{\rho(\xi(a),\xi(k))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,k} \overset{\substack{\text{Lemma}\\ 4.21.5}}{=} \sum_{k \in P(\xi(a),a)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,\xi^{-1}(k)} =: (*).$$

Fall A : $\rho(x,\xi(a)) \notin IE(G)$. Es gilt $x \notin P_a$, also $P_a \setminus \{x\} = P_a$. Mit 4.21.3 folgt

$$(*) = \sum_{k \in P_a} y_{\rho(k,\xi(a))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,\xi^{-1}(k)} - \sum_{k \in N(\xi(a),a)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,\xi^{-1}(k)} =: (*_1).$$

1. Fall : $\sigma(b) = t$. Mit Satz 4.11 folgt

$$(*_1) \quad = \overbrace{\sum_{k \in P_a} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{t,k}}^{\text{Lemma 4.23}\atop = 0} + \overbrace{\sum_{k \in P_a} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k}}^{\text{Lemma 4.23}\atop = 0} - \sum_{k \in N(\xi(a),a))} y_{\rho(k,\xi(a))} (I(G)_{t,k} + I(G)_{s,k}).$$

Es werden nun die vier Fälle aus Lemma 4.25 betrachtet. Tritt dort 3 bzw. 4 für $l = a$ ein, so ist $(*_1)$ eine leere Summe, also $(*) = 0$. Im Fall 4.25.1 erhält man

$$\begin{aligned}
-(*_1) = & \sum_{k \in B(x,a,s)} y_{\rho(k,\xi(a))} (\overbrace{I(G)_{t,k}}^{=0} + I(G)_{s,k}) = \sum_{\substack{\{k \in \{1,\dots,|E|\} \setminus \{x\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G) \wedge \\ (k,s) \notin IV(G) \wedge (k,t) \in IV(G)\}}} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k} \\
& + \sum_{\substack{\{k \in \{1,\dots,|E|\} \setminus \{x\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G) \wedge \\ (k,s) \notin IV(G) \wedge (k,t) \notin IV(G)\}}} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k} - \sum_{\substack{\{k \in \{1,\dots,|E|\} \setminus \{x\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G) \wedge \\ (k,s) \notin IV(G) \wedge (k,t) \notin IV(G)\}}} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k} \\
\overset{\substack{(k,s) \in IV(G) \\ \Rightarrow I(G)_{k,s} = 0}}{=} & \underbrace{\sum_{\substack{P_a = \{k \in \{1,\dots,|E|\} \setminus \{x\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G)\}}} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k}}_{\text{Lemma 4.23}\atop = 0} - \underbrace{\sum_{\substack{\{k \in \{1,\dots,|E|\} \setminus \{x\} | \\ \rho(k,\xi(a)) \in IE(G) \wedge \\ (k,s) \notin IV(G) \wedge (k,t) \notin IV(G)\}}} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{s,k}}_{=:(**)}.
\end{aligned}$$

Die Indexmenge der Summe $(**)$ ist leer: Angenommen es gibt ein k aus dieser Menge, d.h. es gilt $I(G)_{t,k} \neq 0$. Damit folgt $I(G)_{t,k} \neq 0 \wedge I(G)_{t,\xi(a)} \neq 0$ aus $(\xi(a),t) \notin IV(G)$ (4.25.1.). Also muss $\rho(k,\xi(a)) \notin IE(G)$ im Widerspruch zur Annahme gelten. Es folgt $(**) = 0$, also insgesamt $(*) = 0$.

Vertauscht man in der obigen Argumentation ab $-(*_1) = \cdots$ die Rollen von s und t, so erhält man $(*) = 0$ für den Fall 4.25.2.

2. Fall : $\sigma(b) \neq t$. Mit Satz 4.11 folgt

$$(*_1) \;=\; \overbrace{\sum_{k \in P_a} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k}}^{\text{Lemma 4.23}\atop = 0} \;-\; \sum_{k \in N(\xi(a),a))} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k}.$$

Wie im ersten Fall ergibt sich $(*_1) = 0$ für 4.25.3 und 4.25.4. Wegen $Inz\left(v_s, \left(\mathcal{V}_{|V|}, \mathcal{E}_{|E|}, h_G\right)\right)$ $= \{e_x, e_z\}$ gilt

$$k \neq x \wedge (k,s) \notin IV(G) \implies I(G)_{s,k} \neq 0 \wedge k \neq x \overset{\deg_G(p)=2}{\implies} k = z, \tag{4.12}$$

und man berechnet im Fall 4.25.1:

$$-(*_1) = \sum_{k \in B(x,a,s)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k}$$

$$\overset{(4.12)}{=} \begin{cases} 0 & : \rho(z,\xi(a)) \notin IE(G) \text{ (leere Summe)} \\ y_{\rho(z,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),z} \overset{(***)}{=} 0 & : \rho(z,\xi(a)) \in IE(G) \end{cases}.$$

Die Gleichung $(***)$ erhält man aus $\rho(z,\xi(a)) \in IE(G)$, $\rho(x,\xi(a)) \notin IE(G)$ und Lemma 4.27.2. Tritt 4.25.2 ein, so folgt $I(G)_{s,\xi(a)} \neq 0$. Wegen $x \notin \operatorname{Bild}\xi$ und $\deg_G(p) = 2$ muss daher $\xi(a) = z$ gelten. So erhält man die zweite Gleichung in folgender Rechnung:

$$-(*_1) = \sum_{k \in B(x,a,t)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k} = \sum_{k \in B(x,\xi^{-1}(z),t)} y_{\rho(z,k)} I(G)_{\sigma(b),k}.$$

Für $B(x,\xi^{-1}(z),t) = \emptyset$ gilt $(*_1) = 0$. Andernfalls gibt es ein $k \in B(x,\xi^{-1}(z),t)$, d.h. $\rho(z,k) \in IE(G)$ und $\rho(x,k) \notin IE(G)$ (wegen $(k,t) \notin IV(G) \wedge (x,t) \notin IV(G)$). Aus Lemma 4.27.2 folgt dann $y_{\rho(z,k)} = 0$. Also $(*_1) = 0$.

Fall B : $\rho(x,\xi(a)) \in IE(G)$. Daraus folgt $(\xi(a),s),(\xi(a),t) \in IV(G)$ nach 4.20.1. Daher gilt $N(\xi(a),a)) = \emptyset$ nach Lemma 4.25.3.

1. Fall : $\sigma(b) \neq t$. Mithilfe von Satz 4.11 läßt sich $(*)$ von Seite 101 schreiben als:

$$\begin{aligned}(*) \quad &= \sum_{k \in P(\xi(a),a)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k} + \sum_{k \in N(\xi(a),a)} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k} \\ &\overset{\text{Lemma 4.21.3}}{=} -y_{\rho(x,\xi(a))} \cdot \underbrace{I(G)_{\sigma(b),x}}_{=0,\text{denn} \atop \sigma(b) \notin \{s,t\}} + \underbrace{\sum_{k \in P_a} y_{\rho(k,\xi(a))} I(G)_{\sigma(b),k}}_{\text{Lemma 4.23} \atop = 0} = 0.\end{aligned}$$

2. Fall : $\sigma(b) = t$. Nach Satz 4.11 gilt $I(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))_{b,\xi^{-1}(k)} = I(G)_{tk} + I(G)_{sk}$. Wie im ersten Fall ergänzt man die Summe $(*)$ von Seite 101 mit $\sum_{k \in N(\xi(a),a)}(\cdots)$. Aus $I(G)_{t,x} + I(G)_{s,x} = -0 = 0 \in \mathbb{G}$ folgt $(*) = 0$ wie im ersten Fall. $\square$

Satz 4.29 *Die Abbildungen $op(p,e,q)$ und $po(p,e,q)$ sind Homomorphismen. Für $\deg_G(p) = 2$ gelten $op(p,e,q) \circ po(p,e,q) = id_{Kern\, G_G}$ und $po(p,e,q) \circ op(p,e,q) = id_{Kern\, G_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}}$.*

Beweis In $M^{tr}(\alpha, \mathbb{G})$, $\alpha \in \{IE(G), IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))\}$ sind die Verknüpfungen komponentenweise definiert, daher handelt es sich um Homomorphismen. Für $(k,l) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ gilt definitionsgemäß $po(op(y))_{(k,l)} = op(y)_{\rho(\xi(k),\xi(l))} = y_{(k,l)} = id(y)_{(k,l)}$. Zu zeigen bleibt $op(po(y))_{(k,l)} = id(y)_{(k,l)}$ für $(k,l) \in IE(G)$.

1.Fall : $k \neq x$, $l \neq x$ und $\rho(\xi^{-1}(k), \xi^{-1}(l)) \in IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$. Definitionsgemäß folgt $op(po(y))_{(k,l)} = po(y)_{\rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l))} = y_{(k,l)} = id(y)_{(k,l)}$.

2.Fall : $k \neq x$, $l \neq x$ und $\rho(\xi^{-1}(k), \xi^{-1}(l)) \notin IE(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad k \in N(l, \xi^{-1}(l)) \wedge l \in N(k, \xi^{-1}(k)) \\
&\overset{4.25}{\Rightarrow}\quad \Big(k \in B(x, \xi^{-1}(l), s) \vee k \in B(x, \xi^{-1}(l), t)\Big) \wedge \Big(l \in B(x, \xi^{-1}(k), s) \vee l \in B(x, \xi^{-1}(k), t)\Big) \\
&\Rightarrow\quad \Big(k \in B(x, \xi^{-1}(l), s) \wedge l \in B(x, \xi^{-1}(k), s)\Big) \vee \Big(k \in B(x, \xi^{-1}(l), s) \wedge l \in B(x, \xi^{-1}(k), t)\Big) \\
&\quad\vee \Big(k \in B(x, \xi^{-1}(l), t) \wedge l \in B(x, \xi^{-1}(k), s)\Big) \vee \Big(k \in B(x, \xi^{-1}(l), t) \wedge l \in B(x, \xi^{-1}(k), t)\Big) \\
&\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}\quad \Big(k = z \wedge l = z\Big) && (4.13) \\
&\quad\vee \Big(k = z \wedge \rho(x,l) \notin IE(G)\Big) \vee \Big(\rho(x,k) \notin IE(G) \wedge l = z\Big) && (4.14) \\
&\quad\vee \Big((k,t) \notin IV(G) \wedge (l,t) \notin IV(G)\Big) && (4.15)
\end{aligned}
$$

Aus (4.14) folgt $y_{\rho(k,l)} = 0$ mit Lemma 4.27.2. Die Aussagen (4.13) und (4.15) bilden jeweils einen Widerspruch zur Voraussetzung $(k,l) \in IE(G)$. Außerdem gilt in diesem Fall $op(po(y))_{(k,l)} = 0$ nach Definition der Abbildung op.

3. Fall : $k = x$ und $l \neq x$. (Analog: $k \neq x, l = x$).

$$
\begin{aligned}
op(po(y)_{\rho(x,l)} &= I(G)_{s,x} \sum_{i \,\in\, Y_l} po(y)_{\rho(i,\xi^{-1}(l))} I(G)_{t,\xi(i)} \\
&= I(G)_{s,x} \sum_{i \,\in\, Y_l} y_{\rho(l,\xi(i))} I(G)_{t,\xi(i)} \\
&\overset{\text{Lemma 4.21.5}}{=} I(G)_{s,x} \sum_{j \,\in\, P(l,\xi^{-1}(l))} y_{\rho(j,l)} I(G)_{t,j} \\
&\overset{(*)}{=} I(G)_{s,x} \sum_{j \,\in\, P_{\xi^{-1}(l)} \setminus \{x\}} y_{\rho(j,l)} I(G)_{t,j} && (4.16) \\
&= I(G)_{s,x} \Bigg(- y_{\rho(l,x)} I(G)_{t,x} + \underbrace{\sum_{j \,\in\, P_{\xi^{-1}(l)}} y_{\rho(j,l)} I(G)_{t,j}}_{=0 \text{ nach Lemma 4.23}} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$= \qquad -I(G)_{s,x}I(G)_{t,x}y_{(x,l)} = id(y)_{(x,l)}.$$

Zu $(*)$: Es tritt einer der Fälle aus Lemma 4.25 auf Seite 99 ein. Sowohl in 3. als auch in 4. gilt $(*)$ nach Lemma 4.21.3. auf Seite 94. Sei nun $j \in N\left(l, \xi^{-1}(l)\right) \neq \emptyset$. Tritt 1. ein, so gilt $(j,t) \in IV(G)$, also $I(G)_{t,j} = 0$. Tritt 2. ein, so gilt $(l,s) \notin IV(G)$ und $(j,t) \notin IV(G)$. Mit

1. $(j,t) \notin IV(G), (x,t) \notin IV(G) \implies \rho(j,x) \notin IE(G)$ und
2. $(l,s) \notin IV(G), (z,s) \notin IV(G), l \neq x, z \neq x \overset{\deg_G(p)=2}{\implies} l = z \implies \rho(j,z) \in IE(G)$

folgert man $y_{\rho(j,z)} = y_{\rho(j,l)} = 0$ mit Lemma 4.27.2. auf Seite 100.

Mithilfe von Lemma 4.21.3 läßt sich dann die Indexmenge wie in (4.16) schreiben. □

4.4.3 Verträglichkeit der induzierten Homomorphismen

Lemma 4.30 *Vorgelegt sei die Situation aus 2.1 auf Seite 27. Dabei seien die Graphen G und H bijektiv nummeriert und $(f,F) : G \to H$ injektiv. Für $e_{(k,l)} \in M^{tr}\left(IE(G), \mathbb{G}\right)$ gilt $\Psi_G^H\left(e_{(k,l)}\right) = e_{\rho(\Psi(k),\Psi(l))}$.*

Beweis Zunächst gilt $\rho\left(\Psi(k), \Psi(l)\right) \in IE(H)$, nach Lemma 2.43 auf Seite 57, denn $\Psi = \gamma_H F \gamma_G^{-1}$ ist injektiv. Seien $p, q \in \operatorname{Bild}\Psi$. Dann berechnet man für $(p,q) \in IE(H)$:

$$\begin{aligned}
\left[\Psi_G^H\left(e_{(k,l)}\right)\right]_{(p,q)} &\overset{2.42}{=} \sum_{(m,n)\in N_{(p,q)}\cap IE(G)} \left[e_{(k,l)}\right]_{(m,n)} \\
&\overset{\Psi \text{ inj.}, 2.43}{=} \left[e_{(k,l)}\right]_{\rho(\Psi^{-1}(p),\Psi^{-1}(q))} \\
&= \begin{cases} 0 &: (k,l) \neq \rho\left(\Psi^{-1}(p), \Psi^{-1}(q)\right) \\ 1 &: (k,l) = \rho\left(\Psi^{-1}(p), \Psi^{-1}(q)\right) \end{cases} \\
&= \left.\begin{cases} 0 &: (p,q) \neq \rho\left(\Psi(k), \Psi(l)\right) \\ 1 &: (p,q) = \rho\left(\Psi(k), \Psi(l)\right) \end{cases}\right\} = \left[e_{\rho(\Psi(k),\Psi(l))}\right]_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

Ist $p \notin \operatorname{Bild}\Psi$ oder $q \notin \operatorname{Bild}\Psi$, so sind beide Seiten der Behauptung definitionsgemäß Null. □

Um in den folgenden Sätzen die Formulierungen abzukürzen, werden nun einige Sprechweisen vereinbart. Gegeben sei dazu ein Homomorphismus $(a,A) : Y \to Z$ orientierter Graphen $Y = (V_Y, E_Y, g_Y)$ und $Z = (V_Z, E_Z, g_Z)$.

In (der Generalvoraussetzung) 2.1 sei a gegeben durch $(b\,; c)$ bedeutet, dass in 2.1 auf Seite 27 das linke Diagramm in (2.1) sowie (2.2) vorgelegt ist, wobei G durch Y, H durch Z, f durch a, ϕ durch b und ψ durch c ersetzt wird.

In (der Generalvoraussetzung) 2.1 sei A **gegeben durch** $(B\,;C)$ bedeutet, dass in 2.1 auf Seite 27 das rechte Diagramm in (2.1) sowie (2.3) vorgelegt ist, wobei dort G durch Y, H durch Z, F durch A, Φ durch B und Ψ durch C ersetzt wird.

Zu dem Graphen Y sei nun eine (v,z,w)-Kontraktion $\mathcal{C}_{v,z,w}(Y)$ definiert.

In (der Generalvoraussetzung) 4.10 sei $i\,(v,V_Y)$ **gegeben durch** $(B\,;b;s';t')$ bedeutet, dass in 4.10 auf Seite 79 das linke Diagramm von (4.1) sowie (4.2) vorgelegt ist, wobei dort G durch Y, Σ durch B, σ durch b und s durch s' ersetzt wird. Außerdem soll $w_Y(v)=v_{s'}$ und $w_Y(w)=v_{t'}$ gelten.

In (der Generalvoraussetzung) 4.10 sei $j\,(z,E_Y)$ **gegeben durch** $(C\,;c;x')$ bedeutet, dass in 4.10 auf Seite 79 das rechte Diagramm von (4.1) sowie (4.3) vorgelegt ist, wobei dort G durch Y, Ξ durch C, ξ durch c und x durch x' ersetzt wird. Außerdem soll dort $\gamma_Y(z)=e_{x'}$ gelten.

Satz 4.31 *Für $X\in\{G,H,K,L\}$ sei $X=(V_X,E_X,g_X)$ ein mittels (w_X,γ_X) bijektiv nummerierter orientierter Graph. Sei $e\in E_G$, $\nu g_G(e)=\{p,q\}$, $p\neq q$ und $(f,F):G\to H$ ein injektiver Homomorphismus. Darüber hinaus sei $K:=\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$, $L:=\mathcal{C}_{f(p),F(e),f(q)}(H)$ und $(f(p,e,q),F(p,e,q)):K\to L$ der Homomorphismus aus Satz 4.16 auf Seite 86. Die Abbildungen f,F seien in der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 durch $(\phi;\psi)$ bzw. $(\Phi;\Psi)$ und die Abbildungen $f(p,e,q),F(p,e,q)$ in 2.1 durch $(\phi';\psi')$ bzw. $(\Phi';\Psi')$ gegeben. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} Kern\,G_G \arrow[r, "\Psi_G^H"] & Kern\,G_H \\ Kern\,G_K \arrow[u, "op(p,e,q)"] \arrow[r, "{\Psi'}_K^L"] & Kern\,G_L \arrow[u, "op(f(p),F(e),f(q))"'] \end{tikzcd} .$$

Beweis In der Generalvoraussetzung 4.10 auf Seite 79 sei

$$j\,(e,E_G) \quad \text{gegeben durch} \quad (\Xi;\xi;x)\,, \tag{4.17}$$

$$i\,(p,V_G) \quad \text{gegeben durch} \quad (\Sigma;\sigma;s;t)\,, \tag{4.18}$$

$$j\,(F(e),E_H) \quad \text{gegeben durch} \quad \left(\Xi';\xi';x'\right) \quad \text{und} \tag{4.19}$$

$$i\,(f(p),V_H) \quad \text{gegeben durch} \quad \left(\Sigma';\sigma';s';t'\right). \tag{4.20}$$

Zum Beweis der Behauptung benötigt man einige Vorbetrachtungen:

1. $\forall c\in E_K=E_G\backslash\{e\}: F\circ j(e,E_G)(c)=F(c)=F(p,e,q)(c)\overset{F(p,e,q)\text{ inj.}}{=} j\,(F(e),E_H)\circ F(p,e,q)(c) \implies \Psi\circ\xi=\xi'\circ\Psi'$.

2. $\forall v \in V_K = V_G \setminus \{p\} : f \circ i(p, V_G)(v) = f(v) = f(p,e,q)(v) = i\left(f(p), V_H\right) \circ f(p,e,q)(v) \implies \psi \circ \sigma = \sigma' \circ \psi'$.

3. $(4.17) \Rightarrow e_x \in \mathcal{E}_{l_G} \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} e_{\Psi(x)} = \Phi(e_x) \overset{(4.17)}{=} \Phi\gamma_G(e) \overset{\text{Vor.}}{=} \gamma_H F(e) \overset{(4.19)}{=} e_{x'} \implies \Psi(x) = x'$.

4. $(4.18) \Rightarrow v_s \in \mathcal{V}_{k_G} \Rightarrow v_{\psi(s)} \overset{\text{Vor.}}{=} \phi(v_s) \overset{(4.18)}{=} \phi w_G(p) \overset{\text{Vor.}}{=} w_H f(p) \overset{(4.20)}{=} v_{s'} \implies \psi(s) = s'$.

5. $(4.18) \Rightarrow v_t \in \mathcal{V}_{k_G} \Rightarrow v_{\psi(t)} \overset{\text{Vor.}}{=} \phi(v_t) \overset{(4.18)}{=} \phi w_G(q) \overset{\text{Vor.}}{=} w_H f(q) \overset{(4.20)}{=} v_{t'} \implies \psi(t) = t'$.

6. $j \neq x : \Psi(j) = i \Leftrightarrow j = \Psi^{-1}(i) \Leftrightarrow \xi^{-1}(j) = \xi^{-1}\Psi^{-1}(i) \overset{1.}{\Leftrightarrow} \xi^{-1}(j) = \Psi'^{-1}\xi'^{-1}(i)$.

7. $\Psi(l') = l : l \neq x' \overset{3.}{\Leftrightarrow} \Psi(l') \neq \Psi(x) \overset{\Psi \text{ inj.}}{\Leftrightarrow} l' \neq x$.

8. $\Psi(l') = l \neq x' : \xi'^{-1}(l) \in \operatorname{Bild}\Psi' \Leftrightarrow \exists j : \Psi'(j) = \xi'^{-1}(l) \Leftrightarrow \exists j : j = \Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l) \overset{1.}{=} \xi^{-1}\Psi^{-1}(l) \Leftrightarrow \exists j : \xi(j) = \Psi^{-1}(l) = l' \Leftrightarrow l' \in \operatorname{Bild}\xi$.

9. $i \in Y_{\Psi^{-1}(l)} \overset{\text{S. 94}}{\Leftrightarrow} \rho\left(i, \xi^{-1}\Psi^{-1}(l)\right) \in IE(K) \overset{2.43}{\Leftrightarrow} \rho\left(\Psi'(i), \Psi'\Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l)\right) \in IE(L) \Leftrightarrow \rho\left(\Psi'(i), \xi'^{-1}(l)\right) \in IE(L) \overset{\text{S. 94}}{\Leftrightarrow} \Psi'(i) \in Y_l$.

Für $y \in \operatorname{Kern} G_K$ und $(k,l) \in IE(H)$ ist

$$\left[\Psi_G^H\left(op\left(p,e,q\right)(y)\right)\right]_{(k,l)} = \left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{(k,l)} \tag{4.21}$$

zu zeigen. Es werden beide Seiten berechnet. Die linke Seite von (4.21) lässt sich als

$$\left[\Psi_G^H\left(op\left(p,e,q\right)\right)\right]_{(k,l)} = \begin{cases} op(p,e,q)(y)_{\rho(\Psi^{-1}(k),\Psi^{-1}(l))} & : \quad k,l \in \operatorname{Bild}\Psi \\ 0 & : \quad k \notin \operatorname{Bild}\Psi \vee l \notin \operatorname{Bild}\Psi \end{cases}$$

schreiben. Für die rechte Seite von (4.21) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{(k,l)} \\ &= \begin{cases} 0 & : \quad k \neq x', l \neq x', \rho\left(\xi'^{-1}(k), \xi'^{-1}(l)\right) \notin IE(L) \\ \Psi'^L_K(y)_{\rho\left(\xi'^{-1}(k),\xi'^{-1}(l)\right)} & : \quad k \neq x', l \neq x', \rho\left(\xi'^{-1}(k), \xi'^{-1}(l)\right) \in IE(L) \\ I(H)_{s',x'} \sum\limits_{i \in Y_l} I(H)_{t',\xi'(i)} \Psi'^L_K(y)_{\rho\left(i,\xi'^{-1}(l)\right)} & : \quad k = x', l \neq x' \\ I(H)_{s',x'} \sum\limits_{i \in Y_k} I(H)_{t',\xi'(i)} \Psi'^L_K(y)_{\rho\left(i,\xi'^{-1}(k)\right)} & : \quad k \neq x', l = x' \end{cases} . \end{aligned}$$

1. Fall: $k,l \in \operatorname{Bild}\Psi$. Sei $\Psi(k') = k$ und $\Psi(l') = l$.

1. Unterfall: $k' \neq x, l' \neq x, \rho\left(\xi^{-1}(l'), \xi^{-1}(k')\right) \in IE(K)$.

Aus 7. und 1. ergibt sich $k \neq x', l \neq x', \rho\left(\Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l), \Psi'^{-1}\xi'^{-1}(k)\right) \in IE(K)$. Daraus folgt $k \neq x', l \neq x', \rho\left(\xi'^{-1}(l), \xi'^{-1}(k)\right) \in IE(L)$ mit 2.43 auf Seite 57. Nun berechnet man

$$\begin{aligned}
\left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{(k,l)} &= \Psi'^L_K(y)_{\rho\left(\xi'^{-1}(k), \xi'^{-1}(l)\right)} \\
&\overset{8.}{=} y_{\rho\left(\Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l), \Psi'^{-1}\xi'^{-1}(k)\right)} \\
&\overset{1.}{=} y_{\rho(\xi^{-1}\Psi^{-1}(k), \xi^{-1}\Psi^{-1}(l))} \\
&= op(p,e,q)(y)_{\rho(l',k')} \\
&= \left[\Psi^H_G\left(op\left(p,e,q\right)(y)\right)\right]_{(k,l)}.
\end{aligned}$$

2. Unterfall: $k' \neq x, l' \neq x, \rho\left(\xi^{-1}(l'), \xi^{-1}(k')\right) \notin IE(K)$. Man argumentiert wie zu Beginn des ersten Unterfalles, erhält $\rho\left(\xi'^{-1}(l), \xi'^{-1}(k)\right) \notin IE(L)$ und berechnet

$$\begin{aligned}
\left[\Psi^H_G\left(op\left(p,e,q\right)(y)\right)\right]_{\rho(k,l)} &= op(p,e,q)(y)_{\rho(l',k')} \\
&= 0 = \left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{\rho(k,l)}.
\end{aligned}$$

3. Unterfall: $k = x', l \neq x'$. Es gilt also $k = x' \overset{3.}{=} \Psi(x)$. (Analog: $k \neq x', l = x'$).

$$\begin{aligned}
op(p,e,q)(y)_{\rho(x,l')} &= I(G)_{s,x} \sum_{i \in Y_{l'}} I(G)_{t,\xi(i)} \cdot y_{\rho(i,\xi^{-1}(l'))} \\
&\overset{2.11}{=} I(H)_{\psi(s),\Psi(x)} \sum_{i \in Y_{l'}} I(H)_{\psi(t),\Psi\xi(i)} \cdot y_{\rho(i,\xi^{-1}\Psi^{-1}(l))} \\
&\overset{1., 4., 5.}{=} I(H)_{s',x'} \sum_{i \in Y_{l'}} I(H)_{t',\xi'\Psi'(i)} \cdot y_{\rho\left(i,\Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l)\right)} \\
&\overset{9.}{=} I(H)_{s',x'} \sum_{j := \Psi'(i) \in Y_l \cap \text{Bild } \Psi'} I(H)_{t',\xi'(j)} \cdot y_{\rho\left(\Psi'^{-1}(j), \Psi'^{-1}\xi'^{-1}(l)\right)} \\
&\overset{7., 8.}{=} I(H)_{s',x'} \sum_{j \in Y_l \cap \text{Bild } \Psi'} I(H)_{t',\xi'(j)} \cdot \Psi'^L_K(y)_{\rho\left(j,\xi'^{-1}(l)\right)} \\
&= \left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{(k,l)}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $k \notin \text{Bild}\,\Psi \vee l \notin \text{Bild}\,\Psi$. Mit 3. folgt $k \neq x' \vee l \neq x'$ und mit 6. folgt $\xi'^{-1}(k) \notin \text{Bild}\,\Psi' \vee \xi'^{-1}(l) \notin \text{Bild}\,\Psi'$. Daraus ergibt sich $\left[op\left(f(p), F(e), f(q)\right)\left(\Psi'^L_K(y)\right)\right]_{(k,l)} = 0$. □

Satz 4.32 *Für $X \in \{G, H, L\}$ sei $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein mittels (w_X, γ_X) bijektiv nummerierter orientierter Graph. Für $p, q \in V_L$ und $e \in E_L$ sei $H := \mathcal{C}_{p,e,q}(L)$ wohldefiniert. Zusätzlich sei $(f, F) : G \to H$ ein injektiver Homomorphismus, eine der Bedingungen*

A. $q \notin$ *Bild*(f) **B1.** $q = f(v) \wedge M^v_p(f, F) = \emptyset$ **B2.** $q = f(v) \wedge M^v_q(f, F) = \emptyset$

erfüllt und $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to L$ *der von Satz 4.18 auf Seite 88 gelieferte injektive Homomorphismus. In 2.1 auf Seite 27 seien* f, F *durch* $(\phi; \psi)$ *bzw.* $(\Phi; \Psi)$ *und* $\widetilde{f}, \widetilde{F}$ *durch* $\left(\widetilde{\phi}; \widetilde{\psi}\right)$ *bzw.* $\left(\widetilde{\Phi}; \widetilde{\Psi}\right)$ *gegeben. Dann gilt* $\widetilde{\Psi}_G^L = op(p, e, q) \circ \Psi_G^H$.

Beweis Zuerst sei bemerkt, dass mit $f, F, \widetilde{f}$ und $\widetilde{F}$ die Abbildungen $\phi, \psi, \Phi, \Psi, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\Phi}$ und $\widetilde{\Psi}$ injektiv sind, da die jeweiligen Nummerierungen aus bijektiven Abbildungen bestehen. Die Abbildungen $j\,(e, E_L)$ und $i\,(p, V_L)$ seien in 4.10 gegeben durch $(\Xi; \xi; x)$ bzw. $(\Sigma; \sigma; s; t)$. Zunächst gilt

$$\widetilde{\Phi}(e_i) = \Xi\Phi(e_i) \tag{4.22}$$

für alle $e_i \in \mathcal{E}_{|G|}$, denn man berechnet

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(e_i) &= \gamma_L \widetilde{F} \gamma_G^{-1}(e_i) \overset{4.18}{=} \gamma_L\left(F\left(\gamma_G^{-1}(e_i)\right)\right) = \gamma_L(\underbrace{\gamma_H^{-1}\Phi(e_i)}_{\neq e}) \\
&= \gamma_L j\,(e, E_L)\left(\gamma_H^{-1}\Phi(e_i)\right) = \Xi\gamma_H\gamma_H^{-1}\Phi(e_i) = \Xi\Phi(e_i).
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun, dass

$$\left[\widetilde{\Psi}_G^L(y)\right]_{(k,l)} = \left[op(p, e, q) \circ \Psi_G^H(y)\right]_{(k,l)} \tag{4.23}$$

für alle $(k, l) \in IE(L)$ und $y = \sum_{(a,b) \in IE(G)} y_{(a,b)} \cdot e_{(a,b)} \in M^{tr}\left(IE(G), \mathbb{G}\right)$ gilt.

1. Fall: $k = x, l \neq x$. (Analog: $k \neq x, l = x$). Die linke Seite von (4.23) ist Null, denn: $x \notin \operatorname{Bild}\xi \overset{(4.22)}{\Longrightarrow} x \notin \operatorname{Bild}\widetilde{\Psi} \overset{2.42}{\Longrightarrow} \left[\widetilde{\Psi}_G^L(y)\right]_{\rho(x,l)} = 0$. Die rechte Seite r.S. von (4.23) berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\text{r.S.} &= I(L)_{s,x} \sum_{i \in Y_l} I(L)_{t,\xi(i)} \left[\Psi_G^H(y)\right]_{\rho(i,\xi^{-1}(l))} && (4.24) \\
&\overset{4.30}{=} I(L)_{s,x} \sum_{i \in Y_l} I(L)_{t,\xi(i)} \left(\sum_{(a,b) \in IE(G)} y_{(a,b)} \left[e_{\rho(\Psi(a),\Psi(b))}\right]_{\rho(i,\xi^{-1}(l))}\right) \\
&= I(L)_{s,x} \sum_{i \in M} I(L)_{t,\xi(i)} \cdot y_{\rho(\Psi^{-1}(i),\Psi^{-1}\xi^{-1}(l))}. && (4.25)
\end{aligned}$$

In (4.25) ist dabei $M = \left\{i \in \{1, \ldots, |E_H|\} \mid (i, \xi^{-1}(l)) \in IE(H) \wedge \rho\left(\Psi^{-1}(i), \Psi^{-1}\xi^{-1}(l)\right) \in IE(G)\right\}$. Wenn M leer ist, so ist r.S. $= 0$. Ist $M \neq \emptyset$, müssen die Fälle A, B 1. und B 2. aus Satz 4.18 untersucht werden. Dazu sei $i \in M$. Dann gilt

$$i \in M \Rightarrow \exists i' : i = \Psi(i') \Rightarrow \xi(i) = \xi\Psi(i') \overset{(4.22)}{=} \widetilde{\Psi}(i') \Rightarrow \xi(i) \in \operatorname{Bild}\widetilde{\Psi}. \tag{4.26}$$

Zu Fall A.: $q \notin \operatorname{Bild} f \overset{4.18}{=} \operatorname{Bild}\widetilde{f} \Rightarrow t \notin \operatorname{Bild}\widetilde{\psi} \overset{2.7}{\Longrightarrow} \forall j \in \operatorname{Bild}\widetilde{\Psi} : I(L)_{t,j} = 0 \overset{(4.26)}{\Longrightarrow} \forall i \in M : I(L)_{t,\xi(i)} = 0$. Daher ist der Term in (4.25) gleich Null.

Zu Fall B2.: Es gilt $q \notin \operatorname{Bild} \widetilde{f}$, denn andernfalls: $\exists w \in E_G : \widetilde{f}(w) = q \neq p = \widetilde{f}(v) \Rightarrow w \neq v \wedge f(v) = q = f(w) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} w \neq v \wedge w = v$. Widerspruch! Also kann man wie in A. schließen.

Zu Fall B1.: Einsetzen der Gleichung $I(L)_{t,\xi(i)} = I(H)_{\sigma^{-1}(t),i} - I(L)_{s,\xi(i)}$ aus Satz 4.11 von Seite 80 in (4.24) ergibt:

$$\begin{aligned}
\text{r. S.} \quad &= \quad I(L)_{s,x} \sum_{i \in Y_l} \left(I(H)_{\sigma^{-1}(t),i} - I(L)_{s,\xi(i)} \right) \left[\Psi_G^H(y) \right]_{\rho(i,\xi^{-1}(l))} \\
&\overset{4.22,\ \text{S.95}}{=} \quad -I(L)_{s,x} \sum_{i \in Y_l} I(L)_{s,\xi(i)} \left[\Psi_G^H(y) \right]_{\rho(i,\xi^{-1}(l))} \\
&\overset{\text{wie } (4.25)}{=} \quad -I(L)_{s,x} \sum_{i \in M} I(L)_{s,\xi(i)} \cdot y_{\rho(\Psi^{-1}(i),\Psi^{-1}\xi^{-1}(l))}.
\end{aligned}$$

Es gilt auch hier: $p \notin \operatorname{Bild} f \overset{4.18}{=} \operatorname{Bild} \widetilde{f} \Rightarrow s \notin \operatorname{Bild} \widetilde{\psi} \overset{2.7}{\Longrightarrow} \forall j \in \operatorname{Bild} \widetilde{\Psi} : I(L)_{s,j} = 0 \overset{(4.26)}{\Longrightarrow} \forall i \in M : I(L)_{s,\xi(i)} = 0$. Daher ist r.S.= 0.

2. Fall: $k \neq x, l \neq x, \rho(\xi^{-1}(k), \xi^{-1}(l)) \in IE(H)$. Man berechnet die linke und die rechte Seite von (4.23). Für die rechte Seite gilt

$$\begin{aligned}
\text{r. S.} &= \left[\Psi_G^H(y) \right]_{\rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l))} = \left[\sum_{(a,b) \in IE(G)} y_{(a,b)} \cdot e_{\rho(\Psi(a),\Psi(b))} \right]_{\rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l))} \\
&= \begin{cases} 0 & : \ \forall (a,b) \in IE(G) : \rho(\Psi(a),\Psi(b)) \neq \rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l)) \\ y_{(a,b)} & : \ \exists (a,b) \in IE(G) : \rho(\Psi(a),\Psi(b)) = \rho(\xi^{-1}(k),\xi^{-1}(l)) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite berechnet sich mithilfe von (4.22) zu:

$$\begin{aligned}
\text{l. S.} &= \left[\sum_{(a,b) \in IE(G)} y_{(a,b)} \cdot e_{\rho(\xi\Psi(a),\xi\Psi(b))} \right]_{(k,l)} \\
&= \begin{cases} 0 & : \ \forall (a,b) \in IE(G) : \rho(\xi\Psi(a),\xi\Psi(b)) \neq (k,l) \\ y_{(a,b)} & : \ \exists (a,b) \in IE(G) : \rho(\xi\Psi(a),\xi\Psi(b)) = (k,l) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Da die Bedingungen jeweils äquivalent sind, ergibt sich die Behauptung.

3. Fall : $k \neq x, l \neq x, \rho(\xi^{-1}(k), \xi^{-1}(l)) \notin IE(H)$. Die rechte Seite ist definitionsgemäß Null. Die linke Seite ist ebenfalls Null, denn für alle $(a,b) \in IE(G)$ gilt $\rho(\xi\Psi(a), \xi\Psi(b)) \neq (k,l)$: Angenommen es gibt ein $(a,b) \in IE(G)$ mit $\rho(\xi\Psi(a), \xi\Psi(b)) = (k,l)$. Da (f,F) ein injektiver Homomorphismus ist ergibt sich mit Lemma 2.43 auf Seite 57: $IE(H) \ni \rho(\Psi(a), \Psi(b)) = \rho(\xi^{-1}(l), \xi^{-1}(k))$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 4.33 *Sei* $X \in \{G, H, L, K\}$, $X = (V_X, E_X, g_X)$ *ein nummerierter orientierter Graph sowie* $p, q \in V_L$ *und* $e \in E_L$, *so dass* $H := C_{p,e,q}(L)$ *wohldefiniert ist. Zusätzlich sei* (f, F) :

$G \to H$ ein injektiver Homomorphismus, $v = f^{-1}(q)$, $Sch(v, G) = \emptyset$, $M_q^v(f, F) \neq \emptyset$ und $M_p^v(f, F) \neq \emptyset$. Der Graph $K = (V_K, E_K, g_K)$ sei wie in B 3. in Satz 4.18 auf Seite 88 so gegeben, dass $E_K \setminus E_G = \{z\}$, $V_K \setminus V_G = \{w\}$, $E_G \subset E_K$, $V_G \subset V_K$ und

$$g_K(x) := \begin{cases} g_G(x) & : \quad x \in E_G \backslash M_p^v(f, F) \\ (\psi(v, w, V_K) \times \psi(v, w, V_K))\,(g_G(x)) & : \quad x \in M_p^v(f, F) \\ (w, v) & : \quad x = z \wedge g_L(e) = (p, q) \\ (v, w) & : \quad x = z \wedge g_L(e) = (q, p) \end{cases}$$

gilt. Laut Satz 4.18 ist mittels

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad x \neq w \\ p & : \quad x = w \end{cases} \quad und \quad \widetilde{F}(x) := \begin{cases} F(x) & : \quad x \neq z \\ e & : \quad x = z \end{cases}$$

ein injektiver Homomorphismus $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : K \to L$ gegeben. Ist F in der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 durch $(\Phi; \Psi)$ und $\widetilde{F}$ durch $\left(\widetilde{\Phi}; \widetilde{\Psi}\right)$ gegeben, so gilt: $\widetilde{\Psi}_K^L \circ op(w, z, v) = op(p, e, q) \circ \Psi_G^H$.

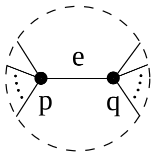
Beweis Aus Satz 4.31 auf Seite 105 ergibt sich die Behauptung, denn nach Satz 4.18 B 3. (b) gilt $G = C_{w,z,v}(K)$. □

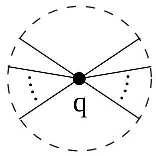
Satz 4.34 *Sei $X \in \{G, H, L\}$, $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein nummerierter orientierter Graph sowie $p, q \in V_L$ und $e \in E_L$, so dass $H = C_{p,e,q}(L)$ wohldefiniert ist. Es sei $(f, F) : G \to L$ ein injektiver Homomorphismus orientierter Graphen mit $e \notin Bild F$, und $(\widetilde{f}, \widetilde{F}) : G \to H$ der gemäß Satz 4.17 auf Seite 87 induzierte Homomorphismus. Dieser sei ebenfalls injektiv. Ist F in der Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 durch $(\Phi; \Psi)$ und $\widetilde{F}$ durch $\left(\widetilde{\Phi}; \widetilde{\Psi}\right)$ gegeben, so gilt $\Psi_G^L = op(p, e, q) \circ \widetilde{\Psi}_G^H$.*

Beweis Nach Satz 4.17 auf Seite 87 gilt $f^{-1}(p) = \emptyset$ oder $f^{-1}(q) = \emptyset$. Es wird nun gezeigt, dass im Satz 4.32 auf Seite 107 die Bedingung A. oder B1. oder B2. erfüllt ist: Dazu sei $\widetilde{f}(v) = q$ und sowohl $M_p^v(\widetilde{f}, \widetilde{F}) \neq \emptyset$ als auch $M_q^v(\widetilde{f}, \widetilde{F}) \neq \emptyset$. Mit $a \in \{p, q\}$ sei $x_a \in M_a^v(\widetilde{f}, \widetilde{F})$. Daraus folgt aber $a \in \nu\left(g_L \widetilde{F}(x_a)\right) = \nu g_L F(x_a) = \nu(f \times f) g_G(x_a)$, also $p, q \in \text{Bild}(f)$. Das ist ein Widerspruch zu $f^{-1}(p) = \emptyset$ oder $f^{-1}(q) = \emptyset$.
Nun läßt sich Satz 4.32 auf Seite 107 anwenden: Nach Satz 4.19 auf Seite 91 gilt $(\widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{F}}) = (f, F)$, also ist $\widetilde{\widetilde{F}}$ auch durch $(\Phi; \Psi)$ gegeben. Mit 4.32 folgt $\Psi_G^L = op(p, e, q) \circ \widetilde{\Psi}_G^H$. □

4.5 Beispiele zu Kapitel 4

Satz 4.35 *Vorgelegt seien orientierte Diagramme (D, o) und (D', o'), die außerhalb einer lokalen Situation wie in Abbildung (4.27) identisch sind. Für $X \in \{D, D'\}$ seien*

D : 

D' : 

(4.27)

$G(X) = (V_X, E_X, g_X)$ die zugehörigen abstrakten Graphen, $\left(w_{G(X)}, \gamma_{G(X)}\right)$ bijektive Nummerierungen, $p, q \in V_D$, $e \in E_D$ und $G(D') = \mathcal{C}_{p,e,q}(G(D))$. Dann gilt

$$L_y\left(D', \gamma_{G(D')}, o'\right) = L_{op(p,e,q)(y)}\left(D, \gamma_{G(D)}, o\right)$$

für alle $y \in Kern\, G_{\left(G(D'), w_{G(D')}, \gamma_{G(D')}\right)}$.

Beweis In 4.10 auf Seite 79 sei $j\left(e, E_{G(D)}\right)$ durch $(\Xi; \xi; x)$ und $i\left(p, V_{G(D)}\right)$ durch $(\Sigma; \sigma; s; t)$ gegeben. Für $k \neq x$ folgt daraus $\gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(k)}\right) = \gamma^{-1}_{G(D')}\Xi^{-1}(e_k) = \gamma^{-1}_{G(D)}(e_k)$. Da $(D, o) = (D', o')$ außerhalb der lokalen Situation aus Abbildung (4.27) gilt, erhält man

$$w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_k), \gamma^{-1}_{G(D)}(e_l)} = w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(k)}\right), \gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(l)}\right)} \tag{4.28}$$

für $k \neq x$ und $l \neq x$. Da $\gamma_{G(D)}$ bijektiv ist, ist $e \in E_D$ in (4.27) die einzige mit e_x nummerierte Kante, also gilt

$$w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_x), \gamma^{-1}_{G(D)}(e_k)} = 0 \tag{4.29}$$

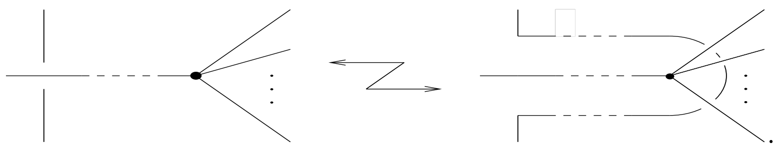
für alle $k \in \{1, \ldots, |E_D|\} \setminus \{x\}$. Nun errechnet man die Behauptung:

$$\begin{aligned}
L_y\left(D', \gamma_{G(D')}, o'\right) &= \sum_{(k,l) \in IE(G(D'))} y_{(k,l)}\; w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}(e_k), \gamma^{-1}_{G(D')}(e_l)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l \in \{1,\ldots,|E_D|-1\}} \; \sum_{\substack{\{k \in \{1,\ldots,|E_D|-1\} | \\ \rho(k,l) \in IE(G(D'))\}}} y_{\rho(k,l)}\; w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}(e_k), \gamma^{-1}_{G(D')}(e_l)} \\
&\overset{\text{Def. S. 94}}{=} \frac{1}{2} \sum_{l \in \{1,\ldots,|E_D|-1\}} \; \sum_{k \in Y_{\xi(l)}} y_{\rho(k,l)}\; w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}(e_k), \gamma^{-1}_{G(D')}(e_l)} \\
&\overset{4.21.5.}{=} \frac{1}{2} \sum_{l \in \{1,\ldots,|E_D|-1\}} \; \sum_{i := \xi(k) \in P(\xi(l), l)} y_{\rho(\xi^{-1}(i), l)}\; w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(i)}\right), \gamma^{-1}_{G(D')}(e_l)} \\
&\overset{j := \xi(l)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\ldots,|E_D|\} \setminus \{x\}} \; \sum_{i \in P\left(j, \xi^{-1}(j)\right)} y_{\rho(\xi^{-1}(i), \xi^{-1}(j))}\; w^{D',o'}_{\gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(i)}\right), \gamma^{-1}_{G(D')}\left(e_{\xi^{-1}(j)}\right)} \\
&\overset{4.24,\ (4.28)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\ldots,|E_D|\} \setminus \{x\}} \; \sum_{i \in P\left(j, \xi^{-1}(j)\right)} op(p,e,q)_{\rho(i,j)}\; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i), \gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)}
\end{aligned}$$

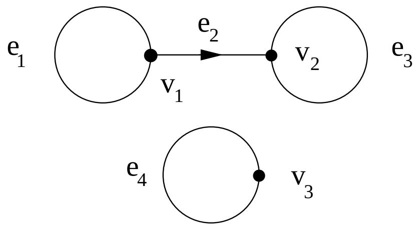
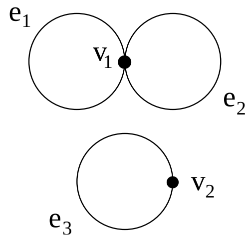
$$
\begin{aligned}
&\overset{4.24,\,4.21.3.}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\dots,|E_D|\} \setminus \{x\}} \; \sum_{i \in P_{\xi^{-1}(j)} \setminus \{x\}} op(p,e,q)_{\rho(i,j)} \; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i),\gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)} \\
&\overset{(4.29)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\dots,|E_D|\} \setminus \{x\}} \; \sum_{i \in P_{\xi^{-1}(j)}} op(p,e,q)_{\rho(i,j)} \; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i),\gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)} \\
&\overset{\text{Def. S. 94}}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\dots,|E_D|\} \setminus \{x\}} \; \sum_{\substack{\{i \in \{1,\dots,|E_D|\} | \\ \rho(i,j) \in IE\,(G(D))\}}} op(p,e,q)_{\rho(i,j)} \; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i),\gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)} \\
&\overset{(4.29)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1,\dots,|E_D|\}} \; \sum_{\substack{\{i \in \{1,\dots,|E_D|\} | \\ \rho(i,j) \in IE\,(G(D))\}}} op(p,e,q)_{\rho(i,j)} \; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i),\gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)} \\
&= \sum_{(i,j) \in IE\,(G(D))} op(p,e,q)_{(i,j)} \; w^{D,o}_{\gamma^{-1}_{G(D)}(e_i),\gamma^{-1}_{G(D)}(e_j)} \\
&= L_{op(p,e,q)(y)} \left(D, \gamma_{G(D)}, o\right).
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung Jedes Diagramm lässt sich mit geeigneten Reidemeisterbewegungen in ein Diagramm wie D aus der Abbildung (4.27) überführen. Dazu entfernt man sämtliche Kreuzungen, die an der zu kontrahierenden Kante beteiligt sind, mit Umformungen der Art:



Beispiel Gegeben seien die folgenden bijektiv nummerierten orientierten Graphen $G = (V_G, E_G, g_G)$, $H = (V_H, E_H, g_H)$:

$(G, w_G, \gamma_G) :=$  $(H, w_H, \gamma_H) :=$  .

Dabei gelte $E_G := \{a, b, c, e\}, V_G := \{p, q, r\}$ und $w_G(p) := v_1$, $w_G(q) := v_2$, $w_G(r) := v_3$, $\gamma_G(a) := e_1$, $\gamma_G(b) := e_3$, $\gamma_G(c) := e_4$, $\gamma_G(e) := e_2$. Darüber hinaus sei $H = \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ und in 4.10 auf Seite 79 sei $i(p, E_G)$ durch $(\Sigma; \sigma; 1; 2)$ und $j(e, E_G)$ durch $(\Xi; \xi; 2)$ gegeben. Für

$$\sigma : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\} \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad \xi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2\}$$

gelten demnach $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \xi(1) = 1, \xi(2) = 3, \xi(3) = 4$. Außerdem gilt

$$\mathcal{M}(H, w_H, \gamma_H) = \begin{array}{c||c|c} & (1,3) & (2,3) \\ \hline\hline (1,2) & -0 & 0 \\ (2,2) & 0 & -0 \\ \hline (3,1) & -0 & -0 \end{array} .$$

Daher ist

$$\operatorname{Kern} G_{(H, w_H, \gamma_H)} = \left\{ \left(y_{(1,3)}, y_{(2,3)}\right) \mid y_{(1,3)}, y_{(2,3)} \in \mathbb{G} \right\}.$$

Laut 2.7 auf Seite 61 gilt

$$\operatorname{Kern} G_{(G, w_G, \gamma_G)} = \left\{ \left(y_{(1,3)}, y_{(1,4)}, 0, y_{(3,4)}\right) \mid y_{(1,3)}, y_{(1,4)}, y_{(3,4)} \in \mathbb{G} \right\}.$$

Nun wird die Abbildung

$$op(p, e, q) : \operatorname{Kern} G_{(H, w_H, \gamma_H)} \to \operatorname{Kern} G_{(G, w_G, \gamma_G)}$$

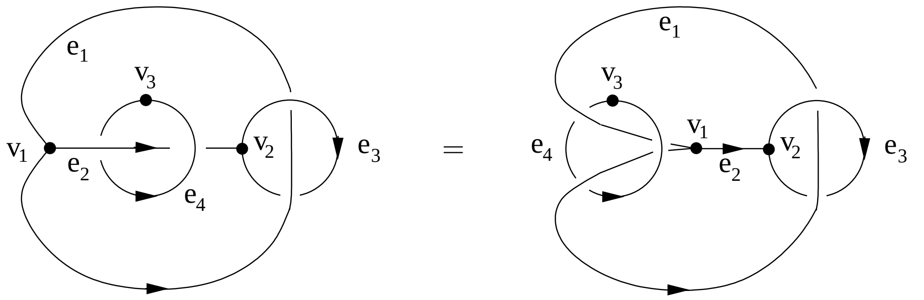
berechnet. Dies geschieht komponentenweise für $y := \left(y_{(1,3)}, y_{(2,3)}\right) \in \operatorname{Kern} G_{(H, w_H, \gamma_H)}$:

$$\begin{array}{rcll} op(p, e, q)(y)_{(1,3)} & = & 0, & \text{denn} \quad \rho\left(\xi^{-1}(1), \xi^{-1}(3)\right) = (1, 2) \notin IE(H, w_H, \gamma_H) \\ op(p, e, q)(y)_{(1,4)} & = & y_{(1,3)}, & \text{denn} \quad \rho\left(\xi^{-1}(1), \xi^{-1}(4)\right) = (1, 3) \in IE(H, w_H, \gamma_H) \\ op(p, e, q)(y)_{(2,4)} & = & 0, & \text{denn} \quad 2 \notin \operatorname{Bild} \xi \ \wedge \ I(H, w_H, \gamma_H)_{1,2} = 0 \\ op(p, e, q)(y)_{(3,4)} & = & y_{(2,3)}, & \text{denn} \quad \rho\left(\xi^{-1}(3), \xi^{-1}(4)\right) = (2, 3) \in IE(H, w_H, \gamma_H). \end{array}$$

Also gilt $op(p, e, q)\left(y_{(1,3)}, y_{(2,3)}\right) = \left(0_{(1,3)}, y_{(1,3)}, 0_{(2,4)}, y_{(2,3)}\right)$ und für ein geeignet orientiertes bijektiv nummeriertes Diagramm (D, γ, o) ergibt sich

$$L_{op(p,e,q)\left(y_{(1,3)}, y_{(2,3)}\right)}(D, \gamma, o) = y_{(1,3)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(1), \gamma^{-1}(4)} + y_{(2,3)} \cdot w^{D,o}_{\gamma^{-1}(3), \gamma^{-1}(4)}.$$

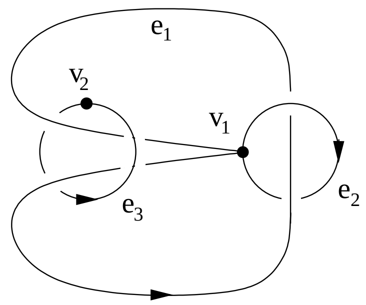
Zum Beispiel erhält man $L_{op(p,e,q)(y)}(D,\gamma,o)=0$ für die Diagramme in (4.30).



(4.30)

Für das Diagramm (4.31) berechnet man laut Satz 4.35:

$$\begin{aligned} 0 &= L_{op(p,e,q)\left(y_{(1,3)},y_{(2,3)}\right)}(D,\gamma,o) \\ &= L_{\left(y_{(1,3)},y_{(2,3)}\right)}\left(D',\gamma',o'\right) \\ &= y_{(1,3)}\cdot w^{D',o'}_{\gamma'^{-1}(1),\gamma'^{-1}(3)}+y_{(2,3)}\cdot w^{D',o'}_{\gamma'^{-1}(2),\gamma'^{-1}(3)} \\ &= 0. \end{aligned}$$



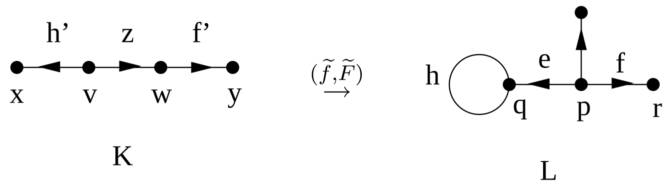
(4.31)

□

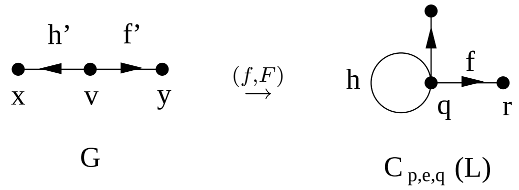
Beispiel Für $X\in\{G,L,\mathcal{C}_{p,e,q}(L)\}$ seien $X=(V_X,E_X,g_X)$ orientierte Graphen, wie in den Abbildungen (4.32) und (4.33) vorgelegt. Ein injektiver Homomorphismus $(f,F):G\to\mathcal{C}_{p,e,q}(L)$ sei gegeben durch $f(v):=q$, $f(x):=q$, $f(y):=r$, $F(h'):=h$ und $F(f'):=f$. Gesucht ist ein Homomorphismus $(\widetilde{f},\widetilde{F}):G\to L$. Es gilt $q\in \operatorname{Bild} f$, $Sch(v,G)=\emptyset$, $M_p^v(f,F)=\{f'\}$ und $M_q^v(f,F)=\{h'\}$. Daher tritt der Fall B3. in Satz 4.18 auf Seite 88 ein. Man erhält den Graphen $K=(\{x,v,y,w\},\{h',f',z\},g_K)$ mit

$$g_K(x)=\begin{cases}(w,y) & : \quad x=f'\\ (v,x) & : \quad x=h'\\ (w,v) & : \quad x=z\end{cases}$$

und die Abbildung $(\widetilde{f},\widetilde{F}):G\to L$ ist gegeben durch $\widetilde{f}(x)=f(x)=q$, $\widetilde{f}(v)=f(v)=q$, $\widetilde{f}(w)=p$, $\widetilde{f}(y)=f(y)=r$, $\widetilde{F}(h')=F(h')=h$, $\widetilde{F}(f')=F(f')=f$ und $\widetilde{F}(z)=e$.



(4.32)



(4.33)

□

Kapitel 5

Kontraktionen mehrerer Kanten

Gegenstand der Untersuchungen in diesem Kapitel sind Graphen, die durch mehrmaliges Kontrahieren von Kanten entstehen. Insbesondere sind diejenigen Kontraktionen von Interesse, die an sämtlichen zweiwertigen Ecken durchgeführt werden, so dass der resultierende Graph keine Ecken vom Grad Zwei mehr besitzt. Derartige Kontraktionen werden aus technischen Gründen in Kapitel 7 benötigt.

In 5.1.1 ab Seite 116 und 5.1.2 ab Seite 123 werden Aussagen über Wege und Kreise im Zusammenhang mit einer Kontraktion bereitgestellt.

In 5.1.3 ab Seite 128 taucht der Zusammenhangsbegriff auf. Dort werden die verschiedenen Definitionen von 3-Zusammenhang aus [23] und [27] gegenübergestellt.

Jeder Graph, der aus Kontraktionen mehrerer Kanten hervorgeht, lässt sich in einer speziellen Form schreiben. Dies zu zeigen ist Aufgabe des Abschnittes 5.2 ab Seite 135. Damit kann in 5.3 ab Seite 151 nachgewiesen werden, dass die Komposition der von den Kontraktionen induzierten Homomorphismen der Verschlingungsmoduln nicht von der Reihenfolge der Kontraktionen abhängt. Dieses Resultat wird in Kapitel 7 Verwendung finden. Dort wird hauptsächlich mit topologisch einfachen und topologisch 3-zusammenhängenden Graphen gearbeitet. Das Hauptergebnis von 5.4 ab Seite 155 und 5.5 ab Seite 170 besagt, dass der jeweilige „topologische Typ“ des Graphen nicht von einer Kontraktion an einer zweiwertigen Ecke abhängt.

Eine weitere Situation, die in Kapitel 7 auftaucht, wird in 5.6 ab Seite 172 mit „Hinzufügen von Wegen“ bezeichnet. Dabei betrachtet man Graphen, die aus einem ihrer Teilgraphen durch „Anbringen“ der einwertigen Ecken eines Standardbogens an verschiedene Ecken des Teilgraphen entstehen.

Für einen Graphen X gilt stets $X := (V_X, E_X, g_X)$, falls keine speziellen Bezeichnungen gewählt werden. Zu einer Abbildung f sei $f^2 := f \times f$. Ist w eine Eckennummerierung und γ eine Kantennummerierung eines orientierten Graphen X so sei $\mathcal{G}(X) := \mathcal{G}(X, w, \gamma) :=$ Kern $G_{(X,w,\gamma)}$.

5.1 Wege, Kreise, Zusammenhang

Nachdem zu Beginn von 5.1.1 die Begriffe Kreis und Weg erläutert worden sind, wird in den Sätzen 5.6 auf Seite 119, 5.7 auf Seite 121, 5.8 auf Seite 121 sowie 5.9 auf Seite 122 analysiert, wie man Kreise und Wege in eine Kontraktion „herunterdrücken" kann. Jedem dieser Sätze ist zur Illustration eine Abbildung nachgestellt. Umgekehrt lässt sich ein Weg in einer Kontraktion so „hochheben", dass Anfangs- und Endpunkt des ursprünglichen Weges erhalten bleiben (siehe 5.1.2 ab Seite 123). Die Sätze aus 5.1.1 und 5.1.2 werden im Wesentlichen für den Abschnitt 5.4 ab Seite 155 gebraucht. Aber in 5.1.3 ab Seite 128 ergibt sich daraus auch, dass ein Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn es eine Kontraktion ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit spielt der Begriff des 3-Zusammenhangs eine Rolle. Da in Kapitel 7 ab Seite 187 Ergebnisse aus [27], Chapter IV benötigt werden, muss in 5.1.3 geklärt werden, dass die Definitionen von 3-Zusammenhang aus [23] bzw. [25] (5.15 auf Seite 131) und [27] (5.16 auf Seite 131) „fast" übereinstimmen.

5.1.1 Herunterdrücken von Wegen und Kreisen

Definition 5.1 *Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man den Graphen mit Eckenmenge $\{0, \ldots, n\}$, Kantenmenge $\{l_1, \ldots, l_n\}$ und Inzidenzabbildung $l_j \mapsto \{j, j-1\}$ als* **nicht-orientierten Standardbogen**. *Ein* **orientierter Standardbogen** *ist ein orientierter Graph, dessen zugrundeliegender nicht-orientierter Graph ein nicht-orientierter Standardbogen ist. In beiden Fällen wird ein solcher Graph mit J'_n bezeichnet.*

Sei G ein Graph. Ein **Weg** *von x nach y in G ist ein injektiver Homomorphismus $(w, W) : J'_n \to G$, für den $w(0) = x$ und $w(n) = y$ gilt. Ein* **Kreis** *in G ist ein Homomorphismus $(c, C) : J'_n \to G$, für den (a), (b) und (c) gilt:*

(a) C injektiv, (b) $c\big|_{\{0,\ldots,n-1\}}$ injektiv, (c) $c(0) = c(n)$. □

Definition 5.2 *Für $X \in \{G, H\}$ sei $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein nicht-orientierter Graph und $(f, F) : G \to H$ ein injektiver Homomorphismus. Eine Orientierung g'_G bzw. g'_H von G bzw. H heißt* **passend** *zu einer Orientierung g'_H bzw. g'_G von H bzw. G, wenn $\nu g'_G = g_G$, $\nu g'_H = g_H$ gilt, und $(f, F) : G \to H$ bezüglich der Orientierungen g'_G und g'_H*

ein Homomorphismus orientierter Graphen ist. □

Satz 5.3 *Für $X \in \{G, H\}$ sei $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein nicht-orientierter Graph und $(f, F) : G \to H$ ein injektiver Homomorphismus. Ist g'_H eine Orientierung von H, so gibt es genau eine zu g'_H passende Orientierung von G. Ist g'_G eine Orientierung von G, so gibt es genau $2^{|E_H|-|E_G|}$ passende Orientierungen von H.*

Beweis Sei g'_H eine Orientierung von H. Man definiert $g'_G(x) := (f \times f)^{-1}(g'_H(F(x)))$. Dann ist g'_G offenbar eine Orientierung von G und (f, F) ein Homomorphismus orientierter Graphen. Außerdem gilt:

$$\nu g'_G(x) = \mathcal{P}_2(f)^{-1}\left(\nu\left(g'_H(F(x))\right)\right) = \mathcal{P}_2(f)^{-1}(g_H(F(x))) = g_G(x).$$

Für jede weitere Orientierung g'' von G erhält man:

$$(f \times f)\left(g''(x)\right) = g'_H(F(x)) \implies g''(x) = (f \times f)^{-1}\left(g'_H(F(x))\right) = g'_G(x).$$

Also gilt $g'' = g'_G$. Zum Nachweis der zweiten Aussgae sei g'_G eine Orientierung von G. Für $x \in \operatorname{Bild} F$ sei $g'_H(x) := (f \times f)\left(g'_G\left(F^{-1}(x)\right)\right)$. Für $x \in E_H \setminus \operatorname{Bild} F$ gibt es zwei Möglichkeiten $g'_H(x)$ zu definieren, so dass $\nu g'_H(x) = g_H(x)$ gilt. Insgesamt gibt es also

$$2^{|E_H \setminus \operatorname{Bild} F|} = 2^{|E_H| - |\operatorname{Bild} F|} = 2^{|E_H| - |E_G|}$$

Möglichkeiten $g'_H(x)$ festzulegen. □

Lemma 5.4 *Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $(\delta_n, \Delta_n) : J'_n \to J'_n$ gegeben durch $\delta_n(i) := n - i$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $\Delta_n(l_i) := l_{n+1-i}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist (δ_n, Δ_n) ein Isomorphismus.*

Beweis Die Abbildungen δ_n und Δ_n sind offenbar wohldefiniert und bijektiv. Sei J'_n vorerst nicht-orientiert. Wegen $\mathcal{P}_2(\delta_n)\left(g_{J'_n}(l_i)\right) = \{\delta_n(i), \delta_n(i-1)\} = \{n-i, n+1-i\}$ $= g_{J'_n}(l_{n+1-i}) = g_{J'_n}(\Delta_n(l_i))$ ist (δ_n, Δ_n) ein Homomorphismus unorientierter Graphen. Ist einer der Graphen J'_n orientiert, wählt man für den anderen die bezüglich (δ_n, Δ_n) „passende“ Orientierung. □

Lemma 5.5 *Zu $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \ldots, n\}$ seien Abbildungen $\phi_j : V_{J'_n} \to V_{J'_{n+1}} \setminus \{j\}$ und $\Phi_j : E_{J'_n} \to E_{J'_{n+1}} \setminus \{l_{j+1}\}$ wie folgt festgelegt:*

(a) $j = 0$: $\phi_0(x) := x + 1$ *für* $x \in \{0, \ldots, n\}$, $\Phi_0(l_x) := l_{x+1}$ *für* $x \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) $j \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\phi_j(x) := \begin{cases} x & : \quad x \in \{0, \ldots, j-1\} \\ x+1 & : \quad x \in \{j, \ldots, n\} \end{cases}, \Phi_j(l_x) := \begin{cases} l_x & : \quad x \in \{1, \ldots, j\} \\ l_{x+1} & : \quad x \in \{j+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

(c) $j = n : \Phi_n(l_x) := l_x$ *für* $x \in \{1, \ldots, n\}$ *und*

$$\phi_n(x) := \begin{cases} x & : \quad x \in \{0, \ldots, n-1\} \\ x+1 & : \quad x = n \end{cases}.$$

Dann ist $(\phi_j, \Phi_j) : J'_n \to \mathcal{C}_{j,l_{j+1},j+1}\left(J'_{n+1}\right)$ *für jedes* $j \in \{0, \ldots, n\}$ *ein Isomorphismus.*

Beweis Zur Abkürzung sei $G := \mathcal{C}_{j,l_{j+1},j+1}\left(J'_{n+1}\right)$. In allen drei Fällen lässt sich Wohldefiniertheit und Bijektivität der Abbildungen leicht erkennen. Es wird nun gezeigt, dass (ϕ_j, Φ_j) ein Isomorphismus unorientierter Graphen ist. Ist einer der Graphen orientiert, wählt man für den anderen die bezüglich (ϕ_j, Φ_j) „passende" Orientierung.

Zu (a):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\phi_0)\, g_{J'_n}(l_x) &= \{\phi_0(x-1), \phi_0(x)\} = \{x, x+1\} = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(0, 1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{x, x+1\}) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(0, 1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_{x+1}) = g_G(l_{x+1}) = g_G \Phi_0(l_x). \end{aligned}$$

Zu (b):

1. $x \in \{0, \ldots, j-1\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\phi_j)\, g_{J'_n}(l_x) &= \{\phi_j(x-1), \phi_j(x)\} = \{x-1, x\} \\ &\overset{x \leq j}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{x-1, x\}) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_x) = g_G(l_x) = g_G \Phi_j(l_x). \end{aligned}$$

2. $x = j$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\phi_j)\, g_{J'_n}(l_j) &= \{\phi_j(j-1), \phi_j(j)\} = \{j-1, j+1\} \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{j-1, j\}) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_j) \\ &= g_G(l_j) = g_G \Phi_j(l_j). \end{aligned}$$

3. $x \in \{j+1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\phi_j)\, g_{J'_n}(l_x) &= \{\phi_j(x-1), \phi_j(x)\} = \{x, x+1\} \\ &\overset{x \geq j}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{x, x+1\}) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(j, j+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_{x+1}) \\ &= g_G(l_{x+1}) = g_G \Phi_j(l_x). \end{aligned}$$

Zu (c):

1. $x \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2(\phi_n)\, g_{J'_n}(l_x) &= \{\phi_n(x-1), \phi_n(x)\} = \{x-1, x\} \\
&\overset{x \leq n}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(n, n+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{x-1, x\}) \\
&= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(n, n+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_x) \\
&= g_G(l_x) = g_G \Phi_n(l_x).
\end{aligned}$$

2. $x = n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2(\phi_n)\, g_{J'_n}(l_n) &= \{\phi_n(n-1), \phi_n(n)\} = \{n-1, n+1\} \\
&= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(n, n+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right)(\{n-1, n\}) \\
&= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(n, n+1, V_{J'_{n+1}}\right)\right) g_{J'_{n+1}}(l_n) \\
&= g_G(l_n) = g_G \Phi_n(l_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 5.6 *Vorgelegt sei ein orientierter Graph G, Ecken p, q und eine Kante e von G, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definert ist. Sei $(c, C) : J'_{n+1} \to G$ ein Kreis, für den $C(l_{j+1}) = e$ für ein $j \in \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

(a) Wenn $p = c(j)$ und $q = c(j+1)$ gilt, so ist

$$\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right) \circ (\phi_j, \Phi_j) : J'_n \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$$

ein Kreis. Dabei ist $\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right)$ die von (c, C) induzierte Abbildung aus Satz 4.16 auf Seite 86 und (ϕ_j, Φ_j) der Isomorphismus aus Lemma 5.5 auf Seite 117.

(b) Wenn $q = c(j)$ und $p = c(j+1)$ gilt, so ist

$$\left(\widetilde{c \circ \delta_{n+1}}, \widetilde{C \circ \Delta_{n+1}}\right) \circ (\phi_{n-j}, \Phi_{n-j}) : J'_n \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$$

ein Kreis. Dabei ist $(\widetilde{c \circ \delta_{n+1}}, \widetilde{C \circ \Delta_{n+1}})$ die von $(c \circ \delta_{n+1}, C \circ \Delta_{n+1})$ induzierte Abbildung aus Satz 4.16 auf Seite 86, (ϕ_{n-j}, Φ_{n-j}) der Isomorphismus aus 5.5 und $(\delta_{n+1}, \Delta_{n+1})$ der Isomorphismus aus Lemma 5.4 auf Seite 117.

Beweis **Zu (a):** Nach Satz 4.16 und Lemma 5.5 ist $\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right) \circ (\phi_j, \Phi_j)$ ein Homomorphismus. Mit C ist $\widetilde{C}$ und somit $\widetilde{C} \circ \Phi_j$ injektiv. Nun wird nachgewiesen, dass $\widetilde{c}\phi_j\big|_{\{0, \ldots, n-1\}}$

injektiv ist. Es gilt $\phi_j(\{0,\dots,n-1\}) = \left(V_{J'_{n+1}} \setminus \{j\}\right) \setminus \{\phi_j(n)\}$

$$= \left\{ \begin{array}{lcr} V_{J'_{n+1}} \setminus \{0, n+1\} = \{1,\dots,n\} & : & j = 0 \\ V_{J'_{n+1}} \setminus \{j, n+1\} = \{0,\dots,n\} \setminus \{j\} & : & j \in \{1,\dots,n-1\} \\ V_{J'_{n+1}} \setminus \{n, n+1\} = \{0,\dots,n-1\} & : & j = n \end{array} \right\} = \{0,\dots,n\} \setminus c^{-1}(c(j)).$$

Da c nach Voraussetzung injektiv auf $\{0,\dots,n\}$ ist, ist c auch auf $\{0,\dots,n\} \setminus c^{-1}(c(j))$ injektiv. Nach Satz 4.16 ist dann $\widetilde{c}$ ebenfalls auf $\{0,\dots,n\} \setminus c^{-1}(c(j))$ injektiv für jedes $j \in \{0,\dots,n\}$. Daraus folgt, dass $\widetilde{c}\phi_j\big|_{\{0,\dots,n-1\}}$ injektiv ist. Zu zeigen bleibt $\widetilde{c}\phi_j(0) = \widetilde{c}\phi_j(n)$.

Für $j = 0$ berechnet man:

$$\begin{aligned} \widetilde{c}\phi_0(0) &= \widetilde{c}(1) = \psi\left(c(0), c(1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(1)) = c(1) = \psi\left(c(0), c(1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(0)) \\ &= \psi\left(c(0), c(1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(n+1)) = \widetilde{c}(n+1) = \widetilde{c}\phi_0(n). \end{aligned}$$

Für $j \in \{1,\dots,n-1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{c}\phi_j(0) &= \widetilde{c}(0) = \psi\left(c(j), c(j+1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(0)) = c(0) = c(n+1) \\ &= \widetilde{c}(n+1) = \widetilde{c}\phi_j(n). \end{aligned}$$

Für $j = n$ berechnet man:

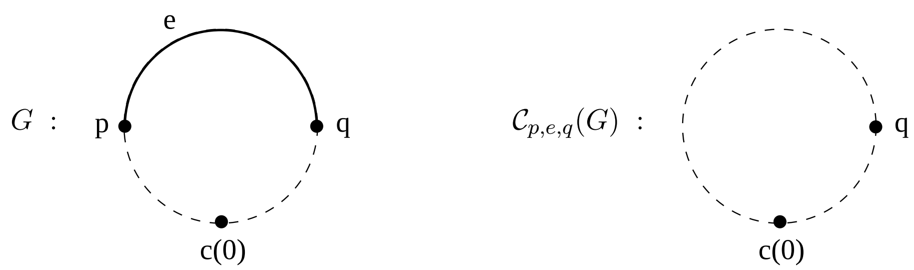
$$\begin{aligned} \widetilde{c}\phi_n(0) &= \widetilde{c}(0) = \psi\left(c(n), c(n+1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(0)) = c(0) = c(n+1) \\ &= \psi\left(c(n), c(n+1), V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right)(c(n+1)) = \widetilde{c}(n+1) = \widetilde{c}\phi_n(n). \end{aligned}$$

Zu (b): Definiere $s := n - j \in \{0,\dots,n\}$, $d := c \circ \delta_{n+1}$ und $D := C \circ \Delta_{n+1}$. Damit gelten

$$\begin{aligned} &D(l_{s+1}) = C\left(l_{n+2-(s+1)}\right) = C(l_{n-s+1}) = C(l_{j+1}) = e, \\ &d(s+1) = c(n+1-(s+1)) = c(n-s) = c(j) = q \quad \text{und} \\ &d(s) = c(n+1-s) = c(j+1) = p. \end{aligned}$$

Nun wendet man (a) auf den Kreis $(d, D) : J'_{n+1} \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ an und erhält den Kreis $\left(\widetilde{d}, \widetilde{D}\right) \circ (\phi_s, \Phi_s)$. □

Bemerkung Die folgende Abbildung veranschaulicht die Situation aus Satz 5.6.



□

Satz 5.7 *Vorgelegt sei ein orientierter Graph G, Ecken p, q und eine Kante e von G, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definert ist. Sei $(w, W) : J'_{n+1} \to G$ ein Weg, für den $W(l_{j+1}) = e$ für ein $j \in \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

(a) Wenn $p = w(j)$ und $q = w(j+1)$ gilt, so ist

$$\left(\widetilde{w}, \widetilde{W}\right) \circ (\phi_j, \Phi_j) : J'_n \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$$

ein Weg. Dabei ist $\left(\widetilde{w}, \widetilde{W}\right)$ die von (w, W) induzierte Abbildung aus Satz 4.16 auf Seite 86 und (ϕ_j, Φ_j) der Isomorphismus aus Lemma 5.5 auf Seite 117.

(b) Wenn $q = w(j)$ und $p = w(j+1)$ gilt, so ist

$$\left(\widetilde{w \circ \delta_{n+1}}, \widetilde{W \circ \Delta_{n+1}}\right) \circ (\phi_{n-j}, \Phi_{n-j}) : J'_n \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$$

ein Weg. Dabei ist $(\widetilde{w \circ \delta_{n+1}}, \widetilde{W \circ \Delta_{n+1}})$ die von $(w \circ \delta_{n+1}, W \circ \Delta_{n+1})$ induzierte Abbildung aus Satz 4.16 auf Seite 86, (ϕ_{n-j}, Φ_{n-j}) der Isomorphismus aus 5.5 und $(\delta_{n+1}, \Delta_{n+1})$ der Isomorphismus aus Lemma 5.4 auf Seite 117.

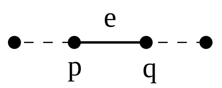
Beweis **Zu (a):** Die Aussage folgt aus Satz 4.16 und Lemma 5.4.

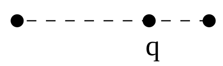
Zu (b): Definiere $s := n - j \in \{0, \dots, n\}$, $d := w \circ \delta_{n+1}$ und $D := W \circ \Delta_{n+1}$. Damit gelten

$$\begin{aligned}
&D(l_{s+1}) = W\left(l_{n+2-(s+1)}\right) = W(l_{n-s+1}) = W(l_{j+1}) = e,\\
&d(s+1) = w(n+1-(s+1)) = w(n-s) = w(j) = q \quad \text{und}\\
&d(s) = w(n+1-s) = w(j+1) = p.
\end{aligned}$$

Nun wendet man (a) auf den Weg $(d, D) : J'_{n+1} \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ an und erhält einen Weg $\left(\widetilde{d}, \widetilde{D}\right) \circ (\phi_s, \Phi_s)$. □

Bemerkung Die folgende Abbildung veranschaulicht die Situation aus Satz 5.7.

G : 

$\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$: 

□

Satz 5.8 *Vorgelegt sei ein orientierter Graph G, Ecken p, q und eine Kante e von G, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definert ist, sowie ein Weg $(w, W) : J'_n \to G$ mit $n \in \mathbb{N}$, $e \notin$ Bild(W), $p = w(s)$, $q = w(t)$, $s, t \in \{0, \dots, n\}$ und $m := \min\{t, s\}$. Dann ist $\left(\widetilde{w}, \widetilde{W}\right) : J'_{|t-s|} \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert durch $\widetilde{w}(i) := \psi\left(p, q, V_G\right)(w(m+i))$ und $\widetilde{W}(l_i) := W(l_{m+i})$ ein Kreis.*

Beweis Mit W ist auch $\widetilde{W}$ injektiv. Außerdem ist $\widetilde{w}$ injektiv auf $\{0, \dots, |t-s| - 1\}$:

$$\widetilde{w}(i) = \widetilde{w}(j) \implies \psi\left(p, q, V_G\right) w(m+i) = \psi\left(p, q, V_G\right) w(m+j)$$

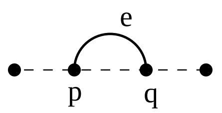
$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ w(m+i) = w(m+j) \ \vee\ [w(m+i) = p \ \wedge\ w(m+j) = q] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vee\ [w(m+i) = q \ \wedge\ w(m+j) = p] \\
&\Longrightarrow\ m+i = m+j \ \vee\ [m+i = s \ \wedge\ m+j = t] \ \vee\ [m+j = s \ \wedge\ m+i = t] \\
&\Longrightarrow\ i = j, \text{ denn } m \in \{s,t\}.
\end{aligned}$$

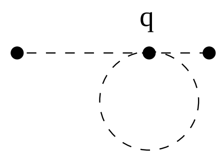
Darüber hinaus gilt $\widetilde{w}(0) = \psi\,(p,q,V_G)\,w(m) = q = \psi\,(p,q,V_G)\,w(m+|t-s|) = \widetilde{w}\,(|t-s|)$. Es bleibt nachzuweisen, dass $\left(\widetilde{w},\widetilde{W}\right)$ ein Homomorphismus ist. Sei o.B.d.A. $m = s$. Man errechnet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2\,(\widetilde{w})\,g_{J'_{|t-s|}}(l_x) &= \mathcal{P}_2\,(\widetilde{w})\,(\{x, x-1\}) = \{\widetilde{w}(x), \widetilde{w}(x-1)\} \\
&= \{\psi(p,q,V_G)w(m+x), \psi(p,q,V_G)w(m+x-1)\} \\
&= \mathcal{P}_2\,(\psi(p,q,V_G)\circ w)\,(\{s+x, s+x-1\}) \\
&= \mathcal{P}_2\,(\psi(p,q,V_G)\circ w)\,g_{J'_n}\,(l_{s+x}) \\
&= \mathcal{P}_2\,(\psi(p,q,V_G))\,\mathcal{P}_2(w)g_{J'_n}\,(l_{s+x}) = \mathcal{P}_2\,(\psi(p,q,V_G))\,g_G W(l_{s+x}) \\
&= g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\,(W(l_{m+x})) = g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\widetilde{W}(l_x).
\end{aligned}$$

Für $J'_{|t-s|}$ wählt man nun die passende Orientierung. □

Bemerkung Die folgende Abbildung veranschaulicht die Situation aus Satz 5.8.

G : 

$\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$: 

□

Satz 5.9 *Vorgelegt sei ein orientierter Graph G, Ecken p, q und eine Kante e von G, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definert ist, sowie ein Kreis $(c, C) : J'_n \to G$ mit $e \notin \mathrm{Bild}\,C$. Außerdem sei die Bedingung $c^{-1}(p) = \emptyset \vee \left[c^{-1}(p) \neq \emptyset \wedge c^{-1}(q) = \emptyset\right]$ erfüllt. Dann ist die Abbildung $\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right) : J'_n \to L$, die durch $\widetilde{C}(x) := C(x)$ und*

$$\widetilde{c}(x) := \begin{cases} c(x) & : \ x \notin c^{-1}(p) \\ q & : \ x \in c^{-1}(p) \end{cases}$$

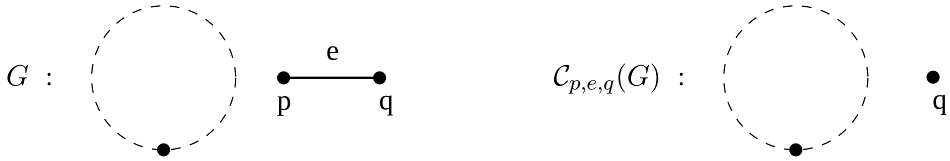
festgelegt wird, ein Kreis.

Beweis Sei $(i, I) : \mathrm{Bild}(c, C) \to G$ die Inklusion und $\left(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}\right) : \mathrm{Bild}(c, C) \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ die Abbildung aus 4.17.1. auf Seite 87. Es gilt dann $\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right) = \left(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}\right) \circ (c, C)$, denn zum einen ist $\widetilde{\imath}c(x) = \widetilde{\imath}(p) = q = \widetilde{c}(x)$ für $x \in c^{-1}(p)$ und zum anderen $\widetilde{\imath}c(x) = ic(x) = \widetilde{c}(x)$ für $x = i(x) \notin c^{-1}(p)$. Als Komposition ist $\left(\widetilde{c}, \widetilde{C}\right)$ ein Homomorphismus. Nach Satz 4.17.2. ist

$\left(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}\right)$ injektiv, also sind mit C und $c\big|_{\{0,\ldots,n-1\}}$ auch $\widetilde{C}$ und $\widetilde{c}\big|_{\{0,\ldots,n-1\}}$ injektiv. Außerdem gilt $\widetilde{c}(0) = \widetilde{\imath}c(0) = \widetilde{\imath}c(n) = \widetilde{c}(n)$. □

Bemerkung Die folgende Abbildung veranschaulicht die Situation aus Satz 5.9.

(a) Für $c^{-1}(p) = \emptyset$:



(b) Für $c^{-1}(p) \neq \emptyset$:

□

5.1.2 Hochheben von Wegen

Satz 5.10 *Für $X \in \{G, H, L\}$ seien $X = (V_X, E_X, g_X)$ orientierte Graphen. Für Ecken $p, q \in V_L$ und eine Kante $e \in E_L$ sei $H := C_{p,e,q}(L)$ definiert. Vorgelegt seien darüber hinaus endliche Mengen E_K und V_K, für die $E_G \subset E_K$, $V_G \subset V_K$, $E_K \setminus E_G = \{e\}$ und $V_K \setminus V_G = \{p\}$ gelten. In*

$$(f, F) : J'_n \xrightarrow{(d,D)} G \xrightarrow{(i,I)} H$$

sei (d, D) ein Isomorphismus orientierter Graphen, $G < H$, (i, I) der Inklusionshomomorphismus, $(f, F) := (i, I) \circ (d, D)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Weg $(w, W) : J'_m \to L$, für den (a) sowie (b) oder (c) gilt:

(a) $f(0) = w(0), \quad f(n) = w(m).$

(b) $\mathit{Bild}\, f = \mathit{Bild}\, w, \quad \mathit{Bild}\, F = \mathit{Bild}\, W, \quad m = n.$

(c) $\mathit{Bild}\, f \cup \{p\} = \mathit{Bild}\, w, \quad \mathit{Bild}\, F \cup \{e\} = \mathit{Bild}\, W, \quad m = n + 1.$

Zur Konstruktion des Weges (w, W) müssen einige Fallunterscheidungen herangezogen werden. Dort wird jeweils eine Abbildungsvorschrift für (w, W) angegeben. Dann muss nachgewiesen werden, dass es sich dabei um einen Weg handelt. Versieht man J'_m mit der von L induzierten Orientierung $g_{J'_m}(x) := (w \times w)^{-1}\left(g_L\left(W(x)\right)\right)$ für jede Kante x von J'_m, so ist $(w, W) : J'_m \to L$ ein Homomorphismus orientierter Graphen. In der Bemerkung auf Seite 128 sind einige der nachfolgenden Fälle „abgebildet“.

1. *$q \notin \operatorname{Bild} f$. Sei $m := n$, $w(x) := f(x)$ für jede Ecke x von J'_m und $W(x) := F(x)$ für jede Kante x von J'_m.*

2. *$q \in \operatorname{Bild} f$. Sei $s := f^{-1}(q)$. Da $Inz\,(s, J'_n)$ nicht leer ist, ergibt sich wegen 4.15.1. auf Seite 85 die folgende Fallunterscheidung (a), (b) und (c):*

   (a) *$M^s_p(f, F) = \emptyset$. Sei $m := n$, $w(x) := f(x)$ für jede Ecke x von J'_m und $W(x) := F(x)$ für jede Kante x von J'_m.*

   (b) *$M^s_q(f, F) = \emptyset$ und $M^s_p(f, F) \neq \emptyset$.*

      i. *$s = 0$. Sei $m := n+1$. Definiere Abbildungen $\phi : V_{J'_m} \to V_K$, $\Phi : E_{J'_m} \to E_K$ und $g_K : E_K \to V_K \times V_K$ durch:*

$$g_K(x) := \begin{cases} g_G(x) & : \; x \in E_G \setminus \{D\,(l_1)\} \\ g_L(e) & : \; x = e \\ \psi^2\,(q, p, V_K)\, g_G(x) & : \; x = D\,(l_1) \end{cases},$$

$$\phi(i) := \begin{cases} q & : \; i = 0 \\ p & : \; i = 1 \\ d(i-1) & : \; 2 \leq i \leq m \end{cases}, \Phi\,(l_i) := \begin{cases} e & : \; i = 1 \\ D\,(l_{i-1}) & : \; 2 \leq i \leq m \end{cases}.$$

      Dann ist $K := (V_K, E_K, g_K)$ ein Teilgraph von L. Die Abbildung $(\phi, \Phi) : J'_m \to \nu K$ ist ein Isomorphismus nicht-orientierter Graphen und man definiert $w(x) := \phi(x)$ für jede Ecke x von J'_m und $W(x) := \Phi(x)$ für jede Kante x von J'_m.

      ii. *$s \in \{1, \ldots, n-1\}$, falls $n \geq 2$. Sei $m := n$, $W(x) := F(x)$ für jede Kante x von J'_n sowie*

$$w(i) := \begin{cases} f(i) & : \; i \neq s \\ p & : \; i = s \end{cases} \qquad \text{für jedes} \quad i \in V_{J'_m}.$$

      iii. *$s = n$. Sei $m := n+1$. Definiere Abbildungen $\phi : V_{J'_m} \to V_K$, $\Phi : E_{J'_m} \to E_K$ und $g_K : E_K \to V_K \times V_K$ durch:*

$$g_K(x) := \begin{cases} g_G(x) & : \; x \in E_G \setminus \{D\,(l_n)\} \\ g_L(e) & : \; x = e \\ \psi^2\,(q, p, V_K)\, g_G(x) & : \; x = D\,(l_n) \end{cases},$$

$$\phi(i) := \begin{cases} d(i) & : \; 0 \leq i \leq n-1 \\ p & : \; i = n \\ d(n) & : \; i = n+1 \end{cases}, \quad \Phi\,(l_i) := \begin{cases} D\,(l_i) & : \; 1 \leq i \leq n \\ e & : \; i = n+1 \end{cases}.$$

Dann ist $K := (V_K, E_K, g_K)$ ein Teilgraph von L. Die Abbildung $(\phi, \Phi) : J'_m \to \nu K$ ist ein Isomorphismus nicht-orientierter Graphen und man definiert $w(x) := \phi(x)$ für jede Ecke x von J'_m und $W(x) := \Phi(x)$ für jede Kante x von J'_m.

(c) *$M^s_q(f, F) \neq \emptyset$ und $M^s_p(f, F) \neq \emptyset$. Sei $m := n+1$. Es gelten hier $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ sowie $M^s_p(f, F) = \{l_s\}$ oder $M^s_p(f, F) = \{l_{s+1}\}$. Definiere $g_K : E_K \to V_K \times V_K$ und $\Phi : E_{J'_m} \to E_K$ durch*

$$g_K(x) := \begin{cases} g_G(x) & : \ x \in E_G \setminus \left\{ D\left(M^s_p(f,F)\right)\right\} \\ g_L(e) & : \ x = e \\ \psi^2\left(q, p, V_K\right) g_G(x) & : \ x \in D\left(M^s_p(f,F)\right) \end{cases},$$

$$\Phi(l_i) := \begin{cases} D(l_i) & : \ 1 \leq i \leq s \\ e & : \ i = s+1 \\ D(l_{i-1}) & : \ s+2 \leq i \leq m \end{cases}.$$

Zur Definition der Abbildung $\phi : V_{J'_m} \to V_K$ wird eine weitere Fallunterscheidung benötigt:

i. *Für $M^s_p(f, F) = \{l_s\}$:*
$$\phi(i) := \begin{cases} d(i) & : \ 0 \leq i \leq s-1 \\ p & : \ i = s \\ d(i-1) & : \ s+1 \leq i \leq m \end{cases}.$$

ii. *Für $M^s_p(f, F) = \{l_{s+1}\}$:*
$$\phi(i) := \begin{cases} d(i) & : \ 0 \leq i \leq s \\ p & : \ i = s+1 \\ d(i-1) & : \ s+2 \leq i \leq m \end{cases}.$$

Dann ist $K := (V_K, E_K, g_K)$ ein Teilgraph von L und $(\phi, \Phi) : J'_m \to \nu K$ ein Isomorphismus nicht-orientierter Graphen. Definiere $w(x) := \phi(x)$ für jede Ecke x von J'_m und $W(x) := \Phi(x)$ für jede Kante x von J'_m.

Beweis **Zu 2(b)i.:** Aus $M^0_p(f, F) \neq \emptyset$ folgt $M^0_p(f, F) = \{l_1\}$. Da (d, D) ein Isomorphismus ist, gelten

$$M^{d(0)}_q(i, I) = M^0_q(f, F) = \emptyset, \quad M^{d(0)}_p(i, I) = D\left(M^0_p(f, F)\right) = D\left(l_1\right)$$

nach Lemma 4.15.6. sowie $q = f(0) = i \circ d(0) = d(0) \in \operatorname{Bild} i$. Daher ist $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) : G \to L$ nach Satz 4.18 B 2. ein injektiver Homomorphismus. Für jedes $x \in E_K$ gilt $g_K(x) = g_L(x)$:

- $x \in E_G \setminus \{D\left(l_1\right)\} : x \neq D(l_1) \overset{(d,D)\text{ Isom.}}{\Longrightarrow} d(0) \notin g_G(x) \implies \widetilde{\imath}^2 g_G(x) = g_G(x) \implies g_L(x) = g_L \widetilde{I}(x) \overset{(\widetilde{\imath}, \widetilde{I})\text{ Homom.}}{=} \widetilde{\imath}^2 g_G(x) = g_G(x) = g_K(x)$.

- $x = D(l_1) : g_L(x) = \widetilde{\imath}^2 g_G D(l_1) = \psi^2(q,p,V_K)\, g_G D(l_1) = g_K(x)$.
- $x = e : g_L(x) = g_K(x)$.

Daher ist K ein Teilgraph von L. Nun wird gezeigt, dass (ϕ, Φ) ein Isomorphismus der nicht-orientierten Graphen νK und J'_m ist. An den Definitionen der Abbildungen erkennt man, dass ϕ und Φ bijektiv sind. Daher bleibt $\nu g_K \Phi(l_i) = \mathcal{P}_2(\phi) g_{J'_m}(l_i) = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ zu zeigen:

- $i = 1 : \nu g_K \Phi(l_1) = \nu g_K(e) = \{p, q\} = \{p, d(0)\} = \{\phi(1), \phi(0)\}$.
- $i = 2 : \nu g_K \Phi(l_2) = \mathcal{P}_2(\psi(q,p,V_G))(\{d(0), d(1)\} = \{p, d(1)\} = \{\phi(1), \phi(2)\}$.
- $i \geq 3 : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_{i-1}) = \nu g_G D(l_{i-1}) = \{d(i-1), d(i-2)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$.

Für den Weg (w, W) gilt nun: $w(0) = \phi(0) = q = d(0) = f(0)$, $w(m) = \phi(m) = d(m-1) = d(n) = f(n)$ sowie $\operatorname{Bild} W = \operatorname{Bild} \Phi = E_K = E_G \cup \{e\} = \operatorname{Bild} D \cup \{e\} = \operatorname{Bild} F \cup \{e\}$, $\operatorname{Bild} w = \operatorname{Bild} \phi = V_K = V_G \cup \{p\} = \operatorname{Bild} d \cup \{p\} = \operatorname{Bild} f \cup \{p\}$. Daher gelten (a) und (c) aus der Behauptung.

Zu 2(b)iii.: Man geht wie im Fall 2(b)i. vor. Aus $M_p^n(f,F) \neq \emptyset$ folgt $M_p^n(f,F) = \{l_n\}$. Da (d, D) ein Isomorphismus ist, gelten

$$M_q^{d(n)}(i,I) = M_q^n(f,F) = \emptyset, \quad M_p^{d(n)}(i,I) = D\left(M_p^n(f,F)\right) = D(l_n)$$

nach Lemma 4.15.6. sowie $q = f(n) = i \circ d(n) = d(n) \in \operatorname{Bild} i$. Daher ist $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) : G \to L$ nach Satz 4.18 B 2. ein injektiver Homomorphismus. Für jedes $x \in E_K$ gilt $g_K(x) = g_L(x)$:

- $x \in E_G \setminus \{D(l_n)\} : x \neq D(l_n) \overset{(d,D)\text{ Isom.}}{\Longrightarrow} d(n) \notin g_G(x) \Longrightarrow \widetilde{\imath}^2 g_G(x) = g_G(x) \Longrightarrow g_L(x) = g_L \widetilde{I}(x) \overset{(\widetilde{\imath}, \widetilde{I})\text{ Homom.}}{=} \widetilde{\imath}^2 g_G(x) = g_G(x) = g_K(x)$.
- $x = D(l_n) : g_L(x) = \widetilde{\imath}^2 g_G D(l_n) = \psi^2(q,p,V_K)\, g_G D(l_n) = g_K(x)$.
- $x = e : g_L(x) = g_K(x)$.

Daher ist K ein Teilgraph von L. Nun wird gezeigt, dass (ϕ, Φ) ein Isomorphismus der nicht-orientierten Graphen νK und J'_m ist. An den Definitionen der Abbildungen erkennt man, dass ϕ und Φ bijektiv sind. Daher bleibt $\nu g_K \Phi(l_i) = \mathcal{P}_2(\phi) g_{J'_m}(l_i) = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ zu zeigen:

- $i = m : \nu g_K \Phi(l_m) = \nu g_K(e) = \{p, q\} = \{p, d(n)\} = \{\phi(n), \phi(n+1)\}$.
- $i = n : \nu g_K \Phi(l_n) = \nu g_K D(l_n) = \{p, d(n-1)\} = \{\phi(n), \phi(n-1)\}$.

- $1 \leq i \leq n{-}1 : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_i) = \nu g_G D(l_i) = \{d(i), d(i-1)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$.

Für den Weg (w, W) gilt nun: $w(0) = \phi(0) = d(0) = f(0)$, $w(m) = \phi(m) = d(n) = f(n)$ sowie $\operatorname{Bild} W = \operatorname{Bild} \Phi = E_K = E_G \cup \{e\} = \operatorname{Bild} D \cup \{e\} = \operatorname{Bild} F \cup \{e\}$, $\operatorname{Bild} w = \operatorname{Bild} \phi = V_K = V_G \cup \{p\} = \operatorname{Bild} d \cup \{p\} = \operatorname{Bild} f \cup \{p\}$. Daher gelten (a) und (c) aus der Behauptung.

Zu (c): Die erste Aussage zeigt man wie folgt: $\forall\ 0 \leq s \leq n \ : \ Sch\,(s, J_n') = \emptyset \overset{4.15.5.}{\Longrightarrow} M_q^s(f, F) \cap M_p^s(f, F) = \emptyset \implies \exists\ x \in M_p^s(f, F),\ y \in M_q^s(f, F) : x \neq y \implies x, y \in Inz\,(s, J_n') \implies \{x, y\} = \{l_s, l_{s+1}\}$.

Aus Lemma 4.15.6 ergibt sich $D\left(M_p^s(f, F)\right) = M_p^{d(s)}(i, I) \neq \emptyset$ und $D\left(M_q^s(f, F)\right) = M_q^{d(s)}(i, I) \neq \emptyset$. Daher kann man Satz 4.18 B 3. auf die Inklusion $(i, I) : G \to H$ anwenden. Es folgt, dass K ein Teilgraph von L vermöge der Inklusion $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I})$ ist. Die Abbildung $(\phi, \Phi) : J_m' \to \nu K$ ist ein Isomorphismus, denn zum einen sind ϕ und Φ offensichtlich bijektiv, und zum anderen gilt
im Fall (c) i.:

- $1 \leq i \leq s-1 : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_i) = g_G D(l_i) = \{d(i), d(i-1)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$,
- $i = s : \nu g_K \Phi(l_s) = \nu g_K D(l_s) = \mathcal{P}_2\left(\psi(q, p, V_K)\right)\left(\{d(s-1), d(s)\}\right) = \{d(s-1), p\}$
$= \{\phi(s-1), \phi(s)\}$,
- $i = s+1 : \nu g_K \Phi\left(l_{s+1}\right) = \nu g_K(e) = \{p, q\} = \{\phi(s), d(s)\} = \{\phi(s+1), \phi(s)\}$,
- $s+2 \leq i \leq m : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_{i-1}) = \{d(i-1), d(i-2)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$,

und im Fall (c) ii.:

- $1 \leq i \leq s : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_i) = \nu g_G D(l_i) = \{d(i), d(i-1)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$,
- $i = s+1 : \nu g_K \Phi(l_{s+1}) = \nu g_K(e) = \{p, q\} = \{d(s), \phi(s+1)\} = \{\phi(s+1), \phi(s)\}$,
- $i = s+2 : \nu g_K \Phi(l_{s+2}) = \nu g_K D(l_{s+1}) = \{d(s+1), p\} = \{\phi(s+2), \phi(s+1)\}$,
- $s+3 \leq i \leq m : \nu g_K \Phi(l_i) = \nu g_K D(l_{i-1}) = \{d(i-1), d(i-2)\} = \{\phi(i), \phi(i-1)\}$.

Die Behauptungen (a) und (c) ergeben sich wie folgt: $w(0) = \phi(0) = d(0) = f(0)$, $w(m) = \phi(m) = d(n) = f(n)$ sowie $\operatorname{Bild} W = \operatorname{Bild} \Phi = E_K = E_G \cup \{e\} = \operatorname{Bild} D \cup \{e\} = \operatorname{Bild} F \cup \{e\}$, $\operatorname{Bild} w = \operatorname{Bild} \phi = V_K = V_G \cup \{p\} = \operatorname{Bild} d \cup \{p\} = \operatorname{Bild} f \cup \{p\}$.

Zu 1.: Es lässt sich 4.18 A auf die Inklusion $(i, I) : G \to H$ anwenden. So erhält man den Weg $(w, W) := (\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) \circ (d, D)$, also $w(x) = i \circ d(x) = f(x)$ und $W(x) = I \circ D(x) = F(x)$.

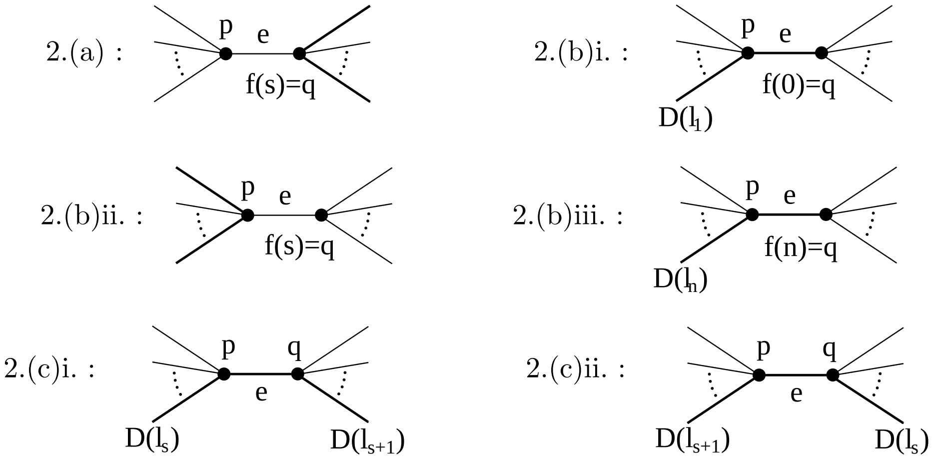
Zu 2.(a): Es lässt sich 4.18 B 1. auf die Inklusion $(i, I) : G \to H$ anwenden, denn nach 4.15.6. ist $M_p^s(f, F) = M_p^{d(s)}(i, I) = \emptyset$. Den Weg (w, W) erhält man wie in 1.

Zu 2.(b) ii.: Es lässt sich 4.18 B 2. auf die Inklusion $(i, I) : G \to H$ anwenden, denn nach 4.15.6. ist $M_q^s(f, F) = M_q^{d(s)}(i, I) = \emptyset$. Demnach ergibt sich $W(x) := \widetilde{I} \circ D(x) = F(x)$ und

$$w(x) := \widetilde{\imath}\,(d(x)) = \begin{cases} i\,(d(x)) = f(x) & : \quad d(x) \neq d(s) \Leftrightarrow x \neq s \\ p & : \quad d(x) = d(s) \Leftrightarrow x = s \end{cases}.$$

□

Bemerkung In der folgenden Abbildung ist jeweils ein Ausschnitt des Graphen L dargestellt. Die fett markierten Linien bezeichnen den Verlauf des hochgehobenen Weges (w, W).



□

5.1.3 Mehrfacher Zusammenhang

Definition 5.11 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph. Zwei Ecken $v, w \in V$ heißen* **zusammenhängend***, wenn es einen Weg von v nach w in G gibt. Man definiert eine Äquivalenzrelation $R \subset V \times V$ durch $(v, w) \in R :\Leftrightarrow v$ und w sind zusammenhängend in G oder $v = w$. Damit zerfällt V in Äquivalenzklassen V_i, so dass $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ gilt. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definiere die* **Komponenten** *$G_j := \left(V_{G_j}, E_{G_j}, g_{G_j}\right)$ von G durch $V_{G_j} := V_j$, $E_{G_j} := \{e \in E \,|\,$ die in G zu e inzidenten Ecken sind in $V_{G_j}\}$ und $g_{G_j}(e) := g(e)$ für $e \in E_{G_j}$. Die Anzahl der Komponenten wird mit $p_0(G)$ bezeichnet. Ist $p_0(G) = 1$, so heißt G* **zusammenhängend***. Die Zahl $p_1(G) := |E| - |V| + p_0(G)$ nennt man* **chromatische Zahl** *von G. Ein Graph mit chromatischer Zahl Null heißt* **Wald***. Ein* **Baum** *ist ein Wald mit genau einer Komponente.* □

Satz 5.12 *Vorgelegt sei ein Graph G sowie eine (p, e, q)-Kontraktion $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$.*

(a) Ist $H \neq \emptyset$ ein zu G disjunkter Graph, so gilt $p_0(H) + p_0(G) = p_0(H \cup G)$.

(b) i. $p_0(G) = p_0(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$, ii. $p_1(G) = p_1(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$.

(c) Sei H eine Komponente von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$. Es gibt genau eine Komponente H' von G, für die $E_H \subset E_{H'}$ und $V_H \subset V_{H'}$ gilt.

Beweis **Zu (a):** Es genügt die Behauptung für zusammenhängende Graphen G und H zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt dann mit Induktion über die Anzahl der Komponenten, denn eine Komponente ist definitionsgemäß zusammenhängend. Offenbar gehören alle Ecken von H zu einer Äquivalenzklasse und alle Ecken von G zu einer Äquivalenzklasse in $G \cup H$. Diese Klassen sind disjunkt, denn: Angenommen es gibt einen Weg $(w, W) : J'_n \to G \cup H$, $n \geq 2$, mit $w(0) \in V_H$ und $w(n) \in V_G$. Wegen $V_G \cap V_H = \emptyset$ muss $W(l_i), W(l_{i+1}) \in E_H$, falls $w(i) \in V_H$ ist, oder $W(l_i), W(l_{i+1}) \in E_G$, falls $w(i) \in V_G$ ist, für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gelten. Aus $w(0) \in V_H$ folgt $W(l_1) \in E_H$ und $w(1) \in V_H$. Also gilt (induktiv) $W(l_i) \in E_H$ und $w(i) \in V_H$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daher muss $w(n) \in V_H$ sein. Widerspruch! Für $n = 1$ erhält man sofort einen analogen Widerspruch. Daher gilt $p_0(G \cup H) = 2$.

Zu (b)i.: Der Beweis wird mit Induktion über die Anzahl $p_0(G) = n$ der Komponenten von G geführt.

$\boldsymbol{n = 1}$ **:** Zu zeigen ist: G zusammenhängend $\Leftrightarrow \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ zusammenhängend.

⇒: Es seien x, y verschiedene Ecken von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg $(w, W) : J'_{n+1} \to G$, $n \in \mathbb{N}_0$ von x nach y. Angenommen es gilt $e \in \operatorname{Bild} W$. In Satz 5.7 (a) auf Seite 121 gilt dann $j > 0$, denn $p \neq x = w(0)$. Man berechnet $\widetilde{w}\phi_j(0) = \widetilde{w}(0) = w(0) = x$ und $\widetilde{w}\phi_j(n) = \widetilde{w}(n+1) = w(n+1) = y$. Also liefert 5.7(a) einen Weg von x nach y in $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$. Tritt (b) in 5.7 ein, schließt man analog, denn dort gilt dann $j < n$. Nun gelte $e \notin \operatorname{Bild} W$. Es sei $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) : J'_{n+1} \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ der Homomorphismus aus 4.17.1. auf Seite 87. Wenn $w^{-1}(p) = \emptyset$ gilt, ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ injektiv nach 4.17.2. Wegen $\widetilde{w}(0) = w(0)$ und $\widetilde{w}(n+1) = w(n+1)$ ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ ein Weg von x nach y. Gilt $w^{-1}(p) \neq \emptyset$, so sei $s := w^{-1}(p)$. Aus $x = w(0), y = w(n+1) \in V_G \setminus \{p\}$ folgt $s \neq 0$ und $s \neq n+1$. Tritt der Fall $w^{-1}(q) = \emptyset$ ein, ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ der gesuchte Weg von x nach y gemäß 4.17.2. Tritt $w^{-1}(q) \neq \emptyset$ ein, so sei $t := w^{-1}(q)$ und o.B.d.A. $s < t$. Der Weg (w, W) induziert einen Weg von $x = w(0)$ nach $p = w(s)$ und, sofern $q \neq y$ gilt, einen Weg von $w(t) = q$ nach $y = w(n+1)$. Also gibt es einen Weg von x nach y in G, der e als Kante enthält. Dieser Fall ist bereits untersucht worden.

$\Leftarrow$: Seien x, y Ecken von G. Wenn $\{x, y\} = \{p, q\}$ gilt, ist $(w, W) : J'_1 \to G$, $w(0) := p$, $w(1) := q$ und $W(l_1) := e$ der gesuchte Weg. Seien nun $x, y \in V_G \setminus \{p\} = V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$. Dann gibt es nach Voraussetzung einen Weg von x nach y in $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$, der mit Satz 5.10 auf Seite 123 zu einem Weg in G von x nach y hochgehoben werden kann. Wenn $x = p$ und $y \in V_G \setminus \{p, q\}$ gilt, gibt es zunächst einen Weg von q nach y in $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ und somit nach Satz 5.10 auch in G. Da p in G adjazent zu q ist, gibt es deshalb auch einen Weg von x nach y in G.

$n \mapsto n+1$: Es seien G_i, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ die Komponenten von G. Da die Kantenmengen der Komponenten definitionsgemäß disjunkt sind, gibt es genau ein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $e \in E_{G_j}$ und $p, q \in V_{G_j}$. O.B.d.A. sei $j \neq 1$. Der Graph $H := \biguplus_{i=2}^{n} G_i$ hat n Komponenten. Satz 4.9 auf Seite 79 liefert $\mathcal{C}_{p,e,q}(G) = \mathcal{C}_{p,e,q}(H) \cup G_1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} p_0(G) &= p_0(G_1 \cup H) \overset{\text{(a)}}{=} p_0(G_1) + p_0(H) = 1 + n \overset{\text{IV}}{=} p_0(G_1) + p_0\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(H)\right) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} p_0\left(G_1 \cup \mathcal{C}_{p,e,q}(H)\right) = p_0\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right). \end{aligned}$$

Zu (b)ii.: Man berechnet:

$$\begin{aligned} p_1(G) &= |E_G| - |V_G| + p_0(G) = |E_G| - 1 - |V_G| + 1 + p_0(G) \\ &\overset{\text{(b)i.}}{=} \left|E_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right| - \left|V_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}\right| + p_0\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right) = p_1\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right). \end{aligned}$$

Zu (c): Es seien G_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Komponenten von G. Da die Kantenmengen der Komponenten definitionsgemäß disjunkt sind, gibt es genau ein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $e \in E_{G_j}$ und $p, q \in V_{G_j}$. O.B.d.A. sei $j = 1$. Wie im Induktionsschluss von (b)i. erkennt man, dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G_1)$, $G_2, \ldots, G_n$ die Komponenten von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ sind. Also gilt $H = \mathcal{C}_{p,e,q}(G_1)$ oder $H = G_i$ für ein $i \in \{2, \ldots, n\}$. Dann wählt man $H' := G_1$ bzw. $H' := G_i$. Sei H'' eine weitere Komponente von G mit $E_H \subset E_{H''}$ und $V_H \subset V_{H''}$. Es folgt $E_H \subset E_{H'} \cap E_{H''} = \emptyset$ sowie $V_H \subset V_{H'} \cap V_{H''} = \emptyset$. Daher gilt $H = \emptyset$. Widerspruch! $\square$

Definition 5.13 *Es sei $G = (V, E, g)$ ein Graph.*

1. *Für $U \subset V$ definiert man den Graphen $G - U := (V_{G-U}, E_{G-U}, g_{G-U})$ durch $V_{G-U} := V_G \backslash U$, $E_{G-U} := \{e \in E \mid$ die in G zu e inzidenten Ecken sind in $V_{G-U}\}$ und $g_{G-U}(e) := g(e)$ für $e \in E_{G-U}$.*

2. *Für $U \subset E$ wird der Graph $G - U := (V_{G-U}, E_{G-U}, g_{G-U})$ durch $V_{G-U} := V$, $E_{G-U} := E \setminus U$ und $g_{G-U}(e) := g(e)$ für $e \in E_{G-U}$ definiert.*

$\square$

Korollar 5.14 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph und U eine nichtleere Teilmenge von V. Dann gilt $E_{G-U} = E \setminus \bigcup_{u \in U} Inz(u, G)$.*

Beweis Sei $x \in E$ und G nicht-orientiert. Es gilt:

$$x \in \bigcup_{u \in U} Inz(u, G) \Leftrightarrow \exists u \in g(x) : u \in U \Leftrightarrow \exists u \in g(x) : u \notin V_G \setminus U = V_{G-U} \Leftrightarrow x \notin E_{G-U}.$$

□

Definition 5.15 *[23], [25] Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Graph $G = (V, E, g)$ heißt n-**zusammenhängend**, wenn er mindestens $n+1$ Ecken hat, und für alle $W \subset V$ mit $|W| \leq n-1$ der Graph $G - W$ zusammenhängend ist.* □

Definition 5.16 *[27] Für $X \in \{G, H, K\}$ sei $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein Graph. Sei $n \in \mathbb{N}$ und G zusammenhängend. Eine n-**Aufspaltung** von G ist ein Paar (H, K) von Teilgraphen von G, das die Bedingungen*

1. $G = H \cup K$,
2. $E_H \cap E_K = \emptyset$,
3. $|V_H \cap V_K| = n$,
4. $|E_H| \geq n$ *und* $|E_K| \geq n$

*erfüllt. Ein Graph G heißt m-**zusammenhängend nach Tutte**, wenn $m \in \mathbb{N}$ gilt und es für jedes $n < m$ keine n-Aufspaltung von G gibt.* □

Bemerkung Ein nach Tutte 1-zusammenhängender Graph ist laut Definition 5.16 zusammenhängend. Der Zusammenhangsbegriff aus Definition 5.11 auf Seite 128 stimmt mit dem aus [27], Seite 15 (unten) überein, wie man an Theorem I.43. auf Seite 21 in [27] erkennt.

Satz 5.17 *Ein 3-zusammenhängender und einfacher Graph ist 3-zusammenhängend nach Tutte.*

Beweis Es wird gezeigt, dass G nicht 3-zusammenhängend oder nicht einfach ist, wenn G nicht 3-zusammenhängend nach Tutte ist. Es sei G o.B.d.A. nicht orientiert und $X = (V_X, E_X, g_X)$ ein Graph für $X \in \{G, H, K\}$.

1. Fall: Sei (K, H) eine 1-Aufspaltung von G mit $\{v\} = V_K \cap V_H$. Dann gilt $V_{G-\{v\}} = V_G \setminus \{v\} = (V_H \setminus \{v\}) \biguplus (V_K \setminus \{v\})$.

1. Unterfall: $V_H \setminus \{v\} \neq \emptyset \wedge V_K \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Angenommen es gibt einen Weg $(d, D) : J_n \to G - \{v\}$ mit $d(0) \in V_H \setminus \{v\}$ und $d(n) \in V_K \setminus \{v\}$. Dann muss das Bild von D Kanten aus E_H und E_K enthalten, die nicht inzident zu v sind, also gibt es ein $i \in \{0, \dots, n\}$ mit

$d(i) \in V_H \setminus \{v\} \cap V_K \setminus \{v\} = \emptyset$. Widerspruch! Also ist $G - \{v\}$ nicht zusammenhängend.

2. Unterfall: $V_H \setminus \{v\} = \emptyset$. Nach Voraussetzung ist $V_H \neq \emptyset$ und $E_H \neq \emptyset$. Also gilt $V_H = \{v\}$ und für $f \in E_H : g_H(f) = \{v\}$. Wegen $E_H \subset E_G$ folgt daraus $g_G(f) = g_H(f) = \{v\}$. Daher ist G nicht einfach.

3. Unterfall: $V_K \setminus \{v\} = \emptyset$. Man schließt wie im 2. Unterfall.

2. Fall: Sei (K, H) eine 2-Aufspaltung von G mit $\{v, w\} = V_K \cap V_H$. Dann gilt $V_{G \setminus \{v,w\}} = V_G \setminus \{v, w\} = (V_H \setminus \{v, w\}) \uplus (V_K \setminus \{v, w\})$.

1. Unterfall: $V_H \setminus \{v, w\} \neq \emptyset \ \wedge \ V_K \setminus \{v, w\} \neq \emptyset$. Man argumentiert wie im 1. Unterfall vom 1. Fall.

2. Unterfall: $V_H \setminus \{v, w\} = \emptyset$. Dann gilt $V_H = \{v, w\}$. Da (K, H) eine 2-Aufspaltung ist, gibt es $e, f \in E_H$ mit $e \neq f$ und $g_H(e) = g_G(e)$, $g_H(f) = g_G(f)$. Wenn $g_H(f), g_H(e) \in \{\{v\}, \{w\}\}$ erfüllt ist, ist G nicht einfach. Ansonsten gilt $g_H(f) = \{v, w\} = g_G(e)$. Demnach sind f und e Mehrfachkanten in G. Auch in diesem Fall ist G nicht einfach.

3. Unterfall: $V_K \setminus \{v, w\} = \emptyset$. Man argumentiert wie im 2. Unterfall. □

Satz 5.18 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph. Der Graph $G - W$ ist zusammenhängend für alle $W \subset V$ mit $|W| \leq 2$, wenn G 3-zusammenhängend nach Tutte ist.*

Beweis Es wird gezeigt: Gibt es ein $W \subset V$ mit $|W| \leq 2$, so dass $G - W$ nicht zusammenhängend ist, so ist G nicht zusammenhängend nach Tutte.

Es sei nun solch ein $W \subset V$ gegeben. O.B.d.A. sei G nicht orientiert.

1. Fall: $|W| = 0$. Dann ist G nicht zusammenhängend, denn $W = \emptyset$. Deshalb ist G nicht 1-zusammenhängend nach Tutte, also auch nicht 3-zusammenhängend nach Tutte.

2. Fall: $|W| = 1$. Wenn G nicht zusammenhängend ist, folgt die Behauptung aus dem 1. Fall. Sei also G zusammenhängend, $W = \{v\}$ und $G - \{v\}$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere Teilgraphen G_1, G_2 von $G - \{v\} < G$, so dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $G - \{v\} = G_1 \cup G_2$ gilt. Mithilfe der Mengen

$$\begin{aligned} M_i &:= \left\{e \in E_G \mid \exists v' \in V_{G_i} : g(e) = \{v, v'\}\right\} \text{ für } i \in \{1, 2\} \quad \text{und} \\ A &:= \{e \in E_G \mid g(e) = \{v\}\} \end{aligned}$$

definiert man die Graphen $H := (V_H, E_H, g_H)$ und $L := (V_L, E_L, g_L)$ durch

$$\begin{aligned} V_H &:= V_{G_1} \cup \{v\} \quad , \quad E_H := E_{G_1} \cup M_1 \quad g_H(x) := g(x) \text{ für } x \in E_H, \\ V_L &:= V_{G_2} \cup \{v\} \quad , \quad E_L := E_{G_2} \cup M_2 \cup A \quad \text{und} \quad g_L(x) := g(x) \text{ fur } x \in E_L. \end{aligned}$$

Dann ist (H, L) eine 1-Aufspaltung von G, denn:

1. $V_H \cup V_L = V_{G_1} \cup V_{G_2} \cup \{v\} = V_G$ und $E_H \cup E_L = E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup M_1 \cup M_2 \cup A \stackrel{(*)}{=} E_G$.

Beweis von $(*)$: Zunächst gilt $E_{G-\{v\}} = \{e \in E_G \mid v \notin g(e)\} = E_{G_1} \cup E_{G_2}$. Offensichtlich gilt $\subset$ in $(*)$. Es gilt auch $\supset$, denn für $e \in E_{G-\{v\}}$ gilt $e \in E_{G_1} \cup E_{G_2}$ und für $e \notin E_{G-\{v\}}$ gilt: Es gibt ein $v' \in V_G = V_{G_1} \cup V_{G_2} \cup \{v\}$, so dass $g(e) = \{v, v'\}$ erfüllt ist. Daraus folgt $e \in M_1 \cup M_2 \cup A$.

Definitionsgemäß gilt $g_{H \cup L}(x) = g(x)$ für alle $x \in E_{H \cup L}$. Insgesamt ergibt sich $G = H \cup L$.

2. $E_H \cap E_L = (E_{G_1} \cup M_1) \cap (E_{G_2} \cup M_2 \cup A) = \emptyset$.

3. $V_H \cap V_L = (V_{G_1} \cap V_{G_2}) \cup \{v\} = \{v\}$.

4. Es wird zunächst $|E_H| \geq 1$ gezeigt. Sei $v' \in V_{G_1}$. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen Weg $(d, D) : J_n \to G$ mit $d(0) = v$, $d(n) = v'$ und $v' \in g\left(D(l_n)\right)$. Angenommen es gilt $D(l_n) \in E_{G_2}$. Daraus folgt $v' \in g\left(D(l_n)\right) \in \mathcal{P}_2\left(V_{G_2}\right)$. Dies ergibt den Widerspruch $v' \in V_{G_1} \cap V_{G_2}$! Also ist $D(l_n) \in E_G \setminus E_{G_2}$. Aus $v' \in g\left(D(l_n)\right) \cap V_{G_1}$ und insbesondere $v' \neq v$ folgt darüber hinaus $D(l_n) \notin M_2$ sowie $D(l_n) \notin A$. Insgesamt erhält man aus der Gleichung $(*)$: $D(l_n) \in E_{G_1} \cup M_1 = E_H$.

Zu zeigen bleibt, dass $|E_L| \geq 1$ ist. Gibt es eine zu $\{v\}$ inzidente Schlaufe f in G, so gilt $f \in A \subset E_L$. Existiert keine Schlaufe in G, so kann man wie oben beim Beweis der Aussage $|E_H| \geq 1$ schließen.

3. Fall: $|W| = 2$. Es sei sowohl G als auch $G - \{v\}$ zusammenhängend, denn sonst folgt die Behauptung aus dem 1. bzw 2. Fall. Es sei $W = \{v, w\}$ und $G - W = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ analog zum 2. Fall. Mithilfe der Mengen

$$\begin{aligned} M_i &:= \big\{e \in E_G \mid \exists v' \in V_{G_i} : g(e) = \{v, v'\} \ \vee \ g(e) = \{w, v'\}\big\} \text{ für } i \in \{1, 2\} \quad \text{und} \\ A &:= \{e \in E_G \mid g(e) = \{v\} \ \vee \ g(e) = \{w\} \ \vee \ g(e) = \{v, w\}\} \end{aligned}$$

definiert man die Graphen $H := (V_H, E_H, g_H)$ und $L := (V_L, E_L, g_L)$ durch

$$\begin{aligned} V_H &:= V_{G_1} \cup \{v, w\} \quad , \quad E_H := E_{G_1} \cup M_1 \quad g_H(x) := g(x) \text{ für } x \in E_H, \\ V_L &:= V_{G_2} \cup \{v, w\} \quad , \quad E_L := E_{G_2} \cup M_2 \cup A \quad \text{und} \quad g_L(x) := g(x) \text{ fur } x \in E_L. \end{aligned}$$

Dann ist (H, L) eine 2-Aufspaltung von G, denn:

1. Wie in 1. im 2. Fall gelten $E_G = E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup M_1 \cup M_2 \cup A$ und $V_H \cup V_L = V_G$. Daher gilt auch hier $G = H \cup L$.

2. und 3. Analog zu 2. bzw 3. im 2. Fall gelten auch hier $V_H \cap V_L = \{v, w\}$ und $E_H \cap E_L = \emptyset$.

4. Es wird zunächst $|E_H| \geq 2$ nachgewiesen. Wie in 4. im 2. Fall gibt es zu $v' \in V_{G_1}$ einen Weg $(d_v, D_v) : J_n \to G$ mit $d_v(0) = v$, $d_v(n) = v'$ und $D_v(l_n) \in E_{G_1} \cup M_1 = E_H$.

1. Unterfall: $e := D_v(l_n) \in E_{G_1} \setminus M_1$. Daraus folgt $n \geq 2$ und $d_v(0) = v \notin g(e) =$

$\{v', d_v(n-1)\}$, denn (d_v, D_v) ist ein Homomorphismus. Daher ist $D_v(l_{n-1}) \notin E_{G_2}$, denn andernfalls ergibt sich der Widerspruch $d_v(n-1) \in V_{G_1} \cap V_{G_2}$! Also gilt $D_v(l_{n-1}) \in E_G \setminus E_{G_2}$. Wegen $d_v(n-1) \in g(D_v(l_{n-1})) \cap V_{G_1}$ gilt darüber hinaus $D_v(l_{n-1}) \notin M_2$ und $D_v(l_{n-1}) \notin A$. Insgesamt muss also $D_v(l_{n-1}) \in E_{G_1} \cup M_1 = E_H$ wegen der Darstellung von E_G in 1. erfüllt sein. Die Injektivität von D_v liefert $D_v(l_n) \neq D_v(l_{n-1})$, so dass $|E_H| \geq 2$ bewiesen ist.

2. Unterfall: $e := D_v(l_n) \in M_1$. Dann gilt $g(e) = \{v, v'\}$. Da G zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg von w nach v' in G. Gibt es so einen Weg $(d_w, D_w) : J_m \to G$ mit $e \notin \operatorname{Bild} D_w$, so folgt wieder $D_w(l_m) \in E_H$ analog zu 4. im 2. Fall. Gilt hingegen $e \in \operatorname{Bild} D_w$ für jeden derartigen Weg (d_w, D_w), so gilt auch $v \in \operatorname{Bild} d_w$ für jeden Weg in G von w nach v'. Also gibt es in $G-\{v\}$ keinen Weg von w nach v'. Damit ist $G-\{v\}$ nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung. Insgesamt ergibt sich in diesem Unterfall $D_v(l_n) \neq D_w(l_m) \in E_H$, also $|E_H| \geq 2$.

Zu zeigen bleibt, dass $|E_L| \geq 2$ ist. Für $|A| \geq 2$ ist nichts mehr zu beweisen. Wie in 4. im 2. Fall gibt es zu $v' \in V_{G_2}$ einen Weg $(d_v, D_v) : J_n \to G$ mit $d_v(0) = v$, $d_v(n) = v'$, $D_v(l_n) \in E_{G_2} \cup M_2 \subset E_L$ und $D_v(l_n) \notin A$. Für $|A| = 1$ folgt daraus $|E_L| \geq 2$. Falls $A = \emptyset$ gilt, schließt man analog zum obigen 1. und 2. Unterfall aus 4. im 3. Fall. □

Korollar 5.19 *Ein nach Tutte 3-zusammenhängender Graph mit mindestens vier Ecken ist 3-zusammenhängend.*

Beweis Satz 5.18 zusammen mit Definition 5.15. □

Satz 5.20 *Ein nach Tutte 3-zusammenhängender Graph mit mindestens vier Kanten ist einfach.*

Beweis [27], Corollary IV.2. □

Satz 5.21 *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph. Dann gibt es in G keine Ecken vom Grad kleiner als Drei.*

Beweis Da G 3-zusammenhängend ist, hat G mindestens 4 Ecken. Es gibt keine Ecke vom Grad Null, denn sonst ist G nicht zusammenhängend. Sei v eine Ecke vom Grad 1 mit $\{e\} = Inz(v, G)$. Sei $w \neq v$ inzident in G zu e. Für den Graphen $G - \{w\}$ gilt $E_{G-\{w\}} = E_G \setminus Inz(w, G)$ nach 5.14 auf Seite 131. Wegen $|V_G \setminus \{w\}| = |V_G| - 1 \geq 3$ und $Inz(v, G - \{w\}) \overset{4.7.9., \text{S.}76}{=} Inz(v, G) \setminus Inz(w, G) = \emptyset$ ist $G - \{w\}$ nicht zusammenhängend. Also gibt es keine Ecke vom Grad 1. Sein nun v eine Ecke vom Grad 2 und $Inz(v,G) = \{e,f\}$. Angenommen es gilt $e = f$. Dann enthält G einen Schlaufengraphen als Komponente, ist aber wegen $|V_G| \geq 4$ selbst kein Schlaufengraph. Daher ist G nicht zusammenhängend. Widerspruch! Also gilt $e \neq f$. Die Kante f ist keine Schlaufe, denn andernfalls gilt $2 = \deg_G v \overset{4.7.5., \text{S.76}}{=} |Inz(v,G)| + |Sch(v,G)| \geq 2+1 = 3$. Widerspruch! Genauso ist e keine Schlaufe. Sei $u \neq v$ inzident zu f und $w \neq v$ inzident zu e in G. Für $G - \{u,w\}$ gilt $E_{G-\{u,w\}} = E_G \setminus (Inz(u,G) \cup Inz(w,G))$ und $\left|V_{G-\{u,w\}}\right| = |V_G| - 2 \geq 2$. Daher gibt es eine von v verschiedene Ecke in $G - \{u,w\}$. Aus $Inz\,(v, G - \{u,w\}) \overset{4.7.9., \text{S.76}}{=} Inz(v,G) \setminus (Inz(u,G) \cup Inz(w,G)) = \emptyset$ folgt, dass G nicht zusammenhängend ist. Somit gibt es keine Ecken vom Grad 2. □

5.2 Spezielle injektive Abbildungen

Eine mehrfache Kontraktion ist eine Folge einzelner (p_i, z_i, q_i)-Kontraktionen. Damit eine mehrfache Kontraktion definiert ist, müssen p_i und q_i die Ecken von z_i im jeweiligen Graphen sein (5.23.3.). Es kann aber vorkommen, dass p_i oder q_i im ursprünglichen Graphen <u>nicht</u> die Ecken von z_i sind. Um diese Situation zu unterdrücken, wird in 5.24 auf Seite 137 der zentrale Begriff der Speziellen injektiven Abbildung eingeführt. Einer Ecke wird dabei eine inzidente Kante zugeordnet. Da diese Inzidenzen im Verlaufe einer mehrfachen Kontraktion nicht verlorengehen, können mithilfe einer Speziellen injektiven Abbildung sukzessive Kanten kontrahiert werden. Der resultierende Graph hängt dabei nicht von der Reihenfolge ab. Dies erkennt man an der Formel in Satz 5.27.3. auf Seite 139.

Jede mehrfache Kontraktion lässt sich durch eine Spezielle injektive Abbildung ausdrücken (Satz 5.34 auf Seite 150). Um dieses Resultat zu erreichen, wird in den Sätzen 5.28 bis 5.33 ab Seite 143 herausgearbeitet, dass es sich bei den zu kontrahierenden Kanten um einen Wald handelt, für den man eine Spezielle injektive Abbildung angeben kann.

Insgesamt erlauben es diese Ergebnisse also, eine mehrfache Kontraktion stets mit einer Speziellen injektiven Abbildung in Verbindung zu bringen, ohne dass es auf die Reihenfolge der Kontraktionen ankommt. Im weitern Verlauf sind mehrfache Kontraktionen an zweiwertigen Ecken von Interesse. Dazu wird in Satz 5.25 auf Seite 137 die Existenz einer Speziellen injektiven Abbildung auf der Menge der zweiwertigen Ecken eines Graphen nachgewiesen.

Definition 5.22 *Sei $G = (V,E,g)$ ein Graph. Zu einer natürlichen Zahl $n \neq 1$ seien*

Elemente $x_i \in V \times E \times V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ vorgelegt, so dass in der rekursiven Definition

$$\mathcal{C}_{x_n,\ldots,x_1}(G) := \mathcal{C}_{x_n}\left(\mathcal{C}_{x_{n-1},\ldots,x_1}(G)\right) \tag{5.1}$$

die rechte Seite gemäß Definition 4.1 auf Seite 74 wohldefiniert ist. Man notiert $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ $:= \mathcal{C}_{x_n,\ldots,x_1}(G)$ für $n \neq 1$, $\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G) := \mathcal{C}_{x_1}(G)$ sowie $\mathcal{C}_{x_0}(G) := G$. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ eine **(mehrfache) Kontraktion von** *G.*

*Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nennt man ein Element der Menge $V_n(G) := \{v \in V \mid \deg_G(v) = n\}$ eine n-***wertige Ecke von** *G. Ein Graph G wird* **Unterteilung von** *H genannt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_i \in V_2(G) \times E \times V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $H = \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ gilt. Die Menge der Unterteilungen von H wird mit $sub(H)$ bezeichnet.*

Satz 5.23 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_i := (p_i, z_i, q_i) \in V \times E \times V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ vorgelegt.*

a) $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ ist wohldefiniert $\Longleftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten

1. *$\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)$ ist wohldefiniert.*
2. *$p_i, q_i \in V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)}$, $z_i \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)}$.*
3. *$p_i \neq q_i$.*
4. *In $\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)$ sind p_i und q_i inzident zu z_i.*

b) $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert $\Longrightarrow$

1. *Die Kanten $z_1, \ldots, z_n$ und die Ecken $p_1, \ldots, p_n$ sind jeweils paarweise verschieden.*
2. *$E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)} = E \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$.*
3. *$V_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)} = V \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$.*

Beweis **Zu a) :** Der Beweis wird mit Induktion über n geführt.

$\boldsymbol{n = 1:}$

$\Longrightarrow$ **:** $\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G)$ wohldefiniert $\overset{4.1}{\Longrightarrow}$ $p_1, q_1 \in V, p_1 \neq q_1$ und p_1, q_1 inzident zu $z_1 \in E$.

$\Longleftarrow$ **:** Definition 4.1.

$\boldsymbol{n \mapsto n + 1:}$

$\Longrightarrow$ **:** $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G) = \mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$ wohldefiniert $\overset{5.22}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert $\overset{\text{IV}}{\Rightarrow}$ 1. bis 4. für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert ist, gilt 1. für $i = n + 1$. Da $\mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$ wohldefiniert ist, gelten 2. bis 4. für $i = n + 1$ nach Definition 4.1.

$\Longleftarrow$ **:** Seien 1. bis 4. gültig für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Dann gelten 1. bis 4. auch für $i \in \{1, \ldots, n\}$, daher ist $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ nach Induktionsvoraussetzung wohldefniert. Da 1. bis 4. auch für $i = n+1$ gilt, ist $\mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$ nach Definition 4.1 wohldefiniert.

Zu b) : Beweis durch Induktion über n.

$\boldsymbol{n = 1}$ **:** Bei 1. ist nichts zu zeigen, 2. und 3. folgen aus Definition 4.1.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1}$ **:** Sei $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G)$ wohldefiniert. Nach 5.22 ist dann $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert, also gelten 1. bis 3. nach Induktionsvoraussetzung. Da $\mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$ wohldefiniert ist, gilt $z_{n+1} \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)} \overset{\mathrm{IV}}{=} E \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, also sind $z_1, \ldots, z_{n+1}$ paarweise verschieden. Außerdem liefert 4.1: $E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G)} \overset{4.1}{=} E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)} \setminus \{z_{n+1}\} \overset{\mathrm{IV}}{=} E \setminus \{z_1, \ldots, z_{n+1}\}$. Analog zeigt man 1. und 3. für die Ecken $p_1, \ldots, p_{n+1}$. □

Bemerkung Sollen nacheinander Kanten $z_1, \ldots, z_n$ eines Graphen G kontrahiert werden, so können mit Satz 5.23.1 bis 3. Schritt für Schritt Ecken $p_1, \ldots, p_n$ und nicht notwendig paarweise verschiedene Ecken $q_1, \ldots, q_n$ gefunden werden, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert ist. □

Definition 5.24 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph und M eine Teilmenge von V. Eine Abbildung $i : M \to E$ heißt* **Spezielle injektive Abbildung**, *wenn sie injektiv ist und für jedes $x \in M$ gilt: $i(x)$ ist keine Schlaufe und in G inzident zu x.*

Satz 5.25 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph, der kein Nullgraph ist. Keine Komponente von G sei eine Schlaufe. Dann gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(G) \to E$, sofern $V_2(G)$ nicht leer ist.*

Beweis Der Beweis wird mit Induktion über die Anzahl der zweiwertigen Ecken von G geführt.

$\boldsymbol{n = 1}$ **:** Sei $\{p\} = V_2(G)$. Nach Voraussetzung gibt es eine Kante $e \in Inz(p, G) \setminus Sch(p, G)$. Definiere $i : V_2(G) \to E$ durch $i(p) := e$.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1}$ **:** Sei $V_2(G) = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$. Nach Voraussetzung gibt es eine Kante $z_1 \in Inz(p_1, G) \setminus Sch(p_1, G)$. Also gibt es eine Ecke $q_1 \neq p_1$, so dass $\mathcal{C}_{p_1, z_1, q_1}(G)$ definiert ist. Für jede Ecke $x \in V \setminus \{p_1\}$ gilt $\deg_{\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)} x = \deg_G x$ nach Satz 4.13 auf Seite 84, denn $\deg_G p_1 = 2$. Man erhält daraus:

$$\begin{aligned}
x \in V_2\left(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in V \setminus \{p_1\} \ \wedge \ \deg_{\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)} x = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in V \setminus \{p_1\} \ \wedge \ \deg_G x = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in V \setminus \{p_1\} \ \wedge \ x \in V_2(G) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in V \setminus \{p_1\} \cap V_2(G) = V_2(G) \setminus \{p_1\}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $|V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G))| = |V_2(G) \setminus \{p_1\}| = n$. Daher gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Spezielle injektive Abbildung $i' : V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)) \to E_{\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)}$. Zur Definition einer Speziellen injektiven Abbildung $i : V_2(G) \to E$ werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: Für jedes $x \in V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G))$ ist $i'(x)$ in G inzidenzt zu x. Dann ist

$$i(x) := \begin{cases} i'(x) & : \quad x \in V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)) \\ z_1 & : \quad x = p_1 \end{cases} . \tag{5.2}$$

eine Spezielle injektive Abbildung , weil z_1 keine Kante von $\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)$ ist.

2. Fall: Es gibt ein $x' \in V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G))$, so dass $i'(x')$ in G nicht inzident zu x' ist. Dann folgt $x' = q_1$ und $p_1 \in g_G(i'(x'))$ aus

$$x' \ni g_{\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)}\left(i'(x')\right) = \mathcal{P}_2(\psi(p_1,q_1,V_G))\, g_G\left(i'(x')\right).$$

Also gilt $Inz(p_1,G) = \{i'(x'), z_1\}$ und $z_1 \in Inz(x',G)$. Für alle anderen $y \in V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)) \setminus \{x'\}$ ist dann $i'(y)$ in G inzident zu y, denn andernfalls wäre $i'(y) \in Inz(p_1,G)$, also $i'(y) = i'(x')$ im Widerspruch zur Injektivität von i'. Daher ist

$$i(x) := \begin{cases} i'(x) & : \quad x \in V_2(\mathcal{C}_{p_1,z_1,q_1}(G)) \setminus \{x'\} \\ z_1 & : \quad x = x' \\ i'(x') & : \quad x = p_1 \end{cases}$$

eine Spezielle injektive Avbbildung. □

Satz 5.26 *Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sei der Standardbogen J'_n vorgelegt. Definiere eine Abbildung $i : V_2(J'_n) \to E_{J'_n}$ durch $i(s) := l_s$ und $x_s := (s, i(s), 0)$ für $s \in \{1,\dots,n-1\}$. Es gelten:*

(a) i ist eine Spezielle injektive Abbildung.

(b) $\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(J'_n)$ ist wohldefiniert.

(c) Zu jeder injektiven Abbildung $i' : V_2(J'_n) \to E_{J'_n}$ gibt es genau eine Kante, die nicht im Bild von i' enthalten ist.

Beweis **Zu (a) :** i injektiv: $i(s) = i(t) \implies l_s = l_t \implies s = t$.
i speziell: $\nu g_{J'_n}(i(s)) = \{s-1, s\} \ni s$ und $i(s)$ ist wegen $s - 1 \neq s$ keine Schlaufe.

Zu (b) : Nach 5.23 a) ist für $s \in \{1,\dots,n-1\}$ zu zeigen:

1. $\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)$ wohldefiniert,

2. $s, 0 \in V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)}, \quad i(s) \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)}$,

3. $s \neq 0$,

4. in $\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)$ sind s und 0 zu $i(s)$ inzident.

Es wird 1. bis 4. induktiv über s gezeigt.

$\boldsymbol{s = 1}$ **:** Wegen $i(1) = l_1$ und $\mathcal{C}_{\lceil x_0 \rceil}(J'_n) = J'_n$ sind 1. bis 4. klar.

$\boldsymbol{s \mapsto s+1 \leq n-1}$ **:** Nach Induktionsvoraussetzung gelten 1. bis 4. für s. Zu zeigen sind 1. bis 4. für $s+1$:

1.: $\mathcal{C}_{\lceil x_s \rceil}(J'_n) = \mathcal{C}_{s,i(s),0}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)\right)$ ist nach IV und Definition 4.1 wohldefiniert.

2.: $V_{\mathcal{C}_{\lceil x_s \rceil}(J'_n)} \overset{1.}{=} V_{\mathcal{C}_{s,i(s),0}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)\right)} \overset{4.1}{=} V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)} \setminus \{s\}$
$\overset{\text{1. aus IV und 5.23 b)}}{=} \left(V_{J'_n} \setminus \{1, \ldots, s-1\}\right) \setminus \{s\} = \{0, s+1, \ldots, n\} \ni s+1, 0$. Genauso folgt $E_{\mathcal{C}_{\lceil x_s \rceil}(J'_n)} = E_{J'_n} \setminus \{i(1), \ldots, i(s)\} = E_{J'_n} \setminus \{l_1, \ldots, l_s\} = \{l_{s+1}, \ldots, l_n\} \ni l_{s+1} = i(s+1)$.

3.: $s+1 \geq 1 \implies s+1 \neq 0$.

4.: $\nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_s \rceil}(J'_n)}(i(s+1)) = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(s, 0, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)}\right)\right)\left(\nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)}(i(s+1))\right)$
$= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(s, 0, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(J'_n)}\right) \circ \psi\left(s-1, 0, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-2} \rceil}(J'_n)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(1, 0, V_{J'_n}\right)\right)(\{s+1, s\})$
$= \{s+1, 0\}$.

Zu (c) : Da i' injektiv ist, gilt $n - 1 = |V_2(J'_n)| = |\mathrm{Bild}\, i'| < n = \left|E_{J'_n}\right| \implies \exists! s \in \{1, \ldots, n\} \,:\, l_s \notin \mathrm{Bild}\, i'$. □

Satz 5.27 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph, $M := \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine nichtleere Teilmenge von V und $i : M \to E$ eine Spezielle injektive Abbildung. Dann gelten:*

1. *Gegeben seien Ecken $q_1, \ldots, q_n \in V$, die aber in dieser Notation nicht notwendig paarweise verschieden sein müssen, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ für $x_j := (p_j, i(p_j), q_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ wohldefiniert ist. Dann sind $q_1, \ldots, q_n$ eindeutig festgelegt.*

2. *Im Fall $n = 2$ seien q_1, q_2 Ecken von G, so dass*

$$\mathcal{C}_{(p_2, i(p_2), q_2), (p_1, i(p_1), q_1)}(G)$$

wohldefiniert ist. Dann gibt es Ecken q'_1, q'_2 von G, so dass

$$\mathcal{C}_{\left(p_1, i(p_1), q'_1\right), \left(p_2, i(p_2), q'_2\right)}(G)$$

definiert ist und

$$\mathcal{C}_{(p_2,i(p_2),q_2),(p_1,i(p_1),q_1)}(G) = \mathcal{C}_{\left(p_1,i(p_1),q_1'\right),\left(p_2,i(p_2),q_2'\right)}(G)$$

gilt.

3. *Es sei* $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ *wie in 1. wohldefiniert und* $\sigma \in S_n$ *eine Permutation. Dann gibt es Ecken* $q_1', \ldots, q_n'$ *von* G*, so dass gilt:*

$$\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\left(p_{\sigma(n)},i\left(p_{\sigma(n)}\right),q_n'\right),\ldots,\left(p_{\sigma(1)},i\left(p_{\sigma(1)}\right),q_1'\right)}(G).$$

Beweis **Zu 1.:** Da $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert ist, sind für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Ecken q_j durch 5.23 a) 4. eindeutig festgelegt.

Zu 2.: Sei $\mathcal{C}_{(p_2,i(p_2),q_2),(p_1,i(p_1),q_1)}(G)$ definiert. Sei q_2' eine zu $i(p_2)$ in G inzidente Ecke. Wenn $q_2' \neq p_2$ gewählt werden kann, ist $\mathcal{C}_{p_2,i(p_2),q_2'}(G)$ wohldefiniert. Angenommen das geht nicht, also $q_2' = p_2$. Dann ist $i(p_2)$ eine Schlaufe in G und somit wegen $i(p_2) \neq i(p_1)$ auch eine Schlaufe in $\mathcal{C}_{p_1,i(p_1),q_1}(G)$ (siehe auch 5.39). Widerspruch zur Wohldefiniertheit von $\mathcal{C}_{(p_2,i(p_2),q_2),(p_1,i(p_1),q_1)}(G)$!

Nun sei q_1' in $\mathcal{C}_{p_2,i(p_2),q_2'}(G)$ eine zu $i(p_1)$ inzidente Ecke. Zeigt man, dass

a) p_1 in $\mathcal{C}_{p_2,i(p_2),q_2'}(G)$ inzident zu $i(p_1)$ ist, und dass

b) $p_1 \neq q_1'$ gewählt werden kann,

so ist $\mathcal{C}_{\left(p_1,i(p_1),q_1'\right),\left(p_2,i(p_2),q_2'\right)}(G)$ wohldefiniert.

Zu a):

$$\begin{aligned} \nu g_{\mathcal{C}_{p_2,i(p_2),q_2'}(G)}(i(p_1)) &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_2, q_2', V_G\right)\right) \nu g(i(p_1)) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_2, q_2', V_G\right)\right)(\{p_1, q_1\}) \overset{p_1 \neq p_2}{\ni} p_1. \end{aligned}$$

Zu b): Angenommen es gilt $q_1' = p_1$. Daraus folgt

$$\{p_1\} = \{q_1', p_1\} = \nu g_{\mathcal{C}_{p_2,i(p_2),q_2'}(G)}(i(p_1)) \overset{\text{wie a)}}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_2, q_2', V_G\right)\right)\{p_1, q_1\}.$$

Also ist ($q_1 \neq p_2$ und $q_1 = p_1$) oder ($q_1 = p_2$ und $q_2' = p_1$) und somit $q_1 = p_2$ und $q_2' = p_1$ (denn $q_1 \neq p_1$, weil $i(p_1)$ keine Schlaufe ist). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu g_{\mathcal{C}_{p_1,i(p_1),p_2}(G)}(i(p_2)) &= \mathcal{P}_2(\psi(p_1, p_2, V_G))\, \nu g(i(p_2)) \\ &= \mathcal{P}_2(\psi(p_1, p_2, V_G))\{p_2, p_1\} = \{p_2\} \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Wohldefiniertheit von $\mathcal{C}_{(p_2,i(p_2),q_2),(p_1,i(p_1),q_1)}(G)$. Also ist die Annahme falsch und es kann $p_1 \neq q_1'$ gewählt werden.

Nun wird die behauptete Gleichheit der beiden Kontraktionen bewiesen. Zur Abkürzung sei $H := \mathcal{C}_{(p_2,i(p_2),q_2),(p_1,i(p_1),q_1)}(G)$, $H' := \mathcal{C}_{\left(p_1,i(p_1),q_1'\right),\left(p_2,i(p_2),q_2'\right)}(G)$, $z_1 := i(p_1)$ und $z_2 := i(p_2)$. Da H wohldefiniert ist, gelten nach Satz 5.23 auf Seite 136:

1. $p_2 \neq p_1$, $q_2 \neq p_1$, $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ und $\nu g(z_1) = \{p_1, q_1\}$.

2. $$\{p_2, q_2\} = \nu g_{\mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1)}(G)}(z_2) = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_1, q_1, V\right)\right)\left(\nu g(z_2)\right)$$
$$\overset{3.}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_1, q_1, V\right)\right)\left(\{(p_2, q_2'\}\right) = \begin{cases} \{p_2, q_2'\} & : \quad q_2' \neq p_1 \\ \{p_2, q_1\} & : \quad q_2' = p_1 \end{cases}.$$

Da H' wohldefiniert ist, gelten nach Satz 5.23 auf Seite 136:

3. $\nu g(z_2) = \{p_2, q_2'\}$.

4. $$\{p_1, q_1'\} = \nu g_{\mathcal{C}_{(p_2,z_2,q_2')}(G)}(z_1) = \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_2, q_2', V\right)\right)\left(\nu g(z_1)\right)$$
$$\overset{1.}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p_2, q_2', V\right)\right)\left(\{(p_1, q_1\}\right) = \begin{cases} \{p_1, q_1\} & : \quad q_1 \neq p_2 \\ \{p_1, q_2'\} & : \quad q_1 = p_2 \end{cases}.$$

In der folgenden Fallunterscheidung wird die Gestalt von H' bestimmt.

1. Fall: $q_1 \neq q_2 \ \wedge \ q_1 \neq p_2$.

Aus 4. folgt $q_1 = q_1'$ und aus 2. ergibt sich $q_2 = q_2'$ wegen $q_1 \neq q_2$. Also gilt $H' = \mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1),(p_2,z_2,q_2)}(G) =: H_1$.

2. Fall: $q_1 = q_2 \ \vee \ q_1 = p_2$.

Nach 1. ist $q_1 = q_2 = p_2$ nicht möglich, daher teilt sich dieser Fall wie folgt auf:

Unterfall 2a: $q_1 = q_2 \in \nu g(z_2)$.

Aus 1. folgt $q_1 \neq p_2$ und damit ergibt sich $q_1' = q_1$ aus 4. Aus $q_1 = q_2, q_2', p_2 \in \nu g(z_2)$ folgt $q_1 = q_2 = q_2'$. Also gilt $H' = \mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1),(p_2,z_2,q_1)}(G) =: H_{2a}$.

Unterfall 2b: $q_1 = q_2 \notin \nu g(z_2)$.

Wie im Unterfall 2a folgt $q_1' = q_1$. Aus $q_2 \notin \nu g(z_2)$ folgt $q_2 \neq q_2'$ aus 3. Damit erhält man $q_1 = q_2$ und $p_1 = q_2'$ aus 2. Also gilt $H' = \mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1),(p_2,z_2,p_1)}(G) =: H_{2b}$.

Unterfall 2c: $q_1 = p_2$.

Aus 4. folgt $q_1' = q_2'$. Aus 1. ergibt sich $q_1 \neq q_2$ und somit gilt $q_2 = q_2'$ und $q_2' \neq p_1$. Also gilt $H' = \mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_2),(p_2,z_2,q_2)}(G) =: H_{2c}$.

Zu zeigen ist nun $H = H_\alpha$ für jedes $\alpha \in \{1, 2a, 2b, 2c\}$. Zunächst gelten $E_H = E \setminus \{z_1, z_2\} = E_{H_\alpha}$ sowie $V_H = V \setminus \{p_1, p_2\} = V_{H_\alpha}$ nach Satz 5.23. Sei nun $f \in E_H = E_{H_\alpha} \subset E$ mit $p_1, p_2 \notin \nu g(f)$. Dann gilt offensichtlich $g_H(f) = g_{H_\alpha}(f)$. Für eine Kante f mit

$g(f) = (p_1, x)$, $x \notin \{p_1, p_2\}$ berechnet man $g_H(f) = (q_1, x) = g_{H_\alpha}(f)$ für $\alpha \in \{1, 2a, 2b\}$ und $g_H(f) = (q_2, x) = g_{H_{2c}}(f)$. Gilt hingegen $g(f) = (p_2, x)$, $x \notin \{p_1, p_2\}$ berechnet man $g_H(f) = (q_2, x) = g_{H_\alpha}(f)$ für $\alpha \in \{1, 2a, 2b, 2c\}$. Wenn $g(f) = (p_1, p_2)$ ist, gilt im 1. Fall : $g_H(f) = (q_1, q_2) = g_{H_1}(f)$, in den Unterfällen 2a und 2b : $g_H(f) = (q_1, q_1) = g_{H_{2a}}(f)$ bzw. $g_H(f) = (q_1, q_1) = g_{H_{2b}}(f)$ und im Unterfall 2c: $g_H(f) \overset{p_2 \equiv q_1}{=} (q_2, q_2) = g_{H_{2c}}(f)$. Daran erkennt man, dass $g_H(f) = g_{H_\alpha}(f)$ für jede Kante f und jedes $\alpha \in \{1, 2a, 2b, 2c\}$ gilt.

Zu 3.: Zunächst sei σ eine Nachbartransposition (NBT). Die Aussage wird nun mit Induktion über n gezeigt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1}$ **:** Sei $\sigma = (s, s+1) \in S_{n+1}$ und $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G)$ wie in 1. wohldefiniert mit $x_j := (p_j, z_j, q_j), z_j := i(p_j), j \in \{1, \ldots, n+1\}$ und $i : \{p_1, \ldots, p_{n+1}\} \to E$ die Spezielle injektive Abbildung.

$\boldsymbol{s = n}$ **:** Da p_n, p_{n+1} in G inzident zu $i(p_n)$ bzw. $i(p_{n+1})$ sind, sind sie auch in $\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)$ inzident zu $i(p_n)$ bzw. $i(p_{n+1})$, also ist i eingeschränkt auf $\{p_n, p_{n+1}\}$ eine Spezielle injektive Abbidung für $\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)$. Da $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G)$ definiert ist, gibt es nach 5.27.2. Ecken $\tilde{q}, \hat{q}$ von $\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)$ mit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G) &= \mathcal{C}_{(p_n, i(p_n), \tilde{q}), (p_{n+1}, i(p_{n+1}), \hat{q})}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)\right) \\
&= \mathcal{C}_{\left(p_{\sigma(n+1)}, i(p_{\sigma(n+1)}), \tilde{q}\right), \left(p_{\sigma(n)}, i(p_{\sigma(n)}), \hat{q}\right), \ldots, \left(p_{\sigma(1)}, i(p_{\sigma(1)}), q_1\right)}(G) \\
&= \mathcal{C}_{\left(p_{\sigma(n+1)}, i(p_{\sigma(n+1)}), q'_{n+1}\right), \ldots, \left(p_{\sigma(1)}, i(p_{\sigma(1)}), q'_1\right)}(G)\,.
\end{aligned}$$

Dabei seien $q'_{n+1} := \tilde{q}, q'_n := \hat{q}$ und $q'_i := q_i$ für $i \leq n-1$.

$\boldsymbol{s \leq n-1}$ **:** Sei $\tau := (s, s+1) \in S_n$. Die Abbildung $i\,|_{\{p_1, \ldots, p_n\}}$ ist eine Spezielle injektive Abbildung, mit der $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ definiert ist. Nach IV gilt also

$$\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\left(p_{\tau(n)}, i(p_{\tau(n)}), q'_n\right), \ldots, \left(p_{\tau(1)}, i(p_{\tau(1)}), q'_1\right)}(G) =: C_\tau$$

für gewisse $q'_1, \ldots, q'_n$. Da $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G) = \mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$ definiert ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1} \rceil}(G) &= \mathcal{C}_{(p_{n+1}, i(p_{n+1}), q_{n+1})}(C_\tau) \\
&= \mathcal{C}_{\left(p_{\sigma(n+1)}, i(p_{\sigma(n+1)}), q'_{n+1}\right), \ldots, \left(p_{\sigma(1)}, i(p_{\sigma(1)}), q'_1\right)}(G)
\end{aligned}$$

für $q'_{n+1} := q_{n+1}$ und $q'_j := q_j$ für $j \leq n$, denn $\sigma(j) = \tau(j)$ für $j \leq n$.

Somit gilt 5.27.3. für eine NBT $\sigma \in S_n$. Sei nun $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ eine Komposition von m NBT. Mit Induktion über m zeigt man nun die Behauptung. Für $m = 1$ ist das eben gezeigt worden.

$\boldsymbol{m \mapsto m+1}$ **:** Sei $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m \circ \sigma_{m+1} \in S_n$, $\tau := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ und $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wie in

5.27.1. definiert. Nach IV gilt

$$\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\left(p_{\tau(n)}, i(p_{\tau(n)}), q_n''\right), \ldots, \left(p_{\tau(1)}, i(p_{\tau(1)}), q_1''\right)}(G)$$

für gewisse $q_n'', \ldots, q_1''$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $r_j := p_{\tau(j)}$. Dann ist $i : M = \{r_1, \ldots, r_n\} \to E$ eine Spezielle injektive Abbildung (also die vorgelegte) und

$$C_r := \mathcal{C}_{(r_n, i(r_n), q_n''), \ldots, \left(r_1, i(r_1), q_1''\right)}(G)$$

wohldefiniert. Da σ_{m+1} eine NBT ist, darf man 5.27.3. anwenden: Es gibt $q_1', \ldots, q_n'$ mit

$$C_r = \mathcal{C}_{\left(r_{\sigma_{m+1}(n)}, i\left(r_{\sigma_{m+1}(n)}\right), q_n'\right), \ldots, \left(r_{\sigma_{m+1}(1)}, i\left(r_{\sigma_{m+1}(1)}\right), q_1'\right)}(G).$$

Aus $C_r = \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ und $r_{\sigma_{m+1}(j)} = p_{\tau(\sigma_{m+1}(j))} = p_{\sigma(j)}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 5.28 *Es seien $X \in \{G, H\}$ Graphen mit $X = (V_X, E_{,X}, g_X)$ und $H < G$. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $x_i := (p_i, z_i, q_i) \in V_H \times E_H \times V_H$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ vorgelegt. Dann ist $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ genau dann wohldefiniert, wenn $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(H)$ es ist und $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(H)$ ist ein Teilgraph von $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$.*

Beweis Der Beweis wird mit Induktion nach n für orientierte Graphen G und H geführt. Andernfalls verläuft der Beweis analog.

$\boldsymbol{n = 1:}$ Seien $p_1, q_1 \in V_H \subset V_G$ und $z_1 \in E_H \subset E_G$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G) \text{ wohldefiniert } &\Leftrightarrow p_1 \neq q_1 \ \wedge \ \nu g_G(z_1) = \{p_1, q_1\} \\ &\overset{H \leq G}{\Leftrightarrow} \quad p_1 \neq q_1 \ \wedge \ \nu g_H(z_1) = \{p_1, q_1\} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H) \text{ wohldefiniert.} \end{aligned}$$

Wegen

- $E_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H)} = E_H \setminus \{z_1\} \overset{H \leq G}{\subset} E_G \setminus \{z_1\} = E_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G)}$,
- $V_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H)} = V_H \setminus \{p_1\} \overset{H \leq G}{\subset} V_G \setminus \{p_1\} = V_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G)}$,
- $\forall z \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H)}$:

$$g_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H)}(z) = \psi^2(p_1, q_1, V_H)\, g_H(z) \overset{H \leq G}{\subseteq} \psi^2(p_1, q_1, V_G)\, g_G(z) = g_{\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G)}(z)$$

ist $\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(H)$ ein Teilgraph von $\mathcal{C}_{\lceil x_1 \rceil}(G)$.

$\boldsymbol{n \mapsto n + 1:}$ Nun seien $x_i := (p_i, z_i, q_i) \in V_H \times E_H \times V_H$, $i \in \{1, \ldots, n + 1\}$ vorgelegt.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(G) \text{ wohldefiniert} &\Leftrightarrow \mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)\right) \text{ und } \mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G) \text{ wohldefiniert}\\
&\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathcal{C}_{x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)\right) \text{ und } \mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H) \text{ wohldefiniert}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H) \text{ wohldefiniert und } \{p_{n+1}, q_{n+1}\} = \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)}(z_{n+1})\\
&\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H) \text{ wohldefiniert und } \{p_{n+1}, q_{n+1}\} = \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H)}(z_{n+1})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H) \text{ wohldefiniert.}
\end{aligned}$$

Wegen

- $E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H)} = E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H)} \setminus \{z_{n+1}\} \overset{\text{IV}}{\subset} E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)} \setminus \{z_{n+1}\} = E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(G)}$,
- $V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H)} = V_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H)} \setminus \{p_{n+1}\} \overset{\text{IV}}{\subset} V_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)} \setminus \{p_{n+1}\} = V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(G)}$,
- $\forall z \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H)}$:

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H)}(z) &= \psi^2\left(p_{n+1}, q_{n+1}, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H)}\right) g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(H)}(z)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \psi^2\left(p_{n+1}, q_{n+1}, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)}\right) g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)}(z) = g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(G)}(z)
\end{aligned}$$

ist $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(H)$ ein Teilgraph von $\mathcal{C}_{\lceil x_{n+1}\rceil}(G)$. □

Satz 5.29 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien Elemente $x_i := (p_i, z_i, q_i)$ $\in V \times E \times V$ vorgelegt, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)$ wohldefiniert ist. Für jede Ecke v von G gilt:*

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : z_i \in Inz(v, G) \;\Leftrightarrow\; v \in \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \{q_1, \ldots, q_n\}\,. \tag{5.3}$$

Beweis Der Beweis wird für einen orientierten Graphen G geführt. Andernfalls verläuft der Beweis analog. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ werden zunächst folgende Aussagen nachgewiesen:

1. $v \in \nu g(z_i) \implies v \in \{p_1, \ldots, p_i, q_i\}$.
2. $v \in \{p_i, q_i\} \implies \exists j \leq i : v \in \nu g(z_j)$.

Zu 1.: Sei $\nu g(z_i) = \{v_1, v_2\}$. Es wird $v_1, v_2 \in \{p_1, \ldots, p_i, q_i\}$ gezeigt. Da $\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G)$ definiert ist, gilt $\{p_i, q_i\} = \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1}\rceil}(G)}(z_i)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus erhält man sofort $\nu g(z_1) = \{p_1, q_1\}$, also die Behauptung für $i = 1$. Sei nun $i \geq 2$. Angenommen es gilt $v_1 \notin \{p_1, \ldots, p_i, q_i\}$ oder $v_2 \notin \{p_1, \ldots, p_i, q_i\}$. Daraus folgt

$$\psi\left(p_{i-1}, q_{i-1}, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-2}\rceil}(G)}\right) \circ \cdots \circ \psi(p_1, q_1, V)(v_j) \overset{(*)}{=} v_j \notin \{p_i, q_i\}$$

für $j = 1$ oder $j = 2$. Aus $v_j \in \nu g(z_i) \overset{(*)}{\cap} \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)}(z_i) = \{p_i, q_i\}$ folgt, dass $v_j \in \{p_i, q_i\}$ erfüllt ist. Widerspruch!

Zu 2.: Für jedes $s \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$v = q_s \implies v \in \nu g(z_s) \ \vee \ \exists s' \in \{1, \dots, s-1\} : v = q_{s'}. \tag{5.4}$$

Zu (5.4): Man folgert

$$\begin{aligned} v = q_s \quad \implies \quad & \{v, p_s\} = \{q_s, p_s\} = \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(G)}(z_s) \\ & = \mathcal{P}_2 \left(\psi \left(p_{s-1}, q_{s-1}, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-2} \rceil}(G)} \right) \circ \cdots \circ \psi \left(p_1, q_1, V \right) \right) (g(z_s)) \\ \implies \quad & v \in \nu g(z_s) \ \vee \ \exists s' \le s - 1 : q_{s'} = v. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Die folgende Fallunterscheidung beweist die Aussage 2.:

1. Fall: $v = p_i$. Dann gilt $\{v, q_i\} = \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil x_{i-1} \rceil}(G)}(z_i)$. Wie im Beweis zu (5.4) folgt daraus $v \in \nu g(z_i)$ oder $\exists s < i : v = q_s$. Entweder ist also die Behauptung an dieser Stelle schon gezeigt oder man wendet nun mehrmals hintereinander (5.4) an. Da bei jeder Anwendung von (5.4) der Index s' echt kleiner als s und größer als Null ist, muss es einen Index $j \in \{1, \dots, i\}$ geben, für den $v \in \nu g(z_j)$ gilt.

2. Fall: $v = q_i$. Mithilfe von (5.4) schließt man wie im 1. Fall.

Wie folgt lässt sich jetzt die Behauptung (5.3) zeigen:

$\Leftarrow$: $v \in \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\} \implies \exists j \in \{1, \dots, n\} : v = p_j \ \vee \ v = q_j \overset{2.}{\implies} \exists i : 1 \le i \le j \le n \ \wedge \ v \in \nu g(z_i)$.

$\Rightarrow$: $\exists i \in \{1, \dots, n\} : v \in \nu g(z_i) \overset{1.}{\implies} v \in \{p_1, \dots, p_i, q_i\} \subset \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\}$. □

Satz 5.30 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ seien Elemente $x_i := (p_i, z_i, q_i) \in V \times E \times V$ vorgelegt, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ wohldefiniert ist. Definiere $E_W := \{z_1, \dots, z_n\}$, $V_W := \{v \in V \mid \exists z \in E_W : z \in Inz(v, G)\}$ und $g_W := g\big|_{E_W}$ durch $g_W(z_j) := g(z_j)$.*

Dann ist $W := (V_W, E_W, g_W) < G$ ein Wald mit Eckenmenge $\{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\}$, der keinen Nullgraphen als Komponente enthält.

Beweis Definitionsgemäß gilt $E_W \subset E$ und $V_W \subset V$. Die Abbildung g_W ist wohldefiniert, denn für $z \in E_W$ und $v \in \nu g_W(z) = \nu g(z)$ gilt $z \in Inz(v, G)$, also $v \in V_W$. Daher ist W einTeilgraph von G. Darüber hinaus gilt

$$v \in V_W \Leftrightarrow \exists z_i \in E_W \subset E : z_i \in Inz(v, G) \overset{5.29}{\Leftrightarrow} v \in \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\}.$$

Daraus folgt $V_W = \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{q_1, \dots, q_n\}$. Damit erhält man $x_i \in V_W \times E_W \times V_W$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, also sind für die Graphen $W < G$ die Voraussetzungen aus Satz 5.28

auf Seite 143 erfüllt. Mit $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ ist also auch $H := \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ wohldefiniert. Aus Satz 5.23 auf Seite 136 folgt $E_H = E_W \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} = \emptyset$. Da $H \neq \emptyset$ ist, ist H ein Nullgraph und es gilt $0 = p_1(H)$, weil die Ecken von H die Komponenten sind. Außerdem gilt $p_1(H) = p_1(W)$ nach Satz 5.12 (b)ii. auf Seite 128. Somit ist W ein Wald.

Angenommen es gibt einen Nullgraphen W', der eine Komponente von W ist. Dann enthält W' eine Ecke v', für die $Inz(v', W) = \emptyset$ gilt. Demnach ist v' definitionsgemäß keine Ecke von W. Widerspruch! □

Satz 5.31 *Seien $T_j := \left(V_{T_j}, E_{T_j}, g_{T_j}\right)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ Bäume, von denen keiner ein Nullgraph ist, und $W := \biguplus_{j=1}^m T_j$ ein Wald mit Kantenmenge $z_1, \ldots, z_n$ und $n \in \mathbb{N}$. Vorgelegt seien $x_i := (p_i, z_i, q_i) \in V_W \times E_W \times V_W$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $H := \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ definiert ist.*

(a) Die Kontraktion H ist ein Nullgraph mit Ecken $w_1, \ldots, w_m$, für die $w_j \in V_{T_j}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt. Darüber hinaus sind $w_1, \ldots, w_m, p_1, \ldots, p_n$ die Ecken von W.

(b) Sei $n_j := \left|E_{T_j}\right|$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ sowie

$$M := \{(j, l) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \mid l \leq n_j\}.$$

Definiere eine Abbildung $\varphi : M \to \{1, \ldots, n\}$ durch

$$\varphi(j, 1) := \min\left\{s \in \{1, \ldots, n\} | z_s \in E_{T_j}\right\} \quad \text{und}$$
$$\varphi(j, l) := \min\left\{s \in \{1, \ldots, n\} | z_s \in E_{T_j} \ \wedge \ s > \varphi(j, l-1)\right\} \text{ für } l > 1.$$

Es gelten:

(i) φ ist wohldefiniert und bijektiv.

(ii) $E_{T_j} = \left\{z_{\varphi(j,n_j)}, \ldots, z_{\varphi(j,1)}\right\}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(iii) $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) = \biguplus_{j=1}^{m} \mathcal{C}_{x_{\varphi(j,n_j)}, \ldots, x_{\varphi(j,1)}}(T_j)$.

(iv) $V_{T_j} = \left\{p_{\varphi(j,n_j)}, \ldots, p_{\varphi(j,1)}, w_j\right\}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(c) $\forall x \in V_W \cap V_{T_j}$:

$$\psi\left(p_n, q_n, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(W)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1, V_W\right)(x) = w_j.$$

Beweis **Zu (a):** Nach Satz 5.23 auf Seite 136 gilt

$$E_H = E_W \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} = \emptyset \quad , \quad V_H = V_W \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}. \tag{5.5}$$

Satz 5.12(b)i. liefert $p_0(H) = p_0(W) = m$. Seien $H_1, \ldots, H_m$ die Komponenten von H, also $H = H_1 \cup \cdots \cup H_m$. Für deren Eckenmengen gilt

$$V_{H_j} \subset V_{T_j} \tag{5.6}$$

für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ gemäß Satz 5.12(c). Nun berechnet man $0 = p_1(W) \overset{5.12(b)ii.}{=} p_1(H) = |E_H| - |V_H| + p_0(H)$. Es folgt $|V_H| = m$ aus (5.5). Da H m Komponenten und $V_H = \biguplus_{j=1}^m V_{H_j}$ genau m Elemente hat, gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, m\}$ eine Ecke $w_j \in V_H$ mit $\{w_j\} = V_{H_j} \overset{(5.6)}{\subset} V_{T_j}$. Daher lässt sich

$$\{w_1, \ldots, w_m\} = V_H \overset{(5.5)}{=} V_W \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \tag{5.7}$$

schreiben. An (5.7) erkennt man, dass $w_1, \ldots, w_m, p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschieden sind und $V_W = \{w_1, \ldots, w_m, p_1, \ldots, p_n\}$ gilt.

Zu (i): Sei $j \in \{1, \ldots, m\}$. Da $E_{T_j} \neq \emptyset$ gilt, ist $\varphi(j, 1)$ wohldefiniert. Daher sei im folgenden $n_j \geq 2$ und für $l \in \{1, \ldots, n_j - 1\}$ seien $\varphi(j, l), \ldots, \varphi(j, 1)$ bereits wohldefiniert. Es wird gezeigt, dass $\varphi(j, l + 1)$ definiert ist. Es gilt $\varphi(j, 1) < \varphi(j, 2) < \cdots < \varphi(j, l)$ und $z_{\varphi(j,1)}, \ldots, z_{\varphi(j,l)} \in E_{T_j}$. Außerdem gilt $z_s \notin E_{T_j}$ für jeden Index $s \in \{1, \ldots, \varphi(j, l)\} \setminus \{\varphi(j, 1), \ldots, \varphi(j, l)\}$. Wegen $l < n_j = \left|E_{T_j}\right|$ muss es daher mindestens einen Index $s > \varphi(j, l)$ mit $z_s \in E_{T_j}$ geben. Für den kleinsten unter diesen gilt dann $\varphi(j, l + 1) = s$.

$\boldsymbol{\varphi}$ injektiv: Vorgelegt seien $(j, l), (j', l') \in M$ mit $\varphi(j, l) = \varphi(j', l')$. Zunächst folgt daraus $z_{\varphi(j,l)} = z_{\varphi(j',l')} \in E_{T_j} \cap E_{T_{j'}}$. Daher gilt $j = j'$. Angenommen es gilt $l \neq l'$. Sei o.B.d.A. $l > l'$. Nach Definiton von φ gilt $\varphi(j, l) > \varphi(j, k)$ für jedes $0 < k < l$. Deshalb ergibt sich der Widerspruch $\varphi(j, l') = \varphi(j, l) > \varphi(j, l')$. Insgesamt folgt $(j, l) = (j', l')$.

$\boldsymbol{\varphi}$ bijektiv: Dies folgt aus $|M| = \sum_{j=1}^m n_j = \sum_{j=1}^m \left|E_{T_j}\right| = |E_W| = n$.

Zu (ii): $\supset$: Diese Inklusion folgt aus der Definition von φ.

$\subset$: Sei $z_s \in E_{T_j}$. Falls $z_{s'} \notin E_{T_j}$ für jedes $s' < s$ gilt, ist $s = \varphi(j, 1)$. Andernfalls gibt es eindeutig bestimmte Indizes $s_1 < s_2 < \cdots < s_l < s$, so dass $z_{s_1}, \ldots, z_{s_l} \in E_{T_j}$ gilt. Definitionsgemäß muss nun $s_1 = \varphi(j, 1)$ erfüllt sein. Da die restlichen Indizes eindeutig bestimmt sind, muss $s_k = \varphi(j, k)$ für jedes $k \in \{1, \ldots, l\}$ gelten. Also ergibt sich $s = \varphi(j, l + 1)$.

Zu (iii): Definition 5.22 auf Seite 135 erlaubt ein mehrmaliges Anwenden von Satz 4.9 auf Seite 79. Da die Bäume $T_1, \ldots, T_m$ paarweise disjunkt sind, folgt die Gleichung aus (i) und (ii).

Zu (iv): Man wendet (a) auf den Baum T_j und die nach (iii) wohldefinierte Kontraktion $\mathcal{C}_{x_{\varphi(j,n_j)}, \ldots, x_{\varphi(j,1)}}(T_j)$ an. Daher gibt es eine Ecke $f_j \in V_{T_j} \subset V_W$, so dass $V_{T_j} =$

$\left\{p_{\varphi(j,n_j)},\ldots,p_{\varphi(j,1)},f_j\right\}$ gilt. Bezüglich der Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ gilt

$$V_W \overset{\text{(a)}}{=} \{w_1,\ldots,w_m,p_1,\ldots,p_n\} \overset{\text{(i)}}{=} \{w_1,\ldots,w_m\} \cup \biguplus_{j=1}^{m} \left(V_{T_j} \setminus \{f_j\}\right).$$

Daraus folgt $f_j \in \{w_1,\ldots,w_m\}$. Nach (a) gilt $w_j \in V_{T_j}$, daher muss $w_j = f_j$ erfüllt sein.

Zu (c): Für jedes $s \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

1. $s \in \{1,\ldots,n\} \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \exists (j,l) \in M : \varphi(j,l) = s \overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} p_s = p_{\varphi(j,l)} \in V_{T_j} \overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} q_s = q_{\varphi(j,l)} \in V_{T_j}$.

2. Für jedes $x \in V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(W)} \cap V_{T_j}$ berechnet man:

$$\psi\left(p_s,q_s,V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(W)}\right)(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x & : & x \neq p_s \\ q_s & : & x = p_s \end{array}\right\} \overset{1.}{\in} V_{\mathcal{C}_{\lceil x_s \rceil}(W)} \cap V_{T_j}.$$

Sei nun $x \in V_W \cap V_{T_j}$. Nach 2. gilt dann

$$\psi\left(p_n,q_n,V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(W)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1,q_1,V_W\right)(x) \in V_{T_j} \cap V_W \setminus \{p_1,\ldots,p_n\}.$$

Aus $V_{T_j} \cap V_W \setminus \{p_1,\ldots,p_n\} \overset{\text{(a)}}{=} V_{T_j} \cap V_H = V_{T_j} \cap (V_{H_1} \cup \cdots \cup V_{H_m}) \overset{(5.6)}{=} V_{T_j} \cap V_{H_j} = V_{H_j} = \{w_j\}$ folgt die Behauptung. □

Satz 5.32 *Sei $T = (V_T, E_T, g_T)$ ein Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Kanten und $w \in V_T$. Dann gibt es eine bijektive Spezielle injektive Abbildung $i_T : V_T \setminus \{w\} \to E_T$ und Ecken $q_1,\ldots,q_n \in V_T$, so dass mit $x_i := (p_i, i_T(p_i), q_i)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ die Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(T)$ wohldefiniert ist. Dabei sind $p_1,\ldots,p_n$ die Elemente von $V_T \setminus \{w\}$.*

Beweis mit Induktion über die Anzahl n der Kanten. Für $n = 1$ ist die Aussage klar.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1:}$ Sei T ein Baum mit $n+1$ Kanten und $w \in V_T$. Da T laut [27], Theorem I.40. mindestens zwei Blätter hat, gibt es ein Blatt $b \in V_T \setminus \{w\}$. Es sei e die in T zu b inzidente Kante und T' derjenige Teilgraph von T mit Ecken $V_{T'} := V_T \setminus \{b\}$ und Kanten $E_{T'} := E_T \setminus \{e\}$. Dann ist T' ein Baum mit n Kanten (dazu siehe A) am Ende des Beweises) und $w \in V_{T'}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine bijektive Spezielle injektive Abbildung $i_{T'} : V_{T'} \setminus \{w\} \to E_{T'}$ sowie Ecken $q'_1,\ldots,q'_n \in V_{T'}$, so dass mit $V_{T'} \setminus \{w\} := \{p'_1,\ldots,p'_n\}$ und $y_i := (p'_i, i_{T'}(p'_i), q'_i), i \in \{1,\ldots,n\}$ der Graph $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T')$ wohldefiniert ist. Nach Satz 5.28 ist $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T') < \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)$. Definiere

$$i_T : V_T \setminus \{w\} \to E_T \quad \text{durch} \quad x \mapsto \left\{\begin{array}{lcr} i_{T'}(x) & : & x \in V_{T'} \setminus \{w\} \\ e & : & x = b \end{array}\right. .$$

Automatisch ist i_T bijektiv und Speziell. Da $b \notin V_{T'} \setminus \{w\}$ ein Blatt und e keine Schlaufe in T ist, ist e auch keine Schlaufe in $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)$ und b inzident zu e in $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)$ (dazu siehe B) am Ende des Beweises). Also gibt es $q'_{n+1} \in V_{\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)} \subset V_T$, so dass $\mathcal{C}_{b,e,q'_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)\right)$ wohldefiniert ist. Setze $p'_{n+1} := b$ und $x_i := (p'_i, i_T(p'_i), q'_i)$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, dann folgt $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(T) = \mathcal{C}_{b,e,q'_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)\right)$.

Zu A): Es wird gezeigt, dass T' ein Baum ist. Zu zeigen ist $p_1(T') = 0$. Es seien c und b die zu e in T inzidenten Ecken. Angenommen es gilt $c = b$. Es folgt

$$1 \overset{b \text{ Blatt in } T}{=} \deg_T(b) = |Inz(b,T)| + |Sch(b,T)| \geq 1 + 1 = 2.$$

Widerspruch! Also gilt $c \neq b$. Sei S der Graph, der aus den Ecken b, c und der Kante e besteht. Wegen $T = S \cup T'$, $E_S \cap E_{T'} = \{e\} \cap E_T \setminus \{e\} = \emptyset, |V_S \cap V_{T'}| = |\{c\}| = 1, |E_{T'}| \geq 1$ und $|E_S| = 1$ ist (S, T') eine 1-Aufspaltung von T. Somit ist T' nach [27], Theorem III.1., p.54 zusammenhängend, also $p_0(T') = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} p_1(T') &= |E_{T'}| - |V_{T'}| + p_0(T') = |E_T| - 1 - (|V_T| - 1) + 1 \\ &= |E_T| - |V_T| + p_0(T) = p_1(T) = 0. \end{aligned}$$

Also ist T' ein Baum.

Zu B): Es wird gezeigt, dass e keine Schlaufe in $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)$ und b in $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)$ inzident zu e ist: Aus A) ist $\nu g_T(e) = \{b, c\}, c \neq b$ bekannt. Es folgt

$$\begin{aligned} \nu g_{\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(T)}(e) &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(p'_n, q'_n, V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(T)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p'_1, q'_1, V_T\right)\right) \nu g_T(e) \\ &= \begin{cases} \{b, c\} & : \quad c \notin \{p'_1, \ldots, p'_n\} \\ \{b, q'_s\} & : \quad c \in \{p'_1, \ldots, p'_n\} \end{cases}, \end{aligned}$$

denn $b \notin V_{T'} = V_T \setminus \{b\} \supset \{p'_1, \ldots, p'_n\}$. Außerdem ist $b \neq q'_s$, denn sonst ergäbe sich $b = q'_s \in V_{T'}$. □

Satz 5.33 *Sei $W = (V_W, E_W, g_W)$ ein Wald, der aus Bäumen $T_1, \ldots, T_m$, $m \in \mathbb{N}$ besteht. Keiner dieser Bäume sei ein Nullgraph. Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ sei w_j eine Ecke des Baumes T_j. Die Elemente von $V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\}$ seien $p_1, \ldots, p_n$. Dann gibt es Ecken $q_1, \ldots, q_n$ von W und eine bijektive Spezielle injektive Abbildung $i : V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\} \to E_W$, so dass mit $x_s := (p_s, i(p_s), q_s)$, $s \in \{1, \ldots, n\}$ die Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ wohldefiniert und ein Nullgraph mit Ecken $w_1, \ldots, w_m$ ist.*

Beweis Unter der Annahme, dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ bereits definiert ist, wird $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) = (\{w_1, \ldots, w_m\}, \emptyset, \emptyset)$ gezeigt: Wegen Bild $i = E_W$ (i bijektiv) läßt sich Satz 5.31 (a) anwenden. Also gibt es Ecken $w'_j \in V_{T_j}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) = (\{w'_1, \ldots, w'_m\}, \emptyset, \emptyset)$

ist und $\{p_1, \ldots, p_n, w'_1, \ldots, w'_m\} = V_W$ gilt. Es folgt

$$V_W = \{p_1, \ldots, p_n\} \biguplus \{w'_1, \ldots, w'_m\} = (V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\}) \biguplus \{w'_1, \ldots, w'_m\}.$$

Daraus ergibt sich $\{w'_1, \ldots, w'_m\} = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Da die Eckenmengen der Bäume paarweise disjunkt sind, muss also $w_j = w'_j$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ erfüllt sein.

Nun wird gezeigt, dass eine Spezielle injektive Abbildung wie in der Behauptung gefordert existiert, und dass dadurch $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ wohldefiniert ist. Dies wird mit Induktion über die Anzahl der Bäume m durchgeführt: Satz 5.32 liefert den Fall $m = 1$.

$\boldsymbol{m \mapsto m+1:}$ Sei $W' := \biguplus_{j=1}^{m+1} T_j$ ein Wald mit $m+1$ Bäumen und $w_j \in V_{T_j}$ für $j \in \{1, \ldots, m+1\}$. Da $W := \biguplus_{j=1}^{m} T_j$ ein Wald mit m Bäumen ist, gibt es nach IV eine bijektive Spezielle injektive Abbildung $i : V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\} \to E_W$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ definiert ist (hier gelten die Bezeichnungen aus der Voraussetzung des Satzes). Da T_{m+1} ein Baum ist, gibt es nach Satz 5.32 eine Spezielle injektive Abbildung $i' : V_{T_{m+1}} \setminus \{w_{m+1}\} \to E_{T_{m+1}}$, sowie Ecken $q_{n+1}, \ldots, q_l$, so dass mit $x_s := (p_s, i'(p_s), q_s)$, $s \in \{n+1, \ldots, l\}$ die Kontraktion $\mathcal{C}_{x_l, \ldots, x_{n+1}}(T_{m+1})$ definiert ist. Dabei seien $p_{n+1}, \ldots, p_l$ die Elemente von $V_{T_{m+1}} \setminus \{w_{m+1}\}$. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} V_{W'} \setminus \{w_1, \ldots, w_{m+1}\} &= (V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\}) \biguplus \left(V_{T_{m+1}} \setminus \{w_{m+1}\}\right) \\ &= \{p_1, \ldots, p_n\} \biguplus \{p_{n+1}, \ldots, p_l\} \end{aligned}$$

und eine bijektive Spezielle injektive Abbildung $i'' : V_{W'} \setminus \{w_1, \ldots, w_{m+1}\} \to E_{W'} (= E_W \uplus E_{T_{m+1}})$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} i(x) & : \quad x \in V_W \setminus \{w_1, \ldots, w_m\} \\ i'(x) & : \quad x \in V_{T_{m+1}} \setminus \{w_{m+1}\} \end{cases},$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\lceil x_l \rceil}(W') &\overset{\text{Def.}}{=} \mathcal{C}_{x_l, \ldots, x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}\left(W \biguplus T_{m+1}\right)\right) \\ &\overset{4.9}{=} \mathcal{C}_{x_l, \ldots, x_{n+1}}\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) \biguplus T_{m+1}\right) \\ &\overset{4.9}{=} \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) \biguplus \mathcal{C}_{x_l, \ldots, x_{n+1}}(T_{m+1}) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. □

Satz 5.34 *Vorgelegt sei ein Graph $G = (V, E, g)$ und Elemente $x_j := (p_j, z_j, q_j) \in V \times E \times V$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ definiert ist. Dann gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i : \{p_1, \ldots, p_n\} \to E$ und Elemente $y_j := \left(p_j, i(p_j), q'_j\right) \in V \times E \times V$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ gilt.*

Beweis Es sei W der Wald aus Satz 5.30 auf Seite 145 bestehend aus m Bäumen $T_1, \ldots, T_m$. Nach Satz 5.31 auf Seite 146 gibt es Ecken $w_i \in V_{T_i}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $V_W = \{w_1, \ldots, w_m, p_1, \ldots, p_n\}$ und $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) = (\{w_1, \ldots, w_m\}, \emptyset, \emptyset)$ erfüllt ist. Satz 5.33 auf Seite 149 liefert eine Spezielle injektive Abbildung $i : \{p_1, \ldots, p_n\} \to E_W$ mit $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(W) = \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$. Nach Satz 5.28 auf Seite 143 ist $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ definiert. Zu zeigen ist $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$. Definitionsgemäß haben beide Graphen dieselben Ecken- und Kantenmengen. Es bleibt also $g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)}(z) = g_{\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)}(z)$ für jede Kante z zu zeigen. Nach Satz 5.28 gilt $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W) < \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ und $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(W) < \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$. Nun sei $z \in E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)} \setminus E_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)} \subset E$ und $x \in \nu g(z)$. Für $x \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ gilt

$$\psi\left(p_n, q_n, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1, V\right)(x) = x = \psi\left(p_n, q_n', V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(G)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1', V\right)(x).$$

Für $x \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ gilt: Es gibt einen Index $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in V_W \cap V_{T_j}$. Nun wendet man Satz 5.31 (c) sowohl auf $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(W)$ als auch auf $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(W)$ an und erhält:

$$\begin{aligned}
&\psi\left(p_n, q_n, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(G)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1, V\right)(x) \\
&= \psi\left(p_n, q_n, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(W)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1, V_W\right)(x) \\
&= w_j \\
&= \psi\left(p_n, q_n', V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(W)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1', V_W\right)(x) \\
&= \psi\left(p_n, q_n', V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(G)}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(p_1, q_1', V\right)(x).
\end{aligned}$$

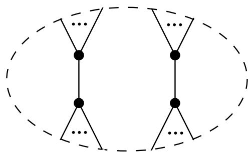
Insgesamt ergibt sich $g_{\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)}(z) = g_{\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)}(z)$. □

5.3 Komposition von zu Kontraktionen induzierten Abbildungen

Bei einer mehrfachen Kontraktion lassen sich die zu jeder Kontraktion gehörigen Homomorphismen der Verschlingungsmoduln verknüpfen. In Satz 5.37 auf Seite 154 wird gezeigt, dass diese Verknüpfung bezüglich einer Speziellen injektiven Abbildung nicht von der Reihenfolge abhängt. Der Abschnitt beginnt mit einem weiteren Ergebnis über die Verschlingungsinvariante: Ist L_y gleich Null für jedes Diagramm, so ist $y = 0$. Diese Tatsache wird im darauffolgenden Satz benötigt, welcher selbst ein wesentlicher Bestandteil im Beweis von Satz 5.37 ist.

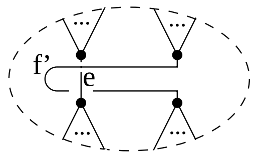
Satz 5.35 *Vorgelegt sei ein orientierter Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o_{\mathcal{Z}})$ mit einer bijektiven Nummerierung (w, γ) und ein Element $y \in \mathcal{G}(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)$. Der Graph $G(\mathcal{Z})$ habe nur Ecken* *vom Grad größer Eins. Für jedes mittels* (w_D, γ_D) *derart bijektiv nummeriertes orientiertes Diagramm* (D, o) *zu* $\mathcal{Z}$*, dass* $\mathcal{A}(G(\mathcal{Z}), w, \gamma) = \mathcal{A}(G(D), w_D, \gamma_D)$ *(dazu siehe 2.20 und 2.21 auf Seite 40) also* $\mathcal{G}(G(D), w_D, \gamma_D) = \mathcal{G}(G(\mathcal{Z}), w, \gamma)$ *gilt, gelte* $L_y(D, \gamma_D, o) = 0$*. Dann ist* $y = 0$*.*

Beweis Wenn $\mathcal{G}(G(D)) = 0$ ist, ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $0 \neq y \in \mathcal{G}(G(D))$ und (D, o) ein bijektiv nummeriertes Diagramm, so dass $L_y(D, \gamma_D, o) = 0$ gilt. Gibt es so ein Diagramm nicht, ist die Behauptung bewiesen. Wegen $y \neq 0$ gibt es $(k, l) \in IE(G(D), w_D, \gamma_D)$ mit $y_{(k,l)} \neq 0$. Da (w_D, γ_D) ein Isomorphismus ist, sind $\gamma_D^{-1}(e_l)$ und $\gamma_D^{-1}(e_k)$ nicht inzident in $G(D)$. Daher ist das Diagramm (D, o) orientiert äquivalent zu einem Diagramm (D', o'), in dem die folgende lokale Situation auftritt:



Dabei wählt man eine mit (w_D, γ_D) bezüglich der Äquivalenz verträgliche Nummerierung $(w_{D'}, \gamma_{D'})$ sowie $e := \gamma_{D'}^{-1}(e_k)$ und $f := \gamma_{D'}^{-1}(e_l)$. Also folgt $0 = L_y(D, \gamma_D, o) = L_y(D', \gamma_{D'}, o')$ für jedes $y \in \mathcal{G}(G(D)) = \mathcal{G}(G(D'))$. Betrachte das Diagramm (5.8), das bis auf die Kante f' mit (D', o') identisch ist. Als Nummerierung wählt man $\gamma_{D''}(x) := \gamma_{D'}(x)$ für alle $x \neq f'$ und $\gamma_{D''}(f') := \gamma_{D'}(f)$. Dann gilt

$$w^{(D'',o'')}_{\gamma_{D''}^{-1}(e_k),\gamma_{D''}^{-1}(e_l)} = w^{(D',o')}_{\gamma_{D'}^{-1}(e_k),\gamma_{D'}^{-1}(e_l)} \pm 2, \tag{5.8}$$



je nachdem wie die Kanten orientiert sind. Für alle anderen $(s, t) \neq (k, l)$ ergibt sich

$$w^{(D'',o'')}_{\gamma_{D''}^{-1}(e_s),\gamma_{D''}^{-1}(e_t)} = w^{(D',o')}_{\gamma_{D'}^{-1}(e_s),\gamma_{D'}^{-1}(e_t)}.$$

Daraus erhält man die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} L_y\left(D'', \gamma_{D''}, o''\right) &= \sum_{(s,t)\in IE(G(D''))} y_{(s,t)} \cdot w^{(D'',o'')}_{\gamma_{D''}^{-1}(e_s),\gamma_{D''}^{-1}(e_t)} \\ &= \sum_{(s,t)\in IE(G(D'))} y_{(s,t)} \cdot w^{(D',o')}_{\gamma_{D'}^{-1}(e_s),\gamma_{D'}^{-1}(e_t)} \pm 2y_{(k,l)} \\ &= L_y\left(D', \gamma_{D'}, o'\right) \pm 2y_{(k,l)} = \pm 2y_{(k,l)} \neq 0. \end{aligned}$$

□

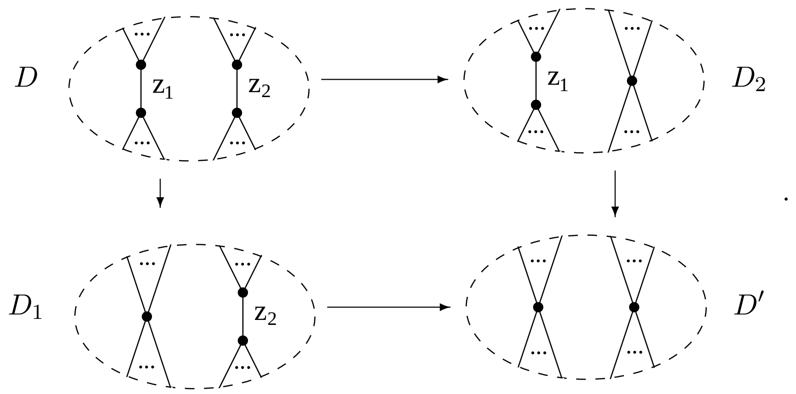
Satz 5.36 *Vorgelegt sei ein bijektiv nummerierter orientierter Graph G. Seien z_1, z_2 Kanten und $p_1, p_2, q_1, q_1, w_1, w_2$ Ecken von G, so dass*

$$L := \mathcal{C}_{(p_2,z_2,q_2),(p_1,z_1,q_1)}(G) = \mathcal{C}_{(p_1,z_1,w_1),(p_2,z_2,w_2)}(G)$$

gilt. Die in G zu z_1 und z_2 inzidenten Ecken seien vom Grad größer Eins. Dann ist das Diagramm (5.9) kommutativ.

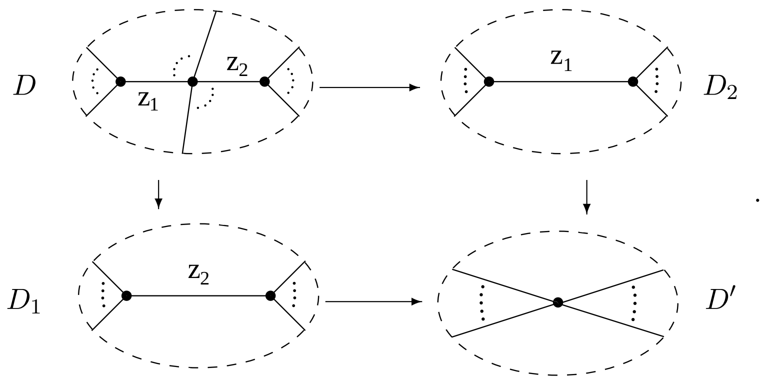
$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(L) \arrow[r, "op(p_1,z_1,w_1)"] \arrow[d, "op(p_2,z_2,q_2)"'] & \mathcal{G}\left(\mathcal{C}_{(p_2,z_2,w_2)}(G)\right) \arrow[d, "op(p_2,z_2,w_2)"] \\ \mathcal{G}\left(\mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1)}(G)\right) \arrow[r, "op(p_1,z_1,q_1)"] & \mathcal{G}(G) \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Beweis Sind z_1 und z_2 in G nicht inzident, gibt es ein orientiertes Diagramm (D, o) mit $G(D) = G$, in dem eine lokale Situation wie in der Abbildung (5.10) auftritt.



. (5.10)

Sind z_1, z_2 in G inzident, gibt es ein orientiertes Diagramm (D, o) mit $G(D) = G$, in dem eine lokale Situation wie in der Abbildung (5.11) auftritt.



. (5.11)

Die Diagramme D_1, D_2, D' und D seien außerhalb der dargestellten lokalen Situation identisch. In beiden Fällen gilt $G(D_1) = G\left(\mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1)}(G)\right)$, $G(D_2) = G\left(\mathcal{C}_{(p_2,z_2,w_2)}(G)\right)$ und $G(D') = L$. Sei $y \in \mathcal{G}(L)$,

$$y_1 := op(p_2, z_2, w_2)\left(op(p_1, z_1, w_1)(y)\right) \quad \text{sowie} \quad y_2 := op(p_1, z_1, q_1)\left(op(p_2, z_2, q_2)(y)\right).$$

Mehrmaliges Anwenden von Satz 4.35 auf Seite 110 ergibt

$$\begin{aligned} L_{y_1}(D,\gamma_G,o) &= L_{op(p_1,z_1,w_1)(y)}\left(D_2,\gamma_{\mathcal{C}_{(p_2,z_2,w_2)}(G)},o_{D_2}\right) = L_y\left(D',\gamma_L,o_{D'}\right) \\ &= L_{op(p_2,z_2,q_2)(y)}\left(D_1,\gamma_{\mathcal{C}_{(p_1,z_1,q_1)}(G)},o_{D_1}\right) = L_{y_2}(D,\gamma_G,o)\,. \end{aligned}$$

Dabei seien γ_* die zu den jeweiligen Gaphen gehörigen bijektiven Kantennummerierungen und o_* die zu den jeweiligen Diagrammen gehörigen (durch o induzierten) Orientierungen. Mit y_1 und y_2 ist auch $y_1 - y_2$ ein Element von $\mathcal{G}(G)$, daher gilt

$$L_{y_1-y_2}(D,\gamma_G,o) = L_{y_1}(D,\gamma_G,o) - L_{y_2}(D,\gamma_G,o) = 0. \tag{5.12}$$

Das Diagramm (D,o) gehöre zu einer Einbettung $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eines orientierten Zellenkomplexes $(\mathcal{Z},o_{\mathcal{Z}})$. Dann gilt $G(\mathcal{Z}) \cong G(D)$ nach Satz 2.20 auf Seite 40, daher sind die Urbilder von z_1 und z_2 nicht inzident bzw. inzident in $G(\mathcal{Z})$, je nachdem welcher der oben erwähnten Fälle eintritt. Deshalb ist jedes weitere Diagramm $(D'',o_{D''})$ einer Einbettung $\Gamma'' : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ äquivalent zu einem Diagramm $(D''',o_{D'''})$ mit einer lokalen Situation wie in D. Für eine geeignete bijektive Nummerierung $\left(w_{G(D''')},\gamma_{G(D''')}\right)$ von D''' gilt $\mathcal{G}(G(D''')) = \mathcal{G}(G(D''))$. Wie in (5.12) für D kann man $L_{y_1-y_2}(D''',\gamma_{D'''},o_{D'''}) = 0$ schließen. Da D'' äquivalent zu D''' ist, gilt also $L_{y_1-y_2}(D'',\gamma_{D''},o_{D''}) = 0$. Aus Satz 5.35 auf Seite 151 folgt $y_1 - y_2 = 0$, da (D'',o'') ein beliebiges Diagramm zu $\mathcal{Z}$ war. □

Satz 5.37 *Sei $G = (V,E,g)$ ein orientierter Graph, dessen Ecken vom Grad größer Eins sind, $n \neq 1$ eine natürliche Zahl, $i : \{p_1,\ldots,p_n\} \to E$ eine Spezielle injektive Abbildung und Ecken $q_1,\ldots,q_n$ so gegeben, dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ mit $x_j := (p_j,i(p_j),q_j)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ wohldefiniert ist. Zu einer Permutation $\sigma \in S_n$ seien q'_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$ so gegeben, dass mit $y_j := \left(p_{\sigma(j)}, i\left(p_{\sigma(j)}\right), q'_j\right)$ der Graph $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ laut Satz 5.27.3. wohldefiniert ist. Dann gilt*

$$op(x_1) \circ \cdots \circ op(x_n) = op(y_1) \circ \cdots \circ op(y_n)\,. \tag{5.13}$$

Beweis Sei $\sigma = \tau_m \circ \cdots \circ \tau_1$ durch eine Komposition von Nachbartranspositionen (NBT) dargestellt. Die Aussage wird mit Induktion über m bewiesen.

$\boldsymbol{m = 1:}$ $\sigma = (s\, s+1)$ ist selbst eine NBT. Wenn $s \geq 2$ ist, gilt $\sigma(j) = j$, also $p_{\sigma(j)} = p_j$ für $j \in \{1,\ldots,s-1\}$. Nach Satz 5.27 (a) muss daher $q_j = q'_{\sigma(j)} = q'_j$ gelten. Somit sind $\mathcal{C}_{\lceil x_j \rceil}(G)$ und $\mathcal{C}_{\lceil y_j \rceil}(G)$ für jedes $j \in \{0,\ldots,s-1\}$ identisch und es folgt $op(x_j) = op(y_j)$. Sei nun $L := \mathcal{C}_{\lceil x_{s-1} \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil y_{s-1} \rceil}(G)$. Die Einschränkung $i\big|_{\{p_s,p_{s+1}\}} : \{p_s,p_{s+1}\} \to E_L$ ist eine Spezielle injektive Abbildung, denn die mehrfachen Kontraktionen von G hin zu L beeinflussen die Inzidenz von p_s zu $i(p_s)$ bzw. von p_{s+1} zu $i(p_{s+1})$ nicht. Also gilt

$\mathcal{C}_{x_{s+1},x_s}(L) = \mathcal{C}_{y_{s+1},y_s}(L)$ nach Satz 5.27 und $op\,(x_{s+1}) \circ op\,(x_s) = op\,(y_{s+1}) \circ op\,(y_s)$ nach Satz 5.36 auf Seite 153. Analog zu den obigen Betrachtungen ergibt sich $op\,(x_j) = op\,(y_j)$ für $j \in \{s+2, \ldots, n\}$, sofern $s \leq n-2$ gilt.

Für $\sigma = (1\,2)$ und $\sigma = (n-1\,n)$ tritt jeweils nur einer der oben behandelten Fälle ein, deshalb schließt man genauso.

$\boldsymbol{m \mapsto m+1:}$ Sei $\sigma = \tau_{m+1} \circ \cdots \circ \tau_1$ ein Produkt aus $m+1$ NBT und q'_j Ecken, so dass mit $y_j := \left(p_{\sigma(j)}, i(p_{\sigma(j)}), q'_j\right)$ der Graph $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ definiert ist. Sei $\tau := \tau_m \circ \cdots \circ \tau_1$.

1. $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ definiert $\overset{5.27.3.}{\Longrightarrow}$ zu $\tau \in S_n$ gibt es q''_j, $u_j := \left(p_{\tau(j)}, i(p_{\tau(j)}), q''_j\right)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil u_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ gilt $\overset{\text{IV}}{\Longrightarrow}$ $op(x_1) \circ \cdots \circ op(x_n) = op(u_1) \circ \cdots \circ op(u_n)$

2. $\mathcal{C}_{\lceil u_n \rceil}(G)$ definiert $\overset{5.27.3.}{\Longrightarrow}$ zu $\tau_{m+1} \in S_n$ gibt es Ecken q'''_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass
$$\mathcal{C}_{\lceil u_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\left(p_{\tau_{m+1}\tau(n)}, i(p_{\tau_{m+1}\tau(n)}), q'''_n\right), \ldots, \left(p_{\tau_{m+1}\tau(1)}, i(p_{\tau_{m+1}\tau(1)}), q'''_1\right)}(G)$$
gilt. Da τ_{m+1} eine NBT ist folgt $op(u_1) \circ \cdots \circ op(u_n) = op(w_1) \circ \cdots \circ op(w_n)$ (aus dem Induktionsanfang $m = 1$) mit $w_j := \left(p_{\tau_{m+1}\tau(j)}, i(p_{\tau_{m+1}\tau(j)}), q'''_j\right)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3. Da $\mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ durch $y_j = \left(p_{\sigma(j)}, i(p_{\sigma(j)}), q'_j\right)$ und $\mathcal{C}_{\lceil u_n \rceil}(G)$ durch
$$w_j = \left(p_{\tau_{m+1}\tau(j)}, i(p_{\tau_{m+1}\tau(j)}), q'''_j\right) \overset{\tau_{m+1} \circ \tau = \sigma}{=} \left(p_{\sigma(j)}, i(p_{\sigma(j)}), q'''_j\right)$$
definiert ist und laut 5.27.1. die Ecken q'_j und q'''_j eindeutig bestimmt sind, muss $q'_j = q'''_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelten. Also gilt $y_j = w_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Insgesamt folgt
$$\begin{aligned} op\,(x_1) \circ \cdots \circ op\,(x_n) &\overset{1.}{=} op\,(u_1) \circ \cdots \circ op\,(u_n) \overset{2.}{=} op\,(w_1) \circ \cdots \circ op\,(w_n) \\ &\overset{3.}{=} op\,(y_1) \circ \cdots \circ op\,(y_n)\,. \end{aligned}$$

□

5.4 Topologisch einfache Graphen

Graphen, die eine der beiden Situationen der Bemerkung auf Seite 160 beinhalten, nennt man nicht topologisch einfach. Um die Definition aus [23] auf Seite 219 (Definition 5.38) zu verwenden, wird dies in Satz 5.41 auf Seite 157 nachgewiesen.

Ist ein Graph G nicht topologisch einfach, so ist auch eine (p, e, q)-Kontraktion von G nicht topologisch einfach (Satz 5.42 auf Seite 161). Unter welchen Bedingungen die Rückrichtung dieser Implikation gilt, wird in Satz 5.43 auf Seite 166 und Satz 5.44 auf Seite 168 untersucht. Beispielsweise gilt sie nicht für Graphen, die sich aus einer Situation wie (b) aus der Bemerkung auf Seite 168 konstruieren lassen.

Später wird häufig das sich daraus ergebende Korollar 5.46 auf Seite 170 benutzt, wonach der topologische Typ (also einfach/nicht einfach) durch eine Kontraktion an einer zweiwertigen Ecke nicht beeinflusst wird.

Definition 5.38 *[23] Ein Graph G heißt* **topologisch einfach***, wenn für jeden nicht einfachen Graphen H gilt: $G \neq H$ und $G \notin sub(H)$.*

Bemerkung Laut Definition 5.38 ist G <u>nicht</u> topologisch einfach, wenn es einen nicht einfachen Graphen H gibt, so dass $G = H$ oder $G \in sub(H)$ gilt.

Offenbar ist ein orientierter Graph genau dann topologisch einfach, wenn es der zugrundeliegende nicht-orientierte Graph ist, denn sowohl Definition 5.22 auf Seite 135 als auch die Definitionen einer Schlaufe bzw. Mehrfachkanten in 1.1 auf Seite 11 hängen nicht davon ab, ob der Graph orientiert ist. □

Satz 5.39 *Es sei $G = (V, E, g)$ ein orientierter Graph, $p, q \in V$ und $e \in E$, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist. Dann ist mit $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ auch G einfach.*

Beweis Es sei G nicht einfach. Es gibt also Mehrfachkanten $f, c \in E$ oder eine Schlaufe $h \in E$. Ist $f \neq e$ und $c \neq e$, so gilt

$$\nu g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(f) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p, q, V)\right) \nu g(f) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p, q, V)\right) \nu g(c) = \nu g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(c).$$

Daher sind $f, c \in E_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ Mehrfachkanten. Für $f = e$ und $c \neq e$ berechnet man $\nu g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(c) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p, q, V)\right) \nu g(e) = \{q\}$. Also ist $c \in E_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$ eine Schlaufe. Analog schließt man für $c = e$ und $f \neq e$. Für eine Schlaufe $h \in E$ gilt $h \neq e$. Für $\nu g(h) = \{v\}$ berechnet man

$$\nu g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(h) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p, q, V)\right)(\{v\}) = \begin{cases} \{v\} & : \quad v \neq p \\ \{q\} & : \quad v = p \end{cases}.$$

Also ist h eine Schlaufe in $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$. □

Satz 5.40 *Es sei $G = (V, E, g)$ ein orientierter Graph, $p, q \in V$ und $e \in E$, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist. Sei f eine Schlaufe von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$. Dann ist G nicht einfach.*

Beweis Sei $\nu g(f) = \{a,b\}$ und v eine Ecke mit

$$\{v\} = \nu g_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(f) = \mathcal{P}_2\left(\psi(p,q,V_G)\right)\nu g(f).$$

1. Fall: $p \notin \{a,b\} \implies v = a = b \implies f$ Schlaufe von G.

2. Fall: $p = a \ \wedge \ b \neq p \implies q = v = b \implies \nu g(f) = \{p,q\} = \nu g(e) \implies f, e$ sind Mehrfachkanten von G.

3. Fall: $p = b \ \wedge \ a \neq p$: Analog zum 2.Fall.

4. Fall: $p = a = b \implies \nu g(f) = \{p,p\} \implies f$ Schlaufe von G. □

Satz 5.41 *Ein orientierter Graph $G = (V,E,g)$ ist genau dann nicht topologisch einfach, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Es gibt Wege $(w,W) : J'_n \to G$ und $(u,U) : J'_m \to G$ mit $m,n \in \mathbb{N}$, für die (a), (b) und (c) gelten:*

   (a) *$w(0) = u(0)$, $w(n) = u(m)$.*

   (b) *$\mathit{Bild}\, w \cap \mathit{Bild}\, u = \{w(0), w(n)\}$, $\mathit{Bild}\, W \cap \mathit{Bild}\, U = \emptyset$.*

   (c) *$\deg_G(w(i)) = 2$ für jedes $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, sofern $n \geq 2$ gilt, und $\deg_G(u(i)) = 2$ für $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, sofern $m \geq 2$ gilt.*

2. *Es gibt einen Kreis $(c,C) : J'_n \to G$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\deg_G(c(i)) = 2$ für jedes $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, sofern $n \geq 2$ gilt*

Beweis **⇒:** Es sei G nicht topologisch einfach. Besitzt G bereits eine Schlaufe oder Mehrfachkanten, so lassen sich offensichtlich für $m = n = 1$ Wege bzw. Kreise wie in 1. und 2. gefordert angeben. Ansonsten ist G eine Unterteilung eines Graphen L_N, d.h. $L_N = \mathcal{C}_{\lceil x_N \rceil}(G)$, $N \in \mathbb{N}$, so dass L_N eine Schlaufe oder Mehrfachkanten hat. Definiere $L_j := \mathcal{C}_{x_j}(L_{j-1})$ für $1 \leq j \leq N$ und $L_0 := G$. Angenommen für ein $j \in \{1,\ldots,N\}$ sind bereits

A) Wege $(w,W) : J'_n \to L_j$, $(u,U) : J'_m \to L_j$, die 1(a), 1(b) und 1(c) erfüllen

oder

B) ein Kreis $(c,C) : J'_n \to L_j$, der Bedingung 2. genügt,

gegeben. Nun werden die geforderten Wege / der geforderte Kreis nach L_{j-1} konstruiert. Zur Notation sei dazu $x_j = (p,e,q)$, also $L_j = \mathcal{C}_{p,e,q}(L_{j-1})$.

Zu A): Nach Satz 5.10 (b), (c) existieren Wege $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) : J'_{\widetilde{n}} \to L_{j-1}$, $(\widetilde{u}, \widetilde{U}) : J'_{\widetilde{m}} \to L_{j-1}$ mit $\widetilde{n} \in \{n, n+1\}$, $\widetilde{m} \in \{m, m+1\}$ und

$$\widetilde{w}(0) = w(0), \quad \widetilde{w}(\widetilde{n}) = w(n), \quad \widetilde{u}(0) = u(0) \quad \text{und} \quad \widetilde{u}(\widetilde{m}) = u(m). \tag{5.14}$$

Es sind nun die Bedingungen 1(a), 1(b) und 1(c) für die Wege $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$, $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ zu verifizieren.
Zu 1(a): Es gelten

$$\widetilde{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0) \quad \text{sowie} \quad \widetilde{w}(\widetilde{n}) = w(n) = u(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m}). \tag{5.15}$$

Zu 1(b): Nach Satz 5.10(b),(c) gilt für $a \in \{w, u\}$: $\operatorname{Bild} \widetilde{a} = \operatorname{Bild} a$ oder $\operatorname{Bild} \widetilde{a} = \operatorname{Bild} a \cup \{p\}$. Daraus folgen

$$\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} = \{w(0), w(n)\}, \tag{5.16}$$

was die Behauptung ist, oder

$$\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} = \{w(0), w(n), p\}. \tag{5.17}$$

Es wird gezeigt, dass (5.17) nicht eintreten kann. Angenommen (5.17) gilt. Falls $\widetilde{n} = 1$ ist, folgt $p \in \operatorname{Bild} w \subset V_{L_j}$. Widerspruch! Analoges gilt für $\widetilde{m}$, daher muss $\widetilde{n} \geq 2$ und $\widetilde{m} \geq 2$ erfüllt sein. Wegen $p \notin V_{L_j}$ gibt es $s \in \{1, \ldots, \widetilde{n} - 1\}$, $t \in \{1, \ldots, \widetilde{m} - 1\}$, so dass $p = \widetilde{w}(s) = \widetilde{u}(t)$ ist. Dann folgt $p \in \nu g_{L_{j-1}} \widetilde{W}(l_s)$, $p \in \nu g_{L_{j-1}} \widetilde{W}(l_{s+1})$, $p \in \nu g_{L_{j-1}} \widetilde{U}(l_t)$ und $p \in \nu g_{L_{j-1}} \widetilde{U}(l_{t+1})$. Ebenso gilt $p \in \nu g_{L_{j-1}}(e)$ und $\deg_{L_{j-1}}(p) = 2$ (Unterteilung), daher muss

$$\left[\widetilde{W}(l_s) = e \vee \widetilde{W}(l_{s+1}) = e\right] \wedge \left[\widetilde{U}(l_t) = e \vee \widetilde{U}(l_{t+1}) = e\right]$$

erfüllt sein. Aus Satz 5.10 (b), (c) ergibt sich für $A \in \{W, U\}$: $\operatorname{Bild} \widetilde{A} = \operatorname{Bild} A$ oder $\operatorname{Bild} \widetilde{A} = \operatorname{Bild} A \cup \{e\}$. Demnach gilt

$$\operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \emptyset \quad \text{oder} \quad \operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \{e\}. \tag{5.18}$$

O.B.d.A. seien $\widetilde{W}(l_s) = e = \widetilde{U}(l_t)$. Dann ist $\widetilde{W}(l_{s+1}) \neq e$, $\widetilde{U}(l_{t+1}) \neq e$ wegen der Injektivität von $\widetilde{W}$ und $\widetilde{U}$. Daher gilt $\widetilde{W}(l_{s+1}) \neq \widetilde{U}(l_{t+1})$ nach (5.18). Insgesamt folgt $e, \widetilde{W}(l_{s+1}), \widetilde{U}(l_{t+1}) \in \mathit{Inz}(p, L_{j-1})$, also $\deg_{L_{j-1}}(p) \geq 3$. Widerspruch! Daher tritt der Fall (5.17) nicht ein.

Es ist noch $\operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \emptyset$ zu zeigen. Wegen (5.18) genügt es $e \notin \operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U}$ nachzuweisen. Angenommen es gilt $e \in \operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U}$. In Satz 5.10 tritt dann einer der Fälle 2(b)i., 2(b)iii., 2(c) ein, also gilt $\widetilde{m} = m + 1$ und $\widetilde{n} = n + 1$. Man schließt:

$\exists\ s \in \{1, \ldots, \widetilde{m}\}$, $t \in \{1, \ldots, \widetilde{n}\}$ mit $\widetilde{U}(l_s) = e = \widetilde{W}(l_t)$

$$\Longrightarrow \{\widetilde{u}(s-1), \widetilde{u}(s)\} = g_{L_{j-1}}(\widetilde{U}(l_s)) = g_{L_{j-1}}(\widetilde{W}(l_t)) = \{\widetilde{w}(t), \widetilde{w}(t-1)\}$$
$$\Longrightarrow [\widetilde{u}(s-1) = \widetilde{w}(t-1) \wedge \widetilde{u}(s) = \widetilde{w}(t)] \vee [\widetilde{u}(s-1) = \widetilde{w}(t) \wedge \widetilde{u}(s) = \widetilde{w}(t-1)]$$
$$\overset{(5.16),(5.15)}{\Longrightarrow} [s = t = 1 \wedge (s = 0 = t \vee s = \widetilde{m}, t = \widetilde{n})] \vee [s = 1, t = 0 \wedge s = 0, t = 1]$$
$$\Longrightarrow s = t = \widetilde{m} = \widetilde{n} = 1 \Longrightarrow 1 = \widetilde{m} = m + 1 = \widetilde{n} = n + 1$$
$$\Longrightarrow m = n = 0. \text{ Widerspruch!}$$

Zu 1(c): Für $\widetilde{w}(i) = p$ gilt nach Voraussetzung $\deg_{L_{j-1}}(\widetilde{w}(i)) = 2$. Sei $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}-1\}$ und $\widetilde{w}(i) \neq p$. Nach Satz 5.10 (b), (c) gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\widetilde{w}(i) = w(k)$. Wegen (5.14) ist $k \notin \{0, n\}$. Der Weg (w, W) erfüllt 1(c), daher gilt $2 = \deg_{L_j}(w(k)) =: (*)$. Mithilfe von 4.13 auf Seite 84 ergibt sich:

- $w(k) \neq q : (*) = \deg_{L_{j-1}}(w(k)) = \deg_{L_{j-1}}(\widetilde{w}(i))$.
- $w(k) = q : (*) = \deg_{L_{j-1}}(w(k)) + \deg_{L_{j-1}}(p) - 2 = \deg_{L_{j-1}}(w(k)) = \deg_{L_{j-1}}(\widetilde{w}(i))$.

Ersetzt man $\widetilde{n}$ durch $\widetilde{m}$ und $\widetilde{w}$ durch $\widetilde{u}$, erhält man 1(c) für den Weg $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$.

Zu B): Zunächst sei $n = 1$. Dann ist $C(l_1) \in Sch\,(c(0), L_j)$. Nach 5.40 auf Seite 156 hat L_{j-1} eine Schlaufe oder Mehrfachkanten, so dass man für $m = n = 1$ einen Kreis gemäß 2. oder Wege gemäß 1. wählen kann.

Sei nun $n \geq 2$. Definiere Wege $(w, W) : J'_1 \to L_j$ und $(u, U) : J'_{n-1} \to L_j$ durch $w(0) := c(0)$, $w(1) := c(n-1)$, $W(l_1) := C(l_n)$ und $u(i) := c(i)$ für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $U(l_i) := C(l_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diese erfüllen 1(a), 1(b) und 1(c), denn (c, C) erfüllt 2., und man befindet sich im Fall A).

$\Longleftarrow$: Es trete 1. ein. Zunächst seien $m, n \geq 2$. Nach 5.26 auf Seite 138 lassen sich Spezielle injektive Abbildungen $i_u : V_2\,(J'_m) \to E_{J'_m}$ und $i_w : V_2(J'_n) \to E_{J'_n}$ wählen. Dabei seien l_s, l_t die eindeutig bestimmten Kanten, für die $l_s \notin \operatorname{Bild} i_u$ und $l_t \notin \operatorname{Bild} i_w$ gelten. Es gibt Ecken $r_k \in V_{J'_n}$, $1 \leq k \leq n-1$, und $t_k \in V_{J'_m}$, $1 \leq k \leq m-1$, so dass mit

$$x_k := (k, i_w(k), r_k)\,, \quad a_k := (w(k), W\,(i_w(k))\,, w(r_k)) \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\text{und} \quad y_k := (k, i_u(k), t_k), \quad b_k := (u(k), U\,(i_u(k))\,, u(t_k)) \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq m-1$$

die folgenden Graphen und induzierten Abbildungen

$$(\widetilde{w}, \widetilde{W}) : \mathcal{C}_{\lceil x_{n-1} \rceil}(J'_n) \to \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1} \rceil}(G), \quad (\widetilde{u}, \widetilde{U}) : \mathcal{C}_{\lceil y_{m-1} \rceil}(J'_m) \to \mathcal{C}_{\lceil b_{m-1} \rceil}(G)$$

gemäß Satz 4.16 auf Seite 86 durch (w, W) bzw. (u, U) gegeben sind. Nach Voraussetzung 1(b) gelten

$$\operatorname{Bild} w\big|_{\{1, \ldots, n-1\}} \cap \operatorname{Bild} u\big|_{\{1, \ldots, m-1\}} = \emptyset, \quad \operatorname{Bild} U \cap \operatorname{Bild} W = \emptyset. \tag{5.19}$$

Da $\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(G)$ definiert und Bild(w,W) ein Teilgraph von G ist, ist $\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(\text{Bild}(w,W))$ nach 5.28 auf Seite 143 definiert. Sei $H := \text{Bild}(w,W) \cup \text{Bild}(u,U) < G$. Dann gilt

$$L := \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(H) \overset{(5.19)\text{ und }4.9,\text{ S.79}}{=} \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(\text{Bild}(w,W)) \cup \text{Bild}(u,U) \overset{5.28}{<} \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(G)\,.$$

Nocheinmal (5.19), 4.9 und 5.28 anwenden ergibt

$$\mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}(L) = \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(\text{Bild}(w,W)) \cup \mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}(\text{Bild}(u,U)) < \mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(G)\big)\,.$$

Analog zeigt man, dass $\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}(G)\big)$ definiert ist. Nach 5.27 auf Seite 139 gilt dann

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}(G)\big) = \mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(G)\big)$$

durch Zusammensetzen der Spezeillen injektiven Abbildungen u_w und i_u. Gemäß 5.26 gelten

$$\mathcal{J}_n := \mathcal{C}_{\lceil x_{n-1}\rceil}(J'_n) = (\{0,n\},\{l_t\},g_{\mathcal{J}_n})\,,\quad \mathcal{J}_m := \mathcal{C}_{\lceil y_{m-1}\rceil}(J'_m) = (\{0,m\},\{l_s\},g_{\mathcal{J}_m}).$$

Wegen $\widetilde{W}(l_t) = W(l_t) \notin \text{Bild}\,U$ und $\widetilde{U}(l_s) = U(l_s) \notin \text{Bild}\,W$ lassen sich wegen Satz 4.17 auf Seite 87 die Homomorphismen

$$\Big(\hat{w},\widehat{W}\Big) : \mathcal{J}_n \to \mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}(G)\big)\,,\quad \widehat{w}(x) := \widetilde{w}(x),\quad \widehat{W}(x) := \widetilde{W}(x),$$

$$\Big(\widehat{u},\widehat{U}\Big) : \mathcal{J}_m \to \mathcal{C}_{\lceil a_{n-1}\rceil}\big(\mathcal{C}_{\lceil b_{m-1}\rceil}(G)\big)\,,\quad \widehat{u}(x) := \widetilde{u}(x),\quad \widehat{U}(x) := \widetilde{U}(x)$$

definieren. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\nu g_{\mathcal{C}}\widehat{W}(l_t) &= \mathcal{P}_2(\widehat{w})\nu g_{\mathcal{J}_n}(l_s) = \{\widehat{w}(0),\widehat{w}(n)\} = \{\widetilde{w}(0),\widetilde{w}(n)\} = \{w(0),w(n)\}\\ &= \{u(0),u(m)\} = \{\widetilde{u}(0),\widetilde{u}(m)\} = \{\widehat{u}(0),\widehat{u}(m)\} = \mathcal{P}_2(\widehat{u})\nu g_{\mathcal{J}_m} = \nu g_{\mathcal{C}}\widehat{U}(l_s).\end{aligned}$$

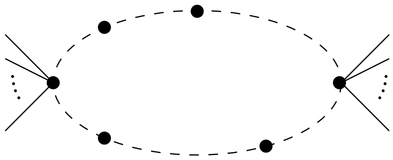
Daher sind die Kanten $\widehat{W}(l_t)$ und $\widehat{U}(l_s)$ Mehrfachkanten in $\mathcal{C}$. Nach Voraussetzung 1(c) ist $G \in sub(\mathcal{C})$ und somit nicht topologisch einfach.

Sofern entweder $m = 1$ oder $n = 1$ ist, führt man die Kontraktionen nur für den entsprechenden Weg durch und schließt genauso wie oben. Bis auf die Speziellen injektiven Abbildungen lässt sich der Beweis formal genauso für $m = 1$ oder $n = 1$ führen. Wenn $m = n = 1$ gilt, so sind $W(l_1)$ und $U(l_1)$ bereits Mehrfachkanten von G.

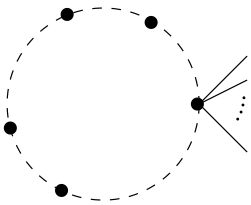
Tritt 2. ein kontrahiert man G, falls $n \geq 2$ ist, auf ähnliche Art zu einem Graphen, der eine Schlaufe besitzt. Für $n = 1$ ist $C(l_1)$ bereits eine Schlaufe in G. □

Bemerkung Die folgende Abbildung veranschaulicht die Bedingungen 1(a), 1(b), 1(c) sowie 2. aus Satz 5.41.

1. :



2. :



□

Satz 5.42 *Gegeben seien ein orientierter Graph $G = (V, E, g)$, $p, q \in V$ und $e \in E$, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist. Der Graph G ist topologisch einfach, wenn $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ es ist.*

Beweis Es sei G nicht topologisch einfach. Zu zeigen ist, dass $L := \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ nicht topologisch einfach ist. Es trete zunächst Erstens aus Satz 5.41 ein. Es seien also $(w, W) : J'_n \to G$ und $(u, U) : J'_m \to G$ Wege, die 1(a), 1(b) und 1(c) aus 5.41 erfüllen. In den folgenden Fällen werden jeweils Wege

$$\left(\widetilde{w}, \widetilde{W}\right) : J'_{\widetilde{n}} \to L, \quad \left(\widetilde{u}, \widetilde{U}\right) : J'_{\widetilde{m}} \to L \tag{5.20}$$

angegeben, die den Bedingungen 1(a), 1(b) und 1(c) oder 2. aus 5.41 genügen. Man beachte, dass wegen $\emptyset = \operatorname{Bild} W \cap \operatorname{Bild} U$ keine weiteren Fälle eintreten können.

1. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \notin \operatorname{Bild} w, \quad p \notin \operatorname{Bild} u.$
2. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \in \operatorname{Bild} w, \quad p \notin \operatorname{Bild} u.$
3. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u, \quad \emptyset = w^{-1}(q) = u^{-1}(q).$
4. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u, \quad [\emptyset \neq w^{-1}(q) \vee \emptyset \neq u^{-1}(q)].$
5. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \notin \operatorname{Bild} w, \quad p \in \operatorname{Bild} u.$
6. $e \in \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \notin \operatorname{Bild} u.$
7. $e \in \operatorname{Bild} W, \quad e \notin \operatorname{Bild} U, \quad p \in \operatorname{Bild} u.$
8. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \in \operatorname{Bild} U, \quad p \in \operatorname{Bild} w.$
9. $e \notin \operatorname{Bild} W, \quad e \in \operatorname{Bild} U, \quad p \notin \operatorname{Bild} w.$

In den folgenden Betrachtungen sei $(a, A, \alpha) \in \{(w, W, n), (u, U, m)\}$.

Zu 1.: Man definiert $\widetilde{n} := n$, $\widetilde{m} := m$ und die Wege in (5.20) mithilfe von Satz 4.17 auf Seite 87. Diese sind dann durch (w, W) bzw. (u, U) gegeben und injektiv. Daraus ergeben sich sofort 1(a) und 1(b) für $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$. Der Widerspruch (5.21) zeigt, dass $q \neq \widetilde{a}(i) = a(i)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, \widetilde{\alpha} - 1\}$ gilt.

$$\exists i \in \{1, \ldots, \widetilde{\alpha} - 1\} : q = \widetilde{a}(i) \Rightarrow e \in Inz\,(a(i), G) \overset{1(c)}{=} \{A(l_i), A(l_{i+1})\} \subset \operatorname{Bild} A. \tag{5.21}$$

Daher folgt $\deg_L \widetilde{a}(i) = \deg_G a(i) = 2$ für jedes $i \in \{1, \ldots, \widetilde{\alpha} - 1\}$ aus 4.13 auf Seite 84.

Zu 2. und 5.: Diese Fälle treten nicht ein. Der folgende Widerspruch in (5.22) zeigt, dass $p = a(0)$ oder $p = a(\alpha)$ gilt.

$$\exists i \in \{1, \ldots, \alpha - 1\} : p = a(i) \Rightarrow e \in Inz\,(a(i), G) \overset{1(c)}{=} \{A(l_i), A(l_{i+1})\} \subset \operatorname{Bild} A. \tag{5.22}$$

Somit gelten $p = w(0) = u(0)$ oder $p = w(n) = u(m)$, also $p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u$ im Widerspruch zur Voraussetzung aus 2. bzw. 5.

Zu 3.: Die Wege in (5.20) werden wie in 1. mittels Satz 4.17 definiert. Aus $p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u$ folgt $p = w(0) = u(0)$ oder $p = w(n) = u(m)$. Für $p = w(n) = u(m)$ gelten

$$\widetilde{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0), \quad \widetilde{w}(\widetilde{n}) = \widetilde{w}(n) \overset{\text{Satz 4.17}}{=} q \overset{\text{Satz 4.17}}{=} \widetilde{u}(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m}),$$

und für $p = w(0) = u(0)$ sind die Gleichungen

$$\widetilde{w}(0) \overset{\text{Satz 4.17}}{=} q \overset{\text{Satz 4.17}}{=} \widetilde{u}(0) \quad \text{und} \quad \widetilde{w}(\widetilde{n}) = w(n) = u(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m})$$

erfüllt. Daher gilt 1(a) für den Weg $(\widetilde{a}, \widetilde{A})$. Die folgenden Aussagen 10., 11. und 12. verifizieren 1(b) und 1(c) von Satz 5.41:

10. $\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} \subset ((\operatorname{Bild} w \cup \{q\}) \setminus \{p\}) \cap ((\operatorname{Bild} u \cup \{q\}) \setminus \{p\}) = \{w(0), w(n), q\} \setminus \{p\} = \{\widetilde{w}(0), \widetilde{w}(\widetilde{n})\}$.

11. $\operatorname{Bild} \widetilde{W} = \operatorname{Bild} W$, $\operatorname{Bild} \widetilde{U} = \operatorname{Bild} \widetilde{U} \;\Rightarrow\; \operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \emptyset$.

12. $\deg_L \widetilde{a}(i) = \deg_G a(i) = 2$ für jedes $i \in \{1, \ldots, \widetilde{\alpha} - 1\}$ ergibt sich wie in 1.

Zu 6.: Sei $e = W(l_{j+1})$ für ein $j+1 \in \{1, \ldots, n\}$. Da $e \in \operatorname{Bild} W$ ist, ist $p \in \operatorname{Bild} w$. Wegen $p \notin \operatorname{Bild} u$ gilt $n \geq 2$ und es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $w(i) = p$. Aus

$$\{p, q\} = \nu g(e) = \nu g W(l_{j+1}) = \{w(j), w(j+1)\}$$

folgt $p = w(j) \;\wedge\; q = w(j+1)$ oder $q = w(j) \;\wedge\; p = w(j+1)$. Es trete zunächst der Fall $p = w(j) \;\wedge\; q = w(j+1)$ ein. Man definiert $\widetilde{n} := n - 1 \geq 1$ und $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) : J'_{\widetilde{n}} \to L$ durch $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) := (\overline{w}, \overline{W}) \circ (\phi_j, \Phi_j)$, wobei $(\overline{w}, \overline{W}) : \mathcal{C}_{j,l_{j+1},j+1}(J'_n) \to L$ die durch (w, W) induzierte Abbildung aus Satz 4.16 auf Seite 86 und (ϕ_j, Φ_j) der Isomorphismus aus Lemma 5.5 auf

Seite 117 ist. Der Weg $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ aus (5.20) wird wie in 1. definiert, da e nicht im Bild von U enthalten ist. Damit ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und wegen $q = w(j+1) \notin \operatorname{Bild} u$ und Satz 4.17 auf Seite 87 auch $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ injektiv. Es gelten:

13. $\widetilde{w}(0) = \overline{w}\phi_j(0) \overset{j \geq 0}{=} \overline{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0)$,
 $\widetilde{w}(\widetilde{n}) = \overline{w}\phi_j(n-1) = \overline{w}(n) = w(n) = u(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m})$.

14. $\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} = \operatorname{Bild} \overline{w}\phi_j \cap \operatorname{Bild} u \subset \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u = \{w(0), w(n)\} = \{\widetilde{w}(0), \widetilde{w}(\widetilde{n})\}$.

15. $\operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \operatorname{Bild} \overline{W}\Phi_j \cap \operatorname{Bild} U \subset \operatorname{Bild} W \cap \operatorname{Bild} U = \emptyset$.

16. Sei $\widetilde{n} \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}-1\}$. Es folgt $\phi_j(i) \in \{1, \ldots, n-1\}$. Für $\widetilde{w}(i) \neq q$ gilt $\deg_L \widetilde{w}(i) \overset{4.13}{=} \deg_G \widetilde{w}(i) = \deg_G \overline{w}\phi_j(i) = \deg_G w(\phi_j(i)) = 2$. Für $\widetilde{w}(i) = q$ rechnet man $\deg_L \widetilde{w}(i) = \deg_G \widetilde{w}(i) + \deg_G p - 2 = \deg_G w(\phi_j(i)) + \deg_G w(j) - 2 = 2$.

17. Die Gradbedingungen 1(c) aus Satz 5.41 für $\widetilde{u}$ folgen wie in 12.

Aussage 13. liefert 1(a), 1(b) ergibt sich aus 13. zusammen mit 14. sowie 15., und 1(c) folgt aus 16. und 17.

Nun trete $q = w(j) \wedge p = w(j+1)$ ein. Hier gilt also $j \in \{0, \ldots, n-2\}$. Man definiert $\widetilde{n} := n - 1 \geq 1$ und $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) := (\overline{w}, \overline{W}) \circ (\delta, \Delta) \circ (\phi_j, \Phi_j)$. Dabei seien $(\overline{w}, \overline{W})$ und (ϕ_j, Φ_j) die Abbildungen von oben und $(\delta, \Delta) : \mathcal{C}_{j,l_{j+1},j+1}(J'_n) \to \mathcal{C}_{j+1,l_{j+1},j}(J'_n)$ der Isomorphismus aus Satz 4.2 auf Seite 74. Die Abbildung $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ sei wie in 1. gegeben. Damit ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und wegen $p = w(j+1) \notin \operatorname{Bild} u$ und Satz 4.17 auf Seite 87 auch $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ injektiv. Es gelten

18. Für $j = 0\ :\ \widetilde{w}(0) = \overline{w}\delta\phi_j(0) = \overline{w}\delta(1) = \overline{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0)$.

19. Für $j > 0\ :\ \widetilde{w}(0) = \overline{w}\delta\phi_j(0) = \overline{w}\delta(0) = \overline{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0)$.

20. $\widetilde{w}(\widetilde{n}) = \overline{w}\delta\phi_j(n-1) = \overline{w}\delta(n) \overset{j<n-1}{=} \overline{w}(n) = w(n) = u(m) = \widetilde{u}(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m})$.

Wegen $\operatorname{Bild} \widetilde{w} = \operatorname{Bild} \overline{w}\delta\phi_j \subset \operatorname{Bild} w$ und $\operatorname{Bild} \widetilde{W} = \operatorname{Bild} \overline{W}\Delta\Phi_j \subset \operatorname{Bild} W$ ergeben sich zu 14. und 15. analoge Aussagen. Für $\widetilde{n} \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}-1\}$ gilt $\delta\phi_j(i) \in \{1, \ldots, n-1\}$, denn $j \leq n-2$. Also ergibt sich eine zu 16. analoge Aussage. Insgesamt folgen 1(a), 1(b) und 1(c).

Zu 7.: Der Weg $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ wird wie in 1. definiert. Zunächst gelte $n \geq 2$. Wegen $p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u$ gilt $p = w(0) = u(0)$ oder $p = w(n) = u(m)$. Sei zunächst $p = w(0) = u(0)$. Sei $e = W(l_j)$. Daraus ergibt sich $\{p, q\} = g(e) = \{w(j-1), w(j)\}$. Daher müssen $j = 1$ und $w(1) = q$ gelten. Definiere nun $\widetilde{n} := n - 1 \geq 1$ sowie $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) := (\overline{w}, \overline{W}) \circ (\phi_0, \Phi_0)$, wo

$(\overline{w}, \overline{W}) : \mathcal{C}_{0,l_1,1}(J'_n) \to L$ durch (w, W) gegeben und (ϕ_0, Φ_0) der Isomorphismus aus 5.5 ist. Damit ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und wegen $q = w(1) \notin \operatorname{Bild} u$ und Satz 4.17 auf Seite 87 auch $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ injektiv. Dann gelten:

21. $\widetilde{w}(0) = \overline{w}\phi_0(0) = \overline{w}(1) = w(1) = q \overset{\text{Satz 4.17}}{=} \widetilde{u}(0)$,
    $\widetilde{w}(\widetilde{n}) = \widetilde{w}(n-1) = \overline{w}\phi_0(n-1) = w(n) = u(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m})$.

22. $\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} \subset \operatorname{Bild} w \cap ((\operatorname{Bild} u \cup \{q\}) \setminus \{p\}) = \{w(0), w(n), w(1)\} \setminus \{w(0)\} = \{w(1), w(n)\} = \{\widetilde{w}(0), \widetilde{w}(\widetilde{n})\}$.

23. $\operatorname{Bild} \widetilde{W} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{U} = \operatorname{Bild} \overline{W}\Phi_0 \cap \operatorname{Bild} U \subset \operatorname{Bild} W \cap \operatorname{Bild} U = \emptyset$.

24. Sei $\widetilde{n} \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}-1\}$. Dann gilt $\phi_0(i) \in \{1, \ldots, n-1\}$. Außerdem gilt $\widetilde{w}(i) \neq q$, denn andernfalls ergibt sich $w(1) = q = \widetilde{w}(i) = \overline{w}\phi_0(i) = w\phi_0(i) \Rightarrow 1 = \phi_0(i) \Rightarrow i = 0$. Widerspruch! Man berechnet daher $\deg_L \widetilde{w}(i) = \deg_G \widetilde{w}(i) = \deg_G w\,(\phi_0(i)) = 2$.

25. Für $\widetilde{u}$ gelten die Gradbedingungen 1(c) aus Satz 5.41 wie in 12.

Demnach gelten 1(a), 1(b) und 1(c) für die Wege $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$.

Sei nun $p = w(n) = u(m)$. Es folgt $e = W(l_n)$ und $q = w(n-1)$. In

$$J'_{n-1} \xrightarrow{(\phi_{n-1},\Phi_{n-1})} \mathcal{C}_{n-1,l_n,n}(J'_n) \xrightarrow{(\delta,\Delta)} \mathcal{C}_{n,l_n,n-1}(J'_n) \xrightarrow{(\overline{w},\overline{W})} L$$

seien (ϕ_{n-1}, Φ_{n-1}) der Isomorphismus aus 5.5, (δ, Δ) der Isomorphismus aus 4.2 auf Seite 74 und $(\overline{w}, \overline{W})$ die durch (w, W) gegebene induzierte Abbildung aus 4.16. Definiere $(\widetilde{w}, \widetilde{W}) := (\overline{w}, \overline{W}) \circ (\delta, \Delta) \circ (\phi_{n-1}, \Phi_{n-1})$ sowie $\widetilde{n} := n-1$ und $\widetilde{m} := m$. Der Weg $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ wird wie in 1. festgelegt. Damit ist $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und wegen $q = w(n-1) \notin \operatorname{Bild} u$ und Satz 4.17 auf Seite 87 auch $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ injektiv. Dann gelten

26. $\widetilde{w}(0) = \overline{w}\delta\phi_{n-1}(0) = \overline{w}\delta(0) = \overline{w}(0) = w(0) = u(0) = \widetilde{u}(0)$,
    $\widetilde{w}(\widetilde{n}) = \overline{w}\delta\phi_{n-1}(n-1) = \overline{w}\delta(n) = \overline{w}(n-1) = w(n-1) = q = \widetilde{u}(m) = \widetilde{u}(\widetilde{m})$.

27. $\operatorname{Bild} \widetilde{w} \cap \operatorname{Bild} \widetilde{u} \subset \operatorname{Bild} w \cap ((\operatorname{Bild} u \cup \{q\}) \setminus \{p\}) = \{w(0), w(n), w(n-1)\} \setminus \{w(n)\} = \{w(0), w(n-1)\} \overset{26}{=} \{\widetilde{w}(0), \widetilde{w}(\widetilde{n})\}$.

28. Sei $\widetilde{n} \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, \widetilde{n}-1\}$. Dann gilt $\delta\phi_{n-1}(i) \in \{1, \ldots, n-1\}$, denn $n \geq 2$. Außerdem gilt $\widetilde{w}(i) \neq q$, denn andernfalls ergibt sich $w(n-1) = q = \widetilde{w}(i) = \overline{w}\delta\phi_{n-1}(i) = w\delta(i) \Rightarrow n-1 = \delta(i) \Rightarrow i = n$. Widerspruch! Man berechnet daher $\deg_L \widetilde{w}(i) = \deg_G \widetilde{w}(i) = \deg_G w\,(\delta\phi_{n-1}(i)) = 2$.

So erhält man 1(a), 1(b) und 1(c) auch in diesem Fall für die Wege $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$ und $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$.

Nun trete der Fall $n = 1$ ein. Man wendet Satz 5.8 auf Seite 121 auf (u, U) an. Der Ausdruck $\min\{m, 0\}$ ist hier gleich Null. Daher ergibt sich ein Kreis $(\widetilde{u}, \widetilde{U}) : J'_m \to L$ mit $\widetilde{u}(i) = \psi(p, q, V_G)\,(u(i))$. Falls $m \geq 2$ ist, erhhält man $\widetilde{u}(i) = u(i)$ für $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, denn es gilt $\{p, q\} = \{w(0), w(1)\} = \{u(0), u(m)\}$. Daher erfüllt $\widetilde{u}$ die Bedingung aus 2. in Satz 5.38.

Zu 4.: Aus $p \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u$ folgt $p = w(0) = u(0)$ oder $p = w(n) = u(m)$. Man betrachtet folgende Äquivalenzen:

$$w^{-1}(q) \neq \emptyset \overset{(*1)}{\Leftrightarrow} [w(0) = q \vee w(n) = q] \overset{(*2)}{\Leftrightarrow} [u(0) = q \vee u(m) = q] \overset{(*3)}{\Leftrightarrow} u^{-1}(q) = \emptyset. \quad (5.23)$$

Ersetzt man p durch q in (5.22) ergeben sich $(*1)$ und $(*3)$. Aus der Voraussetzung 1(a) an die Wege (w, W), (u, U) folgt $(*2)$. Aus (5.23) und der Voraussetzung von 4. folgt, dass es Indizes i und j gibt, für die $w(i) = u(j) = q$ gilt. Da $p \neq q$ ist, tritt also entweder $p = w(0) = u(0) \ \wedge\ q = w(n) = u(m)$ oder $p = w(n) = u(m) \ \wedge\ q = w(0) = u(0)$ ein. Wegen $e \notin \operatorname{Bild} W$ und $e \notin \operatorname{Bild} U$ liefert Satz 5.8 auf Seite 121 Kreise $(\widetilde{a}, \widetilde{A}) : J'_\alpha \to L$ mit $\widetilde{a}(i) = \psi(p, q, V_G)\,(a(i))$. Falls $\alpha \geq 2$ ist, erhält man $\widetilde{a}(i) = a(i)$ für $i \in \{1, \ldots, \alpha - 1\}$, denn es gilt $\{p, q\} = \{a(0), a(\alpha)\}$. Daher erfüllt $\widetilde{a}$ die Bedingung aus 2. in Satz 5.38.

Zu 8. und 9.: Diese Fälle ergeben sich aus 6. und 7., indem man die Rollen der Wege (w, W) und (u, U) vertauscht.

Nun trete Zweitens aus Satz 5.41 ein. Sei $(c, C) : J'_n \to G$ ein Kreis, der die Gradbedingungen in Satz 5.41.2. erfüllt. Man betrachtet die folgenden Fälle:

29. $e \notin \operatorname{Bild} C$ und $p \notin \operatorname{Bild} c$
30. $e \notin \operatorname{Bild} C$ und $p \in \operatorname{Bild} c$.
31. $e \in \operatorname{Bild} C$ und $p \in \operatorname{Bild} c$.

Zu 29.: Satz 5.9 auf Seite 122 liefert einen Kreis $(\widetilde{c}, \widetilde{C}) : J'_n \to L$. Es gilt hier $c^{-1}(p) = \emptyset$, also $\widetilde{c}(i) = c(i)$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ nach der Definition in Satz 5.9. Falls $n \geq 2$ gilt, erhält man zusammen mit der Gradbedingung aus Satz 5.41.2. an den Kreis (c, C) wie in (5.21) die Aussage $\widetilde{c}(i) \neq q$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Daher gilt $\deg_L \widetilde{c}(i) \overset{4.13}{=} \deg_G c(i) = 2$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Zu 30.: Zunächst wird gezeigt, dass $c^{-1}(q) = \emptyset$ gilt. Angenommen es gibt ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ mit $c(i) = q$:

32. $i \in \{0, n\} : q = c(i) \neq p \overset{c(0)=c(n)}{\Longrightarrow} \exists j \in \{1, \ldots, n-1\} : c(j) = p \ \Rightarrow\ e \in Inz(c(j), G) = \{C(l_j), C(l_{j+1})\} \ \Rightarrow\ e \in \operatorname{Bild} C$. Widerspruch!

33. $i \in \{1,\ldots,n-1\} : e \in Inz(q,G) = Inz(c(i),G) = \{C(l_i), C(l_{i+1})\} \Rightarrow e \in \operatorname{Bild} C$. Widerspruch!

Der Satz 5.9 liefert somit einen Kreis $(\widetilde{c}, \widetilde{C}) : J'_n \to L$, der die Gradbedingung erfüllt, denn für $n \geq 2$ und $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ gelten:

34. $\widetilde{c}(i) = q : c^{-1}(q) = \emptyset \overset{5.9}{\Rightarrow} c(i) = p \Rightarrow e \in Inz(c(i),G) \subset \operatorname{Bild} C$. Widerspruch!

35. $\widetilde{c}(i) \neq q : c^{-1}(q) = \emptyset \overset{5.9}{\Rightarrow} i \notin c^{-1}(p) \Rightarrow \deg_L \widetilde{c}(i) \overset{4.13}{=} \deg_G \widetilde{c}(i) = \deg_G c(i) = 2$.

Zu 31.: Aus $n = 1$ folgt $p = q$, daher tritt dieser Fall nicht ein. Sei also $n \geq 2$. Satz 5.6 auf Seite 119 liefert einen Kreis $(k,K) : J'_{n-1} \to L$. Zum Nachweis der Gradbedingung 2. aus 5.41 sind verschiedene Fälle zu untersuchen. Dazu trete der Fall $n-1 \geq 2$ ein.

36. $p = c(0), q = c(1)$. Es tritt der erste Fall in Satz 5.6 ein, so dass für $(k,K) = (\widetilde{c}, \widetilde{C}) \circ (\phi_0, \Phi_0)$ gilt: $k(i) = q \Leftrightarrow q = \psi(p,q,V)c\phi_0(i) \Leftrightarrow c\phi_0(i) = p \;\vee\; c\phi_0(i) = q \Leftrightarrow \phi_0(i) = 0 \;\vee\; \phi_0(i) = n \;\vee\; \phi_0(i) = 1 \Leftrightarrow i \in \{n-1, 0\}$. Man berechnet für $i \in \{1,\ldots,n-2\} : \deg_L k(i) \overset{\text{Satz 4.13}}{=} \deg_G k(i) \overset{p=c(0)}{=} \deg c\phi_0(i) = 2$, denn $\phi_0(i) \in \{2,\ldots,n-1\}$.

37. $p = c(n), q = c(n-1)$. Es tritt der zweite Fall aus Satz 5.6 ein. Gemäß den dort verwendeten Bezeichnungen sei $(k,K) = (\widetilde{d}, \widetilde{D}) \circ (\phi_0, \Phi_0)$. Wie in 36. erhält man die folgende Äquivalenz: $k(i) = q \Leftrightarrow q = \psi(p,q,V)\widetilde{d}\phi_0(i) = \psi(p,q,V)c\delta_n\phi_0(i) \Leftrightarrow [c\delta_n\phi_0(i) = q] \vee [c\delta_n\phi_0(i) = p] \Leftrightarrow [n-\phi_0(i) = n-1] \vee [n-\phi_0(i) = n] \vee [n-\phi_0(i) = 0] \Leftrightarrow i \in \{0, n-1\}$. Deshalb errechnet man für $i \in \{1,\ldots,n-2\} : \deg_L k(i) \overset{\text{Satz 4.13}}{=} \deg_G k(i) \overset{p=c(n)}{=} \deg_G c\delta_n\phi_0(i) = 2$, denn $\delta_n\phi_0(i) \in \{1,\ldots,n-1\}$.

38. $j \in \{1,\ldots,n-1\} \;\wedge\; p = c(j)$. Aus $i \in \{1,\ldots,n-2\}$ folgt $\phi_j(i) \in \{1,\ldots,n-1\}$. Wegen $\deg_G c(j) = \deg_G p = 2$ läßt sich Satz 4.13 wie folgt anwenden:
$$\deg_L k(i) \overset{\text{Satz 4.13}}{=} \deg_G k(i) = \begin{cases} \deg_G c\phi_j(i) = 2 & : \quad 1.\ \text{aus Satz 5.6} \\ \deg_G c(n-\phi_j(i)) = 2 & : \quad 2.\ \text{aus Satz 5.6} \end{cases}.$$

□

Satz 5.43 *Vorgelegt sei ein orientierter Graph G, Ecken p, q und eine Kante e von G, so dass $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist. Gegeben seien Wege (w,W) und (u,U) nach $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$, die die Bedingungen 1(a), 1(b) und 1(c) aus Satz 5.41 erfüllen. Dann gelten:*

1. $\deg_G q = 2$ *oder* $\deg_G p = 2 \Rightarrow G$ *ist nicht topologisch einfach.*

2. $\deg_G p = 1$ *und* $q \notin (\mathit{Bild}\, w \cup \mathit{Bild}\, u) \setminus (\mathit{Bild}\, w \cap \mathit{Bild}\, u) \;\Rightarrow\;$ *G ist nicht topologisch einfach.*

3. $\deg_G q = 1$ *und* $q \notin (\mathit{Bild}\, w \cup \mathit{Bild}\, u) \setminus (\mathit{Bild}\, w \cap \mathit{Bild}\, u) \;\Rightarrow\;$ *G ist nicht topologisch einfach.*

4. $q \notin \mathit{Bild}\, w \cup \mathit{Bild}\, u \;\Rightarrow\;$ *G ist nicht topologisch einfach.*

5. $q \in (\mathit{Bild}\, w \cup \mathit{Bild}\, u) \setminus (\mathit{Bild}\, w \cap \mathit{Bild}\, u)\, , \deg_G q \geq 2$ *und* $\deg_G p \geq 2 \;\Rightarrow\;$ *G ist nicht topologisch einfach.*

6. $\deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} q \leq 3$ *und* $q \in \mathit{Bild}\, w \cap \mathit{Bild}\, u \;\Rightarrow\;$ *G ist nicht topologisch einfach.*

Beweis **Zu 1.:** Gilt $\deg_G p = 2$, so lassen sich wie in 'Zu A)' im Beweis des Satzes 5.41 die entsprechenden Wege / der entsprechende Kreis konstruieren, so dass 1. bzw. 2. aus Satz 5.41 erfüllt wird. Tritt der Fall $\deg_G q = 2$ und $\deg_G p \neq 2$ ein, so zieht man den Isomorphismus $(\delta, \Delta) : \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \to \mathcal{C}_{q,e,p}(G)$ aus Satz 4.2 auf Seite 74 heran. Dann sind $(\delta, \Delta) \circ (w, W)$ und $(\delta, \Delta) \circ (u, U)$ Wege, die 1. aus Satz 5.41 erfüllen. Daher ist auch $C_{q,e,p}(G)$ nicht topologisch einfach. Nun kann man wie im Fall $\deg_G p = 2$ vorgehen.

Zu 2.: Sei W der orientierte Teilraph von G, der aus den Ecken p,q und der Kante e besteht. Dann gilt $G = \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \cup W$ (siehe Abbildung (a) in der Bemerkung auf Seite 168). Sei $v \in (\mathrm{Bild}\, w \cup \mathrm{Bild}\, u) \setminus (\mathrm{Bild}\, w \cap \mathrm{Bild}\, u)$. Satz 4.7 auf Seite 76 liefert

$$\deg_G v = \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} v + \deg_W v - \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G) \cap W} v \overset{v \neq q}{=} \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} v = 2.$$

Also sind (w, W) und (u, U) Wege nach G, die die Bedingungen 1(a), 1(b) und 1(c) aus Satz 5.41 erfüllen.

Zu 3.: Sei $(\delta, \Delta) : \mathcal{C}_{p,e,q}(G) \to \mathcal{C}_{q,e,p}(G)$ der Isomorphismus aus 4.2, $(w', W') := (\delta, \Delta) \circ (w, W)$ und $(u', U') := (\delta, \Delta) \circ (u, U)$. Aus der Voraussetzung ergibt sich

$$p = \delta(q) \notin \delta\left((\mathrm{Bild}\, w \cup \mathrm{Bild}\, u) \setminus (\mathrm{Bild}\, w \cap \mathrm{Bild}\, u)\right) = \left(\mathrm{Bild}\, w' \cup \mathrm{Bild}\, u'\right) \setminus \left(\mathrm{Bild}\, w' \cap \mathrm{Bild}\, u'\right).$$

Daher lässt sich 2. auf (w', W') und (u', U') anwenden.

Zu 4.: Man kann 1. aus Satz 5.10 auf Seite 123 anwenden. Die so hochgehobenen Wege $(\widetilde{w}, \widetilde{W})$, $(\widetilde{u}, \widetilde{U})$ genügen den Bedingungen 1(a), 1(b) und 1(c) aus Satz 5.41, da sie durch (w, W) bzw. (u, U) gegeben sind.

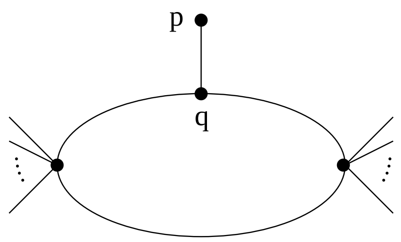
Zu 5.: Es gilt: $2 \overset{1(c)}{=} \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} q \overset{\text{Satz 4.13}}{=} \deg_G q + \deg_G p - 2 \;\Rightarrow\; 2 \leq \deg_G q = 4 - \deg_G p \leq 4 - 2 = 2$. Mit 1. folgt die Behauptung.

Zu 6.: Zunächst gilt $\deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} q \geq 2$ wegen $q \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u$ und $\operatorname{Bild} W \cap \operatorname{Bild} U = \emptyset$. Man errechnet $3 \geq \deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)} q = \deg_G p + \deg_G q - 2 \geq 2$. Daraus folgt $5 \geq \deg_G p + \deg_G q \geq 4$. Gilt $\deg_G p = 1$ oder $\deg_G q = 1$, folgt die Behauptung aus 2. bzw. 3. Andernfalls ist die Ungleichung nur durch $\deg_G p, \deg_G q \in \{2, 3\}$ erfüllbar. In diesen Fällen ergibt sich die Bauptung aus 1. □

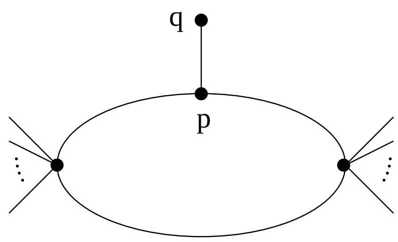
Bemerkung Die untenstehenden Abbildungen erläutern einige Fälle aus Satz 5.43.

(a) Folgende Situationen treten in 2. bzw. 3. nicht auf.

2. :

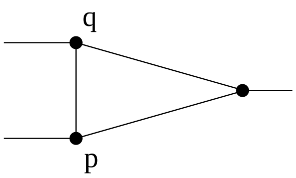


3. :

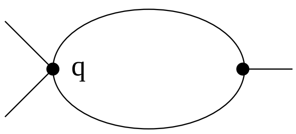


(b) Die Rückrichtung in 6. gilt i.a. nicht, falls der Grad von q in $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ z.B. 4 ist.

G :



$\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$:



□

Satz 5.44 *Es sei $(c, C) : J'_n \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ ein Kreis, der Zweitens aus Satz 5.41 erfüllt. Dann ist G nicht topologisch einfach.*

Beweis Für $\deg_G p = 2$ oder $\deg_G q = 2$ wird wie in 1. aus Satz 5.43 geschlossen: Man geht wie in 'Zu B)' aus Satz 5.41 vor und benutzt gegebenenfalls einen Isomorphismus gemäß Satz 4.2 auf Seite 74. Nun trete der Fall $\deg_G p \neq 2$ und $\deg_G q \neq 2$ ein. Seien $H := \operatorname{Bild}(c, C)$ und $(i, I) : H \to \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ die Inklusion. Es soll der Satz 4.18 auf Seite 88 zur Anwendung kommen. Dazu müssen die dort auftretenden Fälle der Reihe nach betrachtet werden:

Zu Fall A: $q \notin \operatorname{Bild} i = \operatorname{Bild} i \circ c$. Die Abbildung $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) \circ (c, C)$ ist offensichtlich ein Kreis, da auch $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I})$ eine Inklusion ist.

Zu Fall B: $q \in \operatorname{Bild} i = \operatorname{Bild} i \circ c$. Aus $\deg_G q \neq 2$ und der Voraussetzung 2. aus Satz 5.41 auf Seite 157 an den Kreis (c, C) folgt $q = c(0) = c(n)$. Für $n = 1$ ist H eine Schlaufe, daher liefert Satz 5.40 auf Seite 156 die Behauptung. Sei also $n \geq 2$. Es gilt dann $Inz(q, H) = \{C(l_1), C(l_n)\}$, da (c, C) ein Homomorphismus und (i, I) eine Inklusion ist. Im Fall B 1. ist $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) \circ (c, C)$ wie in Fall A ein Kreis. Im Fall B 2. gelten $\operatorname{Bild} \widetilde{\imath} c\big|_{\{1, \ldots, n-1\}} =$

$\operatorname{Bild} i\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}$ und $\widetilde{\imath}c(0) = \widetilde{\imath}(q) = p = \widetilde{\imath}c(n)$, daher ist $(\widetilde{\imath}, \widetilde{I}) \circ (c, C)$ ein Kreis, der Zweitens aus Satz 5.41 erfüllt.

In Fall B 3. wird der Graph K durch $E_K := E_H \cup \{e\}$ und $V_K := V_H \cup \{p\}$ gegeben. Es seien o.B.d.A. $M_q^q(i, I) = \{C(l_1)\}$ und $M_p^q(i, I) = \{C(l_n)\}$. Nach Satz 4.18 auf Seite 88 (a) ist $K < G$. Man definiert Abbildungen $(w, W) : J'_1 \to G$ und $(u, U) : J'_n \to G$ durch $w(0) := q$, $w(1) := p$, $W(l_1) := e$, $U(l_i) := C(l_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie

$$u(i) := \begin{cases} c(i) & : \quad i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ p & : \quad i = n \end{cases} .$$

Zu zeigen ist, dass (w, W) und (u, U) Wege sind, die Erstens aus 5.41 erfüllen. Zunächst sind die beteiligten Abbildungen wegen $p \notin \operatorname{Bild} c$ und $p \neq q$ injektiv. Wegen $\nu g_K(e) = \{p, q\} = \nu g_G(e)$ ist (w, W) ein Homomorphismus. Die folgenden Fälle zeigen, dass (u, U) ebenfalls ein Homomorphismus ist:

- $C(l_i) \in E_H \setminus \{C(l_n)\} : \nu g_G U(l_i) = \nu g_K(C(l_i)) = \nu g_H(C(l_i)) = \{c(i-1), c(i)\} \stackrel{i \neq n}{=} \mathcal{P}_2(u)\left(\{i-1, i\}\right) = \mathcal{P}_2(u) \nu g_{J'_n}(l_i)$.

- $C(l_i) = C(l_n)$:

$$\begin{aligned} \nu g_G U(l_n) &= \nu g_K\left(C(l_n)\right) = \mathcal{P}_2\left(\psi(q, p, V_K)\right) \nu g_H\left(C(l_n)\right) \\ &= \mathcal{P}_2\left(\psi(q, p, V_K)\right)\left(\{c(n), c(n-1)\}\right) \stackrel{q=c(n)}{=} \{c(n-1), p\} \\ &= \{u(n-1), u(n)\} = \mathcal{P}_2(u) \nu g_{J'_n}(l_n). \end{aligned}$$

Nun müssen 1(a), 1(b) und 1(c) aus Satz 5.41 geprüft werden. Der Weg (w, W) hat außer $w(0)$ und $w(1)$ keine weiteren Ecken, daher muss 1(c) nur für (u, U) verifiziert werden, sofern $n \geq 2$ gilt: $\deg_G u(i) = \deg_G c(i) = 2$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Die Bedingungen aus 1(a) und 1(b) sind wegen $e \notin \operatorname{Bild} U$, $\operatorname{Bild} w = \{w(0), w(1)\}$ und $w(0) = q = c(0) = u(0)$, $w(1) = p = u(n)$ erfüllt. □

Korollar 5.45 *Es sei H ein trivalenter Graph, der aus G durch Kontraktion einer Kante hervorgeht. Der Graph G ist genau dann topologisch einfach, wenn H es ist.*

Beweis **$\Leftarrow$:** Satz 5.42 auf Seite 161.

$\Rightarrow$: Sei $H = \mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ nicht topologisch einfach. Dann gibt es nach Satz 5.41 auf Seite 157 einen Kreis wie in Satz 5.44 auf Seite 168 oder Wege (w, W), (u, U) wie in Satz 5.43 auf Seite 166. Im ersten Fall folgt die Behauptung aus Satz 5.44. Im zweiten Fall betrachtet man die folgende Fallunterscheidung:

1. $q \in \operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u \overset{5.43.6.}{\Rightarrow} G$ nicht topologisch einfach.

2. $q \notin \operatorname{Bild} w \cup \operatorname{Bild} u \overset{5.43.4.}{\Rightarrow} G$ nicht topologisch einfach.

3. $q \in (\operatorname{Bild} w \cup \operatorname{Bild} u) \setminus (\operatorname{Bild} w \cap \operatorname{Bild} u) \;\Rightarrow\; \deg_H q = 2$. Widerspruch! □

Korollar 5.46 *Der Graph H gehe aus G durch Kontraktion an einer in G zweiwertigen Ecke hervor. Dann ist G genau dann topologisch einfach, wenn H es ist.*

Beweis **⇐:** Satz 5.42 auf Seite 161. **⇒:** Satz 5.43.1. auf Seite 166 und Satz 5.44 auf Seite 168 □

5.5 Topologisch 3-zusammenhängende Graphen

Hier wird ein zu Korollar 5.46 analoges Resultat für topologisch 3-zusammenhängende Graphen bewiesen. Dies findet sich in Satz 5.49 auf Seite 171.

Definition 5.47 *[23] Ein Graph G heißt* **topologisch 3-zusammenhängend**, *wenn es einen 3-zusammenhängenden Graphen H gibt, so dass gilt: $G = H$ oder $G \in sub(H)$.*

Bemerkung Offenbar ist ein orientierter Graph genau dann topologisch 3-zusammenhängend, wenn es der zugrundeliegende nicht-orientierte Graph ist, denn sowohl Definition 5.22 auf Seite 135 als auch Definition 5.15 auf Seite 131 hängen nicht davon ab, ob der Graph orientiert ist. □

Satz 5.48 *Sei $G = (V, E, g)$ ein topologisch 3-zusammenhängender Graph, für den $V_2(G) \neq \emptyset$ gilt. Dann gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(G) \to E$ sowie Ecken $q_1, \ldots, q_n$ von G, so dass mit $x_j := (p_j, i(p_j), q_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ 3-zusammenhängend ist. Dabei seien $p_1, \ldots, p_n$ die Elemente von $V_2(G)$.*

Beweis Wegen $V_2(G) \neq \emptyset$ ist G nach Satz 5.21 auf Seite 134 nicht 3-zusammenhängend. Definitionsgemäß gibt es einen Graphen H mit $G \in sub(H)$, so dass H 3-zusammenhängend ist. Seien $y_j := \left(p'_j, z'_j, q'_j\right) \in V_2(G) \times E \times V$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $H = \mathcal{C}_{\lceil y_m \rceil}(G)$ gilt. Es wird zunächst gezeigt, dass $V_2(G) = \{p'_1, \ldots, p'_m\}$ gilt. Die Inklusion $\supset$ ist klar nach Definition der p'_j.
⊂: Angenommen es gibt ein $x \in V_2(G) \setminus \{p'_1, \ldots, p'_m\}$. Dann gilt $x \in V \setminus \{p'_1, \ldots, p'_m\} \overset{5.23,\ \text{S.}136}{=} V_H$. Für jedes $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt:

$$\deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(p'_s) = 2 \quad \text{für alle} \quad s \geq i + 1. \tag{5.24}$$

Zu (5.24): Für $\boldsymbol{i = 0}$ gilt $\deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_0 \rceil}(G)}(p'_s) = \deg_G(p'_s) = 2$ für jedes $s \in \{1, \ldots, m\}$ nach Definition der p'_i.

$\boldsymbol{i \mapsto i+1}$ **:** Sei $s \geq i+2$. Man berechnet:

$$\deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_{i+1} \rceil}(G)}(p'_s) = \begin{cases} \deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(p'_s) & : \quad p'_s \neq q'_{i+1} \\ \deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(p'_s) + \deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(p'_{i+1}) - 2 & : \quad p'_s = q'_{i+1} \end{cases}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} \deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(p'_s) \overset{\text{IV}}{=} 2.$$

Also gilt $\deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}(v) = \deg_{\mathcal{C}_{\lceil y_{i-1} \rceil}(G)}(v)$ für jedes $v \in V_{\mathcal{C}_{\lceil y_i \rceil}(G)}$ und jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. Daraus ergibt sich $\deg_H(x) = \deg_G(x) = 2$, denn $x \in V_2(G)$. Somit gilt $x \in V_2(H)$. Dies ist nach Satz 5.21 ein Widerspruch zum 3-Zusammenhang von H. Damit ist $V_2(G) = \{p'_1, \ldots, p'_m\}$ bewiesen.

Insgesamt liefert nun Satz 5.34 auf Seite 150 eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(G) \to E$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil y_m \rceil}(G) = H$ gilt. □

Satz 5.49 *Sei G ein Graph und $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ eine (p, e, q)-Kontraktion mit $\deg_G p = 2$. Dann ist G genau dann topologisch 3-zusammenhängend, wenn $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ es ist.*

Beweis Der Beweis wird für nicht-orientierte Graphen geführt.

⇒: Sei $V_2(G) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Wegen $p \in V_2(G)$ ist $V_2(G)$ nicht leer. Dann gibt es gemäß Satz 5.48 auf Seite 170 eine Spezielle injektive Abbildung, so dass $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)$ 3-zusammenhängend ist. O.B.d.A. sei $p = p_1$ (sonst wendet man Satz 5.27.3. auf Seite 139 an), so dass

$$\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G) = \mathcal{C}_{x_n, \ldots, x_2}\left(\mathcal{C}_{p, i(p), q_1}(G)\right)$$

gilt. Da $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definiert ist, ist $i(p) \in Inz(p, G) = \{e, f\}$ mit $e \neq f$ und $p \neq q$. Angenommen es gilt $i(p) = e$. Dann muss $q = q_1$ erfüllt sein. Nach Satz 4.13 auf Seite 84 gilt $\deg_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}(p_i) = 2$ für jedes $i \in \{2, \ldots, n\}$, denn $\deg_G(p) = 2$. Also ist $\mathcal{C}_{p,e,q}(G) \in sub\left(\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(G)\right)$, d.h. $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ ist topologisch 3-zusammenhängend.

Falls $i(p) = f$ gilt, gibt es eine Ecke q'' von G, so dass $\mathcal{C}_{p,f,q''}(G)$ definiert ist. Wie oben ergibt sich, dass $\mathcal{C}_{p,f,q''}(G)$ topologisch 3-zusammenhängend ist. Nach Satz 4.8 auf Seite 78 ist $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ unorientiert isomorph zu $\mathcal{C}_{p,f,q''}(G)$. Daher ist auch $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ topologisch 3-zusammenhängend.

⇐: Falls $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ bereits 3-zusammenhängend ist, ist wegen $\deg_G p = 2$ und $G \in sub\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right)$ der Graph G topologisch 3-zusammenhängend. Ansonsten ist $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$ definitionsgemäß eine Unterteilung eines 3-zusammenhängenden Graphen, d.h. $V_2\left(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)\right) \neq \emptyset$. Nach Satz

5.48 gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \to E_{\mathcal{C}_{p,e,q}(G)}$, so dass die sich daraus ergebende Kontraktion $H := \mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(\mathcal{C}_{p,e,q}(G))$ 3-zusammenhängend ist. Wegen $\deg_G p = 2$ gilt $V_2(\mathcal{C}_{p,e,q}(G)) \subset V_2(G)$, so dass G eine Unterteilung von H ist. Also ist G topologisch 3-zusammenhängend. □

5.6 Hinzufügen von Wegen

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, werden Graphen $G < H$ betrachtet, die sich um einen „Standardbogen unterscheiden“ (Definition 5.50). Nachdem einige vorbereitende Lemmata (5.51 auf Seite 172, 5.52 auf Seite 173 und 5.53 auf Seite 174) abgehandelt worden sind, ist es im Satz 5.54 auf Seite 175 das Ziel aus G und H Graphen S und K zu erzeugen, so dass keiner der beiden Graphen Ecken vom Grad zwei hat, und S aus K durch „Weglassen“ einer Kante hervorgeht (5.54(f)). Die entsprechenden Kontraktionen zweiwertiger Ecken liefern für die Verschlingungsmoduln kommutative Diagramme wie in (g) und (h) des Satzes 5.54. Darüber hinaus ist der Graph K 3-zusammenhängend und einfach, sofern G vom entsprechenden topologischen Typ ist, siehe 5.54(i). Die Aussagen (f) bis (i) werden in Kapitel 7 ab Seite 187 benötigt.

Definition 5.50 *Ein Graph H ensteht aus einem Graphen G durch* **Hinzufügen eines Weges**, *wenn G ein Teilgraph von H ist und es einen Weg $(d, D) : J'_n \to H$ gibt, der*

(a) $H = G \cup Bild(d, D)$, *(b)* $G \cap Bild(d, D) = (\{d(0), d(n)\}, \emptyset, \emptyset)$

erfüllt. Man sagt, H ensteht aus G durch Hinzufügen eines Weges W, wenn H aus G durch Hinzufügen eines Weges $(d, D) : J'_n \to H$ mit $Bild(d, D) = W$ entsteht. In diesem Zusammenhang wird die Menge $V_2(G, Bild(d, D)) \subset V_2(G)$ festgelegt durch

$$V_2(G, Bild(d, D)) := V_2(G) \cap Bild\, d.$$

□

Lemma 5.51 *Sei G ein Graph und v eine Ecke von G. Dann gelten:*

(a) $|Sch(v, G)| \leq |Inz(v, G)|$.

(b) $|Sch(v, G)| = |Inz(v, G)| \Rightarrow Sch(v, G) = Inz(v, G)$.

Beweis Beide Aussagen werden mit Induktion über die Anzahl n der Schlaufen an einer Ecke geführt. Sei dazu x eine Schlaufe an v, also $x \in Sch(v, G)$, sofern $Sch(v, G) \neq \emptyset$ gilt.

Sei S der zu x gehörige Schlaufengraph. Dann gilt $G = S \cup (G - \{x\})$ und $E_S \cap E_{G-\{x\}} = \emptyset$.

Zu (a): $\boldsymbol{n = 0}$ **:** $0 = |Sch(v,G)| \leq |Inz(v,G)|$.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1}$ **:** Sei $|Sch(v,G)| = n+1$ sowie x und S wie oben. Man berechnet:

$$\begin{aligned} 1+n &= |Sch(v,G)| \overset{4.7.3.}{=} |Sch(v,S)| + |Sch(v,G-\{x\})| = 1 + |Sch(v,G-\{x\})| \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} 1 + |Inz(v,G-\{x\})| = |Inz(v,S)| + |Inz(v,G-\{x\})| \overset{4.7.1.}{=} |Inz(v,G)|\,. \end{aligned}$$

Zu (b): $\boldsymbol{n = 0}$ **:** $0 = |Sch(v,G)| = |Inz(v,G)| \;\Rightarrow\; Inz(v,G) = Sch(v,G) = \emptyset$.

$\boldsymbol{n \mapsto n+1}$ **:** Es gelte $n+1 = |Sch(v,G)| = |Inz(v,G)|$. Es seien x und S wie oben. Es gelten:

$$\begin{aligned} 1+n &= |Sch(v,G)| \overset{4.7.3.}{=} |Sch(v,S)| + |Sch(v,G-\{x\})| = 1 + |Sch(v,G-\{x\})|\,, \\ 1+n &= |Inz(v,G)| \overset{4.7.1.}{=} |Inz(v,S)| + |Inz(v,G-\{x\})| = 1 + |Inz(v,G-\{x\})|\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $n = |Sch(v,G-\{x\})| = |Inz(v,G-\{x\})|$. Man berechnet daher:

$$\begin{aligned} Sch(v,G) &\overset{4.7.3.}{=} Sch(v,S) \cup Sch(v,G-\{x\}) \overset{\text{IV}}{=} Sch(v,S) \cup Inz(v,G-\{x\}) \\ &= Inz(v,S) \cup Inz(v,G-\{x\}) \overset{4.7.1.}{=} Inz(v,G). \end{aligned}$$

□

Lemma 5.52 *Vorgelegt seien Graphen G und H. Eine Ecke v von $G \cup H$ ist genau dann in $V_2(G \cup H)$ enthalten, wenn (a), (b) oder (c) gilt:*

(a) $v \in V_2(G)$ *und* $\deg_H(v) = \deg_{G\cap H}(v)$.

(b) $v \in V_2(H)$ *und* $\deg_G(v) = \deg_{G\cap H}(v)$.

(c) $v \in V_1(G) \cap V_1(H)$ *und* $\deg_{G\cap H}(v) = 0$.

Beweis **⇒:** Sei $\deg_{G\cup H}(v) = 2$. Satz 4.7.5., S.76 liefert die folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $|Inz(v, G\cup H)| = 2$ und $|Sch(v, G\cup H)| = 0$.

Nach 4.7.1. bzw. 3. gilt dann $|Inz(v,G)| = 2$ oder $|Inz(v,H)| = 2$ oder $|Inz(v,G)| = 1$, $|Inz(v,H)| = 1$ bzw. $|Sch(v,G)| = 0$ und $|Sch(v,H)| = 0$. Mit 4.7.5. folgt $\deg_G v = 2$ oder $\deg_H v = 2$ oder $\deg_G v = \deg_H v = 1$. Aus 4.7.6. folgen dann die Behauptungen in (a), (b) und (c) über die Grade.

2. Fall: $|Inz(v, G\cup H)| = 1$ und $|Sch(v, G\cup H)| = 1$.

Nach 5.51(b) gilt $Inz(v, G\cup H) = Sch(v, G\cup H) = \{x\}$. Falls $x \in Inz(v,G)$ gilt, ist auch $x \in Sch(v,G)$, denn andernfalls erhält man $x \in Sch(v,H) \setminus Sch(v,G)$, also $x \notin E_G$.

Widerspruch! Analoges gilt, falls $x \in Inz(v, H)$ ist. Insgesamt ergibt sich daraus $x \in V_2(G)$ oder $x \in V_2(H)$.

3. Fall: $|Inz(v, G \cup H)| = 0$ und $|Sch(v, G \cup H)| = 2$.

Dieser Fall tritt wegen 5.51(a) nicht ein.

$\Leftarrow$: In jedem der Fälle (a), (b) und (c) lässt sich $\deg_{G\cup H}(v) = 2$ mit 4.7.6. berechnen. □

Lemma 5.53 *Der Graph H enstehe aus G durch Hinzufügen des Weges $(d, D) : J'_n \to H$.*

(a) $E_H \setminus E_G = \mathit{Bild}\, D$.

(b) $V_H = V_G$ *für* $n = 1$ *und* $V_H \setminus \mathit{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right) = V_G$ *für* $n > 1$.

(c) $\mathit{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right) \subset V_2(H)$*, falls* $n > 1$ *gilt.*

(d)
  i. *Für* $n > 1$*:* $V_2(H) = [V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}] \uplus \mathit{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right) \uplus [\{d(0), d(n)\} \cap V_1(G)]$.

  ii. *Für* $n = 1$*:* $V_2(H) = [V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}] \uplus [\{d(0), d(n)\} \cap V_1(G)]$.

(e) $V_2\left(G, \mathit{Bild}(d, D)\right) = \{d(i) \mid i \in \{0, n\} \wedge d(i) \in V_2(G)\}$.

(f) $V_2(G) \setminus V_2\left(G, \mathit{Bild}(d, D)\right) = V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}$.

Beweis Zur Abkürzung sei $A := \text{Bild}\,(d, D)$. Also gelten $E_A = \text{Bild}\, D$ und $V_A = \text{Bild}\, d$.

Zu (a):

$\subset$: $x \in E_H \setminus E_G \overset{5.50(a)}{\Rightarrow} x \in E_A$.

$\supset$: $x \in E_A \overset{5.50(b)}{\Rightarrow} x \notin E_G \Rightarrow x \in E_H \setminus E_G$.

Zu (b): Für $n > 1$ gelten:

$\subset$: $x \in V_H \setminus \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right) \overset{5.50(a)}{\Rightarrow} x \in V_G \vee x \in \{d(0), d(n)\} \overset{5.50(b)}{\Rightarrow} x \in V_G$.

$\supset$: $x \in V_G \overset{5.50(b)}{\Rightarrow} x \notin \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right) \overset{5.50(a)}{\Rightarrow} x \in V_H \setminus \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\dots,n-1\}}\right)$.

Für $n = 1$ gelten:

$\supset$: Klar.

$\subset$: $x \in V_H = V_G \cup V_A \overset{n=1}{=} V_G \cup \{d(0), d(1)\} \overset{5.50(b)}{=} V_G$.

Zu (c): Sei $j \in \{1, \dots, n-1\}$ und $d(j) \in \text{Bild}\, d$. Der Weg (d, D) ist ein Isomorphismus auf sein Bild, daher gilt $(*)$ in folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \{D(l_j), D(l_{j+1})\} &= D\left(Inz\left(j, J'_n\right)\right) \overset{(*)}{=} Inz\,(d(j), A) \overset{4.7.9.}{=} Inz\,(d(j), H) \setminus (E_H \setminus E_A) \\ &\overset{(a)}{=} Inz\,(d(j), H) \setminus E_G \overset{5.50(b)}{=} Inz\,(d(j), H)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $d(j) \in V_2(H)$, denn $D(l_j) \neq D(l_{j+1})$.

Zu (d): Nach Definition 5.50 und Lemma 5.52 gilt $v \in V_2(H)$ genau dann, wenn 1., 2. oder 3. gilt:

1. $v \in V_2(G) \wedge \deg_A v = 0 \Leftrightarrow v \in V_2(G) \wedge v \notin \operatorname{Bild} d \overset{5.50(b)}{\Leftrightarrow} v \in V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}$.
2. i. Für $n > 1$: $v \in V_2(A) \wedge \deg_G v = 0 \quad \Leftrightarrow v \in \operatorname{Bild} \left(d\big|\{1, \ldots, n-1\} \right)$

   ii. Für $n = 1$: $v \in V_2(A) = \emptyset \wedge \deg_G v = 0$.
3. $v \in V_1(A) \cap V_1(G) \quad \Leftrightarrow v \in \{d(0), d(n)\} \cap V_1(G)$.

Dies liefert die behauptete Darstellung von $V_2(H)$. Offensichtlich sind die an der Vereinigung beteiligten Teilmengen paarweise disjunkt.

Zu (e): Dies folgt sofort aus 5.50(b).

Zu (f):

$\supset$: Dies folgt aus $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) \subset \{d(0), d(n)\}$.

$\subset$:

1. Fall: $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = \{d(0), d(n)\}$. Hier ist nichts zu zeigen.

2. Fall: $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = \{d(0)\}$. Daraus folgt $d(n) \notin V_2(G)$, also gilt

$$V_2(G) \setminus V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = \left(V_2(G) \setminus \{d(n)\}\right) \setminus \{d(0)\} = V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}.$$

3. Fall: $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = \{d(n)\}$. Analog zum 2. Fall.

4. Fall: $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = \emptyset$. Es folgt $d(0), d(n) \notin V_2(G)$, also errechnet man $V_2(G) \setminus V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) = V_2(G) = V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}$. $\square$

Satz 5.54 *Der Graph H entstehe aus G durch Hinzufügen eines Weges $(d, D) : J'_n \to H$. Es sei G topologisch 3-zusammenhängend. Beide Graphen seien orientiert und bijektiv nummeriert. Definiere*

$$U\left(G, Bild(d, D)\right) := V_2(G) \setminus V_2\left(G, Bild(d, D)\right).$$

Zur Abkürzung sei $U := U\left(G, Bild(d, D)\right) = \{u_1, \ldots, u_m\}$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Es gelten

(a) $m = |V_2(G)| - |V_2\left(G, Bild(d, D)\right)| \geq 0$.

(b) Wenn U nicht-leer ist, dann gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i_G : U \to E_G$ und

(c) *Ecken* $w_1, \ldots, w_m \in V_G$, *so dass mit* $x_j := (u_j, i_G(u_j), w_j)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ *gilt:* $S := \mathcal{C}_{\lceil x_m \rceil}(G)$ *und* $T := \mathcal{C}_{\lceil x_m \rceil}(H)$ *sind wohldefiniert mit* $S < T$. *Falls* U *leer (also* $m = 0$*) ist, definiere* $S := \mathcal{C}_{\lceil x_0 \rceil}(G) = G$ *und* $T := \mathcal{C}_{\lceil x_0 \rceil}(H) = H$.

(d) *Es sei* $n > 1$ *und der Graph* T *aus (c) vorgelegt. Es gibt eine Spezielle injektive Abbildung* $i' : V_2(J'_n) \to E_{J'_n}$ *und Ecken* $w'_1, \ldots, w'_{n-1} \in V_{J'_n}$, *so dass mit* $z_j := \left(d(j), D(i'(j)), w'_j\right) \in V_2(H) \times E_H \times V_H$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *der Graph* $K_j := \mathcal{C}_{\lceil z_j \rceil}(T)$ *wohldefiniert ist. Darüber hinaus definiere* $K_0 := T$ *und* $K := K_{n-1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

(e) *Für jedes* $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, *induziert die Inklusion* $(i, I) : S \to T$ *aus (c) Inklusionshomomorphismen* $\left(\widetilde{\imath}_j, \widetilde{I}_j\right) : S \to K_j$.

(f) *In (d) sei* l_s *die laut Satz 5.26 auf Seite 138 eindeutig bestimmte Kante, die nicht im Bild von* i' *ist. Dann gilt* $S = K - \{D(l_s)\}$.

(g) *Analog zu Satz 4.31 auf Seite 105 sei die zu* $G < H$ *gehörige Inklusion durch* (Φ, Ψ) *und* I *aus (e) durch* (Φ', Ψ') *gegeben. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(G) \arrow[r, "\Psi_G^H"] & \mathcal{G}(H) \\ \mathcal{G}(S) \arrow[u, "\widetilde{op}(x_m)"] \arrow[r, "\Psi'^T_S"] & \mathcal{G}(T) \arrow[u, "\widetilde{op}(x_m)"'] \end{tikzcd} .$$

Dabei ist die Abbildung $\widetilde{op}(x_m)$ *definiert durch*

$$\widetilde{op}(x_m) := \begin{cases} op(x_m) \circ \cdots \circ op(x_1) & : \quad m > 0 \\ id & : \quad m = 0 \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

(h) *Analog zu Satz 4.34 auf Seite 110 sei* $\widetilde{I}_{n-1}$ *aus (e) durch* (Φ'', Ψ'') *gegeben. Dann ist*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(S) \arrow[r, "\Psi'^T_S"] \arrow[dr, "\Psi''^K_S"'] & \mathcal{G}(T) \\ & \mathcal{G}(K) \arrow[u, "\widetilde{op}(z_{n-1})"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Dabei ist $\widetilde{op}(z_{n-1})$ *definiert durch*

$$\widetilde{op}(z_{n-1}) := \begin{cases} op(z_{n-1}) \circ \cdots \circ op(z_1) & : \quad n > 1 \\ id & : \quad n = 1 \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

(i) *Es seien G und H sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach. Dann ist S topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach. Der Graph K ist 3-zusammenhängend und einfach.*

Beweis **Zu (a):** Definitionsgemäß gilt $V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right) \subset V_2(G)$. Daraus folgt $|V_2(G)| \geq |V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right)|$ und

$$|U| = |V_2(G) \setminus V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right)| = |V_2(G)| - |V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right)| \geq 0.$$

Zu (b) und (c): Sei U nicht-leer. Wegen $U \subset V_2(G)$ ist $V_2(G)$ nicht-leer. Da G topologisch 3-zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 5.48 eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(G) = \{p_1, \ldots, p_\nu\} \to E_G$ und Elemente $q_1, \ldots, q_\nu \in V_G$, so dass mit $y_j := \left(p_j, i(p_j), q_j\right), j \in \{1, \ldots, \nu\}$ die Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil y_\nu \rceil}(G)$ definiert ist. Wegen $m \leq \nu$ gibt es $\sigma \in S_\nu$ mit $u_j = p_{\sigma(j)}$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Laut 5.27.3. gibt es $w_1, \ldots, w_\nu \in V_G$, so dass für $x_j := \left(p_{\sigma(j)}, i(p_{\sigma(j)}), w_j\right), j \in \{1, \ldots, \nu\}$ die Gleichung $\mathcal{C}_{\lceil y_\nu \rceil}(G) = \mathcal{C}_{\lceil x_\nu \rceil}(G)$ gilt. Definiere $i_G : U \to E_G$ durch $i_G(x) := i(x)$. Dann ist i_G eine Spezielle injektive Abbildung mit deren Hilfe $S := \mathcal{C}_{\lceil x_m \rceil}(G)$ definiert ist. Dann liefert Satz 5.28 die Wohldefiniertheit von $T := \mathcal{C}_{\lceil x_m \rceil}(H)$ sowie $S < T$.

Zu (d): Sei $n > 1$. Satz 5.26 und Satz 5.27.3. liefern eine Spezielle injektive Abbildung $i' : V_2\left(J'_n\right) \to E_{J'_n}$ sowie Elemente $w''_j \in V_{J'_n}$, $y_j := (j, i'(j), w''_j) \in V_2\left(J'_n\right) \times E_{J'_n} \times V_{J'_n}, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, so dass $\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}\left(J'_n\right)$ wohldefiniert ist. Sei $z_j := \left(d(j), D\left(i'(j)\right), d(w''_j)\right)$ für $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{C}_{\lceil z_j \rceil}(T)$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiert ist. Dies geschieht induktiv über j:

$\boldsymbol{j = 1}$ **:** Zu zeigen sind:

a) $d(1), d(w''_1) \in V_T$.

b) $d(1) \neq d(w''_1)$.

c) $\nu g_T\left(Di'(1)\right) = \{d(1), d(w''_1)\}$.

Zu a) : Es gilt

$$V_T \overset{5.23\text{ b)}}{=} V_H \backslash U \overset{\text{Def. } U}{=} V_H \backslash \left(V_2(G) \setminus V_2\left(G, \operatorname{Bild}(d, D)\right)\right) \overset{5.53\text{ (f)}}{=} V_H \backslash \left(V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}\right).$$

Für $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt $d(s) \notin V_G$ nach 5.50 (b), also $d(s) \notin V_2(G) \supset V_2(G) \backslash \{d(0), d(n)\}$, also $d(s) \in V_T$. Für $s \in \{0, n\}$ gilt $d(s) \notin V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\}$, also $d(s) \in V_T$.

Zu b) : $\mathcal{C}_{\lceil y_1 \rceil}\left(J'_n\right)$ wohldefiniert $\Rightarrow$ $1 \neq w''_1 \overset{d \text{ injektiv}}{\Rightarrow} d(1) \neq d(w''_1)$

Zu c) : Für $m = 0$ ergibt sich $\nu g_T\,(Di'(1)) = \nu g_H\,(Di'(1)) \overset{(d,D)\text{ Homom.}}{=} \{d(1), d(w_1'')\}$.
Für $m > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\nu g_T\left(Di'(1)\right) &= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(u_m, w_m, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{m-1}\rceil}(H)}\right) \circ \cdots \circ \psi(u_1, w_1, H)\right)\left(\nu g_H\left(Di'(1)\right)\right) \\
&= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(u_m, w_m, V_{\mathcal{C}_{\lceil x_{m-1}\rceil}(H)}\right) \circ \cdots \circ \psi(u_1, w_1, H)\right)\left(\left\{d(1), d(w_1'')\right\}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \left\{d(1), d(w_1'')\right\}.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die Gleichung $(*)$ aus $d(s) \notin V_2(G) \setminus \{d(0), d(n)\} = U$.

$\boldsymbol{j \mapsto j+1}$ **:** Nach IV ist $\mathcal{C}_{\lceil z_j\rceil}\,(T)$ bereits definiert. Zu zeigen sind:

a) $d(j+1), d(w_{j+1}'') \in V_{\mathcal{C}_{\lceil z_j\rceil}(T)}$.

b) $d(j+1) \neq d(w_{j+1}'')$.

c) $\nu g_{\mathcal{C}_{\lceil z_j\rceil}(T)}\,(Di'(j+1)) = \left\{d(j+1), d(w_{j+1}'')\right\}$.

Zu a) : Es ist $V_{\mathcal{C}_{\lceil z_j\rceil}(T)} \overset{5.23\text{ b)}}{=} V_T \setminus \{d(1), \ldots, d(j)\}$. Wie in „Zu a)" im Fall $j = 1$ gilt $d(j+1), d(w_{j+1}'') \in V_T$. Da d injektiv ist, folgt $d(j+1) \in V_T \setminus \{d(1), \ldots, d(j)\}$. Wegen $w_{j+1}'' \in V_{\mathcal{C}_{\lceil y_j\rceil}(J_n')} = V_{J_n'} \setminus \{1, \ldots, j\}$ gilt $d(w_{j+1}'') \in V_H \setminus \{d(1), \ldots, d(j)\}$, denn d ist injektiv. Aus $V_T \subset V_H$ ergibt sich $d(w_{j+1}'') \in V_T \setminus \{d(1), \ldots, d(j)\}$.
Zu b) : $\mathcal{C}_{\lceil y_{j+1}\rceil}\,(J_n')$ wohldefiniert $\Rightarrow\ j+1 \neq w_{j+1}'' \overset{d\text{ inj.}}{\Rightarrow} d(j+1) \neq d(w_{j+1}'')$.
Zu c) : Man berechnet

$$\begin{aligned}
&\nu g_{\mathcal{C}_{\lceil z_j\rceil}(T)}\left(Di'(j+1)\right) \\
&\quad= \mathcal{P}_2\left(\psi\left(d(j), d(w_j''), V_{\mathcal{C}_{\lceil z_{j-1}\rceil}(T)}\right) \circ \cdots \circ \psi(d(1), d(w_1''), V_T)\right)\left(\nu g_T\left(Di'(j+1)\right)\right) \\
&\quad\overset{\text{wie bei } j=1}{=} \mathcal{P}_2\left(\psi\left(d(j), d(w_j''), V_{\mathcal{C}_{\lceil z_{j-1}\rceil}(T)}\right) \circ \cdots \circ \psi(d(1), d(w_1''), V_T)\right)\left(\left\{d(j+1), d(w_{j+1}'')\right\}\right) \\
&\quad\overset{(*)}{=} \left\{d(j+1), d(w_{j+1}'')\right\}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt die Gleichung $(*)$, da $d(w_{j+1}''), d(j+1) \notin \{d(1), \ldots, d(j)\}$ aus a) bekannt ist.
Zu (e): Für $j = 0$ ist dies die Aussage aus (c). Sei nun $j > 0$. Um Satz 4.17 auf Seite 87 anwenden zu können, genügt es

1. $D\,(i'(j)) \notin E_S$, 2. $d(j) \notin V_S$

für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ zu zeigen.
Zu 1.: $E_S \cap \text{Bild}\,D \subset E_G \cap \text{Bild}\,D \overset{5.53(\text{a})}{\subset} E_G \cap E_H \setminus E_G = \emptyset$.
Zu 2.: $V_S \cap \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right) \subset V_G \cap \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right) \overset{5.53(\text{b})}{\subset} V_G \cap V_H \setminus V_G = \emptyset$.

Zu (f): Nach (e) ist S ein Teilgraph von K, also bleibt zu zeigen:

$$1.\ V_S = V_K, \qquad 2.\ E_K \setminus \{D(l_s)\} = E_S.$$

Zu 1.: Die folgende Rechnung gilt sowohl für $U = \emptyset$ als auch $U \neq \emptyset$. Für $n > 1$ gilt: $V_S \overset{(c)}{=} V_G \setminus U \overset{5.53(b)}{=} \left(V_H \setminus \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right)\right) \setminus U \overset{5.53(d),(e)}{=} (V_H \setminus U) \setminus \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right) \overset{(c)}{=} V_K$. Für $n = 1$ gilt: $V_S = V_G \setminus U = V_H \setminus U = V_K$.

Zu 2.: Für $n \in \mathbb{N}$ und $U \neq \emptyset$ berechnet man:

$$\begin{aligned}
E_K \setminus \{D(l_s)\} &\overset{5.23}{=} \left[(E_H \setminus \text{Bild}\, i_G) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} D\left(i'(j)\right)\right] \setminus \{D(l_s)\} \\
&= \left[E_H \setminus \left(\text{Bild}\, i_G \biguplus \bigcup_{j=1}^{n-1} D\left(i'(j)\right)\right)\right] \setminus \{D(l_s)\} \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \left(\left[E_H \setminus \left(\text{Bild}\, i_G \biguplus \text{Bild}\, D\right)\right] \cup \{D(l_s)\}\right) \setminus \{D(l_s)\} \\
&= (E_H \setminus \text{Bild}\, D) \setminus \text{Bild}\, i_G \overset{5.53(a)}{=} E_G \setminus \text{Bild}\, i_G = E_S.
\end{aligned}$$

Setzt man $\text{Bild}\, i_G := \emptyset$, falls $U = \emptyset$ gilt, lässt sich die obige Rechnung genauso durchführen.

Zu (g): Für $m = 0$ gilt $S = G$, $T = H$ und $op(x_0) = id$, daher ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Sei nun $m > 0$. Für jedes $j \in \{0, \ldots, m\}$ gilt $\mathcal{C}_{\lceil x_j \rceil}(G) \overset{(*)}{<} \mathcal{C}_{\lceil x_j \rceil}(H)$ nach (c) und Satz 5.28 auf Seite 143. Deshalb lässt sich Satz 4.31 auf Seite 105 mehrmals auf die jeweiligen Inklusionen $(*)$ anwenden.

Definitionsgemäß gilt $U \subset V_2(G)$. Nach 5.53(d),(f) ist $U \subset V_2(H)$ erfüllt. Für $X \in \{G, H\}$ und jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt demnach $u_j \in V_2\left(\mathcal{C}_{\lceil x_{j-1} \rceil}(X)\right)$, also ist $op(x_j)$ nach Satz 4.29 auf Seite 103 für jedes solche j ein Isomorphismus.

Zu (h): Für $n = 1$ gilt $T = K$, daher ist nichts mehr zu zeigen. Für $n > 1$ kann man Satz 4.34 wegen (e) $(n-1)$-mal anwenden.

Zu (i): Da jeweils ausschließlich an zweiwertigen Ecken kontrahiert wird, sind S und K sowohl topologisch 3-zusammenhängend nach Satz 5.49 auf Seite 171 als auch topologisch einfach nach Satz 5.46 auf Seite 170.

Ein topologisch 3-zusammenhängender Graph kann nach Definition 5.47 auf Seite 170 und Satz 5.21 auf Seite 134 keine Ecken vom Grad 1 haben, also gilt $V_1(K) = \emptyset$. Nun wird $V_2(K) = \emptyset$ nachgewiesen. Sei zunächst $V_2(H) \neq \emptyset$. Angenommen es gibt eine in K zweiwertige Ecke $x \in V_2(K)$. Damit ergibt sich:

$$x \in V_K = V_H \setminus \left(U \biguplus \text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right)\right) \overset{5.53(d)}{=} V_H \setminus V_2(H). \tag{5.25}$$

Dabei sei $\text{Bild}\left(d\big|_{\{1,\ldots,n-1\}}\right) := \emptyset$, falls $n = 1$ gilt. Andererseits hat x in K denselben Grad wie in H, weil nur an zweiwertigen Ecken kontrahiert wird (siehe Satz 4.13 auf Seite

84). Demnach gilt $x \in V_2(H)$ im Widerspruch zu (5.25).

Wenn $V_2(H)$ leer ist, so gilt $S = G, T = H = K$, daher ist $V_2(K)$ auch leer.

Da also K keine Ecken vom Grad 2 hat, kann K nach Definition 5.22 auf Seite 135 nicht Unterteilung eines Graphen sein. Somit liefern die Definitionen 5.38 auf Seite 156 und 5.47 auf Seite 170 die Behauptung. $\square$

Kapitel 6

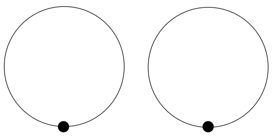
Spezielle Graphen

In den Abschnitten 6.1 bis 6.4 werden die Verschlingungsmoduln der Graphen Z_2, K_4, $K_{3,3}$ und K_5 berechnet. Dabei genügt es, sich jeweils auf eine spezielle bijektive Nummerierung und eine Orientierung zu beschränken, denn der Isomorphietyp der Verschlingungsmoduln hängt nach 2.29 auf Seite 46 und 2.32 auf Seite 49 nicht von der Wahl der Nummerierung und der Orientierung ab. Dasselbe gilt nach 4.29 auf Seite 103 für Kontraktionen an zweiwertigen Ecken, so dass die Ergebnisse aus 6.1 bis 6.4 in 6.5 ab Seite 186 auf (beliebig) orientierte bijektiv nummerierte Unterteilungen der eingangs erwähnten Graphen ausgedehnt werden können.

Zur besseren Übersicht werden bei Matrizen die jeweiligen Indexmengen in der ersten Spalte und der ersten Zeile mitnotiert. Freie Plätze sind mit 0 zu ergänzen. Die Berechnungen in den Beweisen zu den Sätzen 6.6 auf Seite 183 und 6.8 auf Seite 184 wurden mit MAPLE durchgeführt.

6.1 Der Graph Z_2

Definition 6.1 *Ein Zellenkomplex, der ein Diagramm wie in Abbildung (6.1) gestattet,*



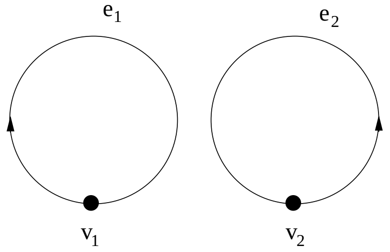
(6.1)

wird mit $\mathcal{Z}_2$ bezeichnet. Der zugehörige abstrakte Graph $G(\mathcal{Z}_2)$ wird als Z_2 notiert. □

Satz 6.2 *Zu dem Zellenkomplex $\mathcal{Z}_2$ sei eine bijektive Nummerierung $(w, \gamma) : Z_2 \to (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2, h)$ mit zugehöriger Inzidenzmatrix $I(Z_2, w, \gamma)$ wie in (6.2) vorgelegt. Dann gilt*

$\mathbb{Z} = Kern\ G_{(Z_2,w,\gamma)}$.

$$I(Z_2, w, \gamma) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & -0 & 0 \\ 2 & 0 & -0 \end{array}$$



(6.2)

Beweis Der Kern der Matrix

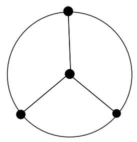
$$\mathcal{M}(Z_2, w, \gamma) = \begin{array}{c|c} & (1,2) \\ \hline (1,2) & 0 \\ (2,1) & 0 \end{array}$$

besteht offenbar aus ganz $\mathbb{Z}$. □

Bemerkung Wegen $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ ergibt sich $L_y(D, \gamma_D, o) = w^{D,o}_{\gamma_D^{-1}(e_1),\gamma_D^{-1}(e_2)}$ für ein mittels (w_D, γ_D) bijektiv nummeriertes orieniertes Diagramm (D, o) von $\mathcal{Z}_2$. Dies entspricht der Verschlingungszahl einer Verkettung mit zwei Komponenten, siehe [23], Example 2.3.

6.2 Der Graph K_4

Definition 6.3 *Ein Zellenkomplex, der ein Diagramm wie in Abbildung (6.3) gestattet,*

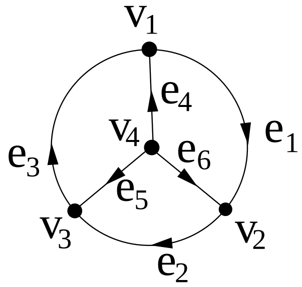


(6.3)

wird mit $\mathcal{K}_4$ bezeichnet. Der zugehörige abstrakte Graph $G(\mathcal{K}_4)$ wird als K_4 notiert. □

Satz 6.4 *Zu dem Zellenkomplex $\mathcal{K}_4$ sei eine bijektive Nummerierung $(w, \gamma) : K_4 \to (\mathcal{V}_4, \mathcal{E}_6, h)$ mit zugehöriger Inzidenzmatrix $I(K_4, w, \gamma)$ wie in (6.4) vorgelegt. Dann gilt $0 = Kern\ G_{(K_4,w,\gamma)}$.*

$$I(K_4, w, \gamma) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



(6.4)

Beweis Die Matrix

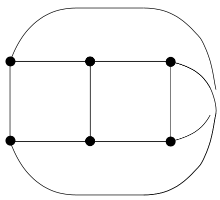
$$\mathcal{M}\left(K_4, w, \gamma\right) \quad = \quad \begin{array}{c|ccc}
 & (1,5) & (2,4) & (3,6) \\ \hline
(1,3) & -1 & 0 & 0 \\
(1,4) & 1 & 0 & 0 \\ \hline
(2,1) & 0 & -1 & 0 \\
(2,4) & 0 & 1 & 0 \\ \hline
(3,2) & 0 & 0 & -1 \\
(3,4) & 0 & 0 & 1 \\ \hline
(4,2) & 0 & 1 & 0 \\
(4,3) & 0 & -1 & 0 \\ \hline
(5,1) & 1 & 0 & 0 \\
(5,2) & -1 & 0 & 0 \\ \hline
(6,1) & 0 & 0 & -1 \\
(6,3) & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

hat offensichtlich den Rang 3. □

Bemerkung Der Verschlingungsmodul planarer Graphen, in denen je zwei Kreise mindestens eine Ecke oder eine Kante gemeinsam haben, ist immer Null, siehe [23], Corollary 5.2.

6.3 Der Graph $\mathbf{K_{3,3}}$

Definition 6.5 *Ein Zellenkomplex, der ein Diagramm wie in Abbildung (6.5) gestattet,*



(6.5)

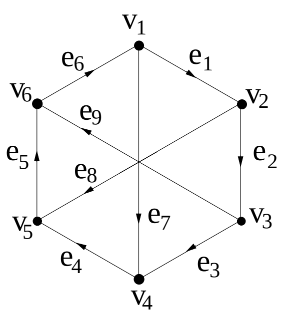
wird mit $\mathcal{K}_{3,3}$ bezeichnet. Der zugehörige abstrakte Graph $G\left(\mathcal{K}_{3,3}\right)$ wird als $K_{3,3}$ notiert.

□

Satz 6.6 *Zu dem Zellenkomplex $\mathcal{K}_{3,3}$ sei eine bijektive Nummerierung $(w, \gamma) : K_{3,3} \to (\mathcal{V}_6, \mathcal{E}_9, h)$ mit zugehöriger Inzidenzmatrix $I := I\left(K_{3,3}, w, \gamma\right)$ wie in (6.6) vorgelegt. Dann gilt*

$$Kern\, G_{(K_{3,3}, w, \gamma)} = \left\langle (1,1,1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1)^T \right\rangle .$$

$$I = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$



(6.6)

Beweis Der Kern der Matrix

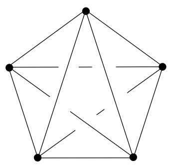
$\mathcal{M}(K_{3,3}, w, \gamma) =$

	13	14	15	19	24	25	26	27	35	36	38	46	49	57	68	78	79	89
13	1			1														
14	-1	1																
15		-1	1															
16			-1	-1														
21							-1	1										
24					1			-1										
25					-1	1												
26						-1	1											
31	1									-1								
32	-1										1							
35									1		-1							
36									-1	1								
41		1										-1						
42		-1			1													
43					-1								1					
46												1	-1					
51			1											1				
52			-1			1												
53						-1			1									
54									-1					-1				
62							1								1			
63							-1			1								
64										-1		1						
65												-1			-1			
72								1								1		
73								-1									1	
75														1		-1		
76														-1			-1	
81															-1	1		
83											1							1
84											-1					-1		
86															1			-1
91				1													1	
92				-1														1
94													1				-1	
95													-1					-1

wird von $(1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1)^T \in M^{tr}(IE(K_{3,3}, w, \gamma), \mathbb{Z})$ erzeugt. $\square$

6.4 Der Graph K_5

Definition 6.7 *Ein Zellenkomplex, der ein Diagramm wie in Abbildung (6.7) gestattet,*



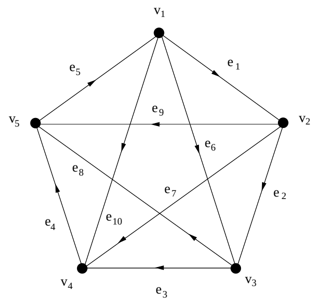
(6.7)

wird mit $\mathcal{K}_5$ bezeichnet. Der zugehörige abstrakte Graph $G(\mathcal{K}_5)$ wird als K_5 notiert. $\square$

Satz 6.8 *Zu dem Zellenkomplex $\mathcal{K}_5$ sei eine bijektive Nummerierung $(w, \gamma) : \mathcal{K}_5 \to (\mathcal{V}_5, \mathcal{E}_{10}, h)$ mit zugehöriger Inzidenzmatrix $I := I(K_5, w, \gamma)$ wie in (6.8) vorgelegt. Dann* *gilt*

$$Kern\,G_{(K_5,w,\gamma)} = \left\langle (-1,-1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,1,-1,1)^T \right\rangle .$$

$$I = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$



(6.8)

Beweis Der Kern der Matrix

$\mathcal{M}(K_5, w, \gamma)$ =

	13	14	18	24	25	210	35	39	46	57	67	69	78	810	910
13	1		1												
14	-1	1													
15		-1	-1												
21					-1	1									
24				1		-1									
25				-1	1										
31	1						-1								
32	-1							1							
35							1	-1							
41		1							1						
42		-1		1											
43				-1					-1						
52					1					1					
53					-1		1								
54							-1			-1					
62											1	1			
64									1		-1				
65									-1			-1			
71										-1	1				
73											-1		1		
75										1			-1		
81			1											1	
82			-1										1		
84													-1	-1	
91												1			1
93								1				-1			
94								-1							-1
10 2						1									1
10 3						-1								1	
10 5														-1	-1

wird von $(-1,-1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,1,-1,1)^T \in M^{tr}(IE(K_5,w,\gamma),\mathbb{Z})$ erzeugt. $\square$

Bemerkung Die Einträge der Tupel in den Sätzen 6.6 und 6.8 sind bei geeigneter Nummerierung und Orientierung die Koeffizienten $\epsilon(\cdot,\cdot)$ in [22], §4, bzw. in [23], Example 2.4. In [17] auf den Seiten 209/210 läßt sich eine ähnliche Definition derselben Invariante nachschlagen.

6.5 Unterteilungen von $\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{K_4}$, $\mathbf{K_{3,3}}$ und $\mathbf{K_5}$

Satz 6.9 *Sei $X \in \{K_{3,3}, K_5, Z_2\}$ nicht orientiert, $T := (V, E, g) \in sub(X)$ orientiert und (w, γ) eine bijektive Nummerierung von T. Dann gibt es ein Element t, das Kern$\,G_{(T,w,\gamma)}$ erzeugt.*

Beweis Nach 5.34 auf Seite 150 gibt es eine Spezielle injektive Abbildung $i : M \to E$ für eine geeignete Menge $M \subset V_2(T)$, so dass für die mittels i definierte Kontraktion $\mathcal{C}_{\lceil x_n \rceil}(T) =: T'$ gilt: $X = \nu T' =: (V', E', g')$. Für $\nu T'$ wählt man nun eine Orientierung g'' und die Nummerierung (w'', γ'') wie in den Sätzen 6.2 auf Seite 181, 6.6 auf Seite 183 und 6.8 auf Seite 184. Damit ist $T'' := (V', E', g'')$ ein mittels (w'', γ'') bijektiv nummerierter Graph. Man erhält folgendes Diagramm, in dem alle Abbildungen Isomorphismen sind:

$$\langle t'' \rangle = \operatorname{Kern} G_{(T'',w'',\gamma'')} \xrightarrow{2.32, S.49/2.39, S.56} \operatorname{Kern} G_{(T',w'',\gamma'')} \xrightarrow{4.29, S.103} \operatorname{Kern} G_{(T,w,\gamma)} \ .$$

□

Bemerkung Die Graphen K_5, K_4 und $K_{3,3}$ sind 3-zusammenhängend und einfach, siehe [27], Theorem IV.15., p.76, Theorem IV.17., p.78 sowie Figure IV.2.6, p.80. □

Kapitel 7

Verschlingungsmoduln 3-zusammenhängender einfacher Graphen

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, wie eine Basis des Verschlingungsmoduls eines 3-zusammenhängenden einfachen Graphen G bestimmt werden kann. Dabei wird jedes Basiselement durch einen Teilgraphen von G induziert. Aus [25] geht hervor, dass es genügt, diejenigen Teilgraphen von G zu betrachten, die zu einer Unterteilung von $K_{3,3}$, K_5 oder Z_2 (unorientiert) isomorph sind.

In den Abschnitten 7.1 und 7.2 ab Seite 188 werden Resultate aus [23] und [25] über Konstruktionen 3-zusammenhängender einfacher Graphen zusammengestellt. Diese bilden zusammen mit der Formel für den Rang des Verschlingungsmoduls in [14] die Grundlage für die in Abschnitt 7.3 ab Seite 195 hergeleitete Methode.

Jeder 3-zusammenhängende Graph enthält eine Unterteilung von K_4 als Teilgraphen. Fügt man zu diesem eine Kante hinzu, entstehen wie in [25] verschiedene Typen von Graphen, die in Abschnitt 7.3 für eine Basis benötigt werden. Diese Graphen werden in 7.2 untersucht.

7.1 Sätze von Taniyama und Shinjo

Satz 7.1 *Sei G ein 3-zusammenhängender einfacher Graph. Dann gibt es einen Teilgraphen $G_0 \in sub(K_4)$ von G und eine Folge $(J_i)_{i\in\{0,\dots,l\}}$ von Teilgraphen von G mit $J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_l = G$, so dass für jedes $i \in \{0,\dots,l\}$ gilt:*

1. *J_i ist sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach,*

2. *J_i entsteht aus J_{i-1} durch Hinzufügen eines Weges W_{i-1}.* $(i \neq 0)$

Beweis [23], Lemma 4.1. □

Satz 7.2 *Sei $G = (V_G, E_G, g_G)$ ein 3-zusammenhängender einfacher Graph und $e \in E_G$, so dass $G-\{e\}$ sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach ist. Sei $W = (\{p, q\}, \{e\}, g_W)$ der zu e gehörende Teilgraph von G. Dann gibt es einen Teilgraphen $G_0 = (V_{G_0}, E_{G_0}, g_{G_0}) \in sub(K_4)$ von $G - \{e\}$ mit $p, q \in V_{G_0}$ und eine Folge $(G_i)_{i\in\{0,...,n\}}$ von Teilgraphen von $G - \{e\}$, für die $G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G - \{e\}$ gilt, so dass für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ die folgenden Aussagen 1., 2. und 3a oder 3b gelten.*

1. *G_i ist sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach.*

2. *G_i entsteht aus G_{i-1} durch Hinzufügen eines Weges P_{i-1}.* $(i \neq 0)$

3. (a) *$G_i \cup W$ ist sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach.*

   (b) *$G_{i+1} \cup W$ ist sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach.*

Beweis [25], Lemma 2.6. □

Satz 7.3 *Sei $G = (V, E, g)$ ein Graph und $e_1, e_2 \in E$ nicht inzidente Kanten. Weiterhin seien $G-\{e_1\}$, $G-\{e_2\}$ und $G-\{e_1, e_2\}$ sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach. Dann gibt es einen Teilgraphen H von G, für den eine der folgenden Aussagen gilt:*

1. *Der Graph H ist eine Unterteilung von Z_2 und die Kanten e_1, e_2 sind in verschiedenen Komponenten von H enthalten.*

2. *Der Graph H ist eine Unterteilung von $K \in \{K_{3,3}, K_5\}$ und die Kanten $e_1, e_2 \in E_K (\subset E_H)$ sind nicht inzident in K.*

Beweis [25], Lemma 2.5. □

7.2 Hinzufügen eines Weges an K_4

Basierend auf einer **Kette** von Teilgraphen wie in 7.1 bzw. 7.2 für einen Graphen G wird in 32. auf Seite 215 der Rang des Verschlingungsmoduls von G abgeschätzt. Dabei muss ein

Teilgraph von G berücksichtigt werden, der sich nur um eine Kante von einer Unterteilung des Graphen K_4 „unterscheidet". Die topologische Gestalt dieses Teilgraphen lässt sich mithilfe einer Fallunterscheidung angeben, siehe [25], Seite 63, Fig.4. Da in den Beweis von 32. die Eckengrade der zu der oben erwähnten Kante inzidenten Ecken eingehen, wird hier der folgende graphentheoretische Satz bewiesen:

Satz 7.4 *Es sei $G \in sub\,(K_4)$ und H enstehe aus G durch Hinzufügen eines Weges $(\delta, \Delta) : J_1 \to H$ mit $p := \delta(0), q := \delta(1)$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

1. $\deg_G(p) = \deg_G(q) = 2$.

   (a) *Der Graph H ist nicht topologisch einfach, und es gibt zwei verschiedene Teilgraphen $\widetilde{T}^{1a}_{-1}$, $\widetilde{T}^{1a}_{0}$ von H, die jeweils isomorph zu einem Element aus $sub(Z_2)$ sind.*

   (b) *Der Graph $H =: \widetilde{T}^{1b}_{0}$ ist topologisch 3-zusammenhängend, topologisch einfach und isomorph zu einem Graphen aus $sub(K_{3,3})$.*

   (c) *Der Graph H ist sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach, und es gibt einen Teilgraphen $\widetilde{T}^{1c}_{0}$ von H, der isomorph zu einem Element aus $sub(Z_2)$ ist.*

2. $\deg_G(p) = 2$, $\deg_G(q) = 3$.

   (a) *Der Graph H ist nicht topologisch einfach, und es gibt einen Teilgraphen $\widetilde{T}^{2a}_{0}$ von H, der isomorph zu einem Element aus $sub(Z_2)$ ist.*

   (b) *Der Graph H ist topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach.*

3. $\deg_G(p) = \deg_G(q) = 3$. *Der Graph H ist nicht topologisch einfach.*

4. $\deg_G(p) = 3$, $\deg_G(q) = 2$. *Vertauschen der Rollen von p und q ergibt Fälle 4(a) und 4(b) genau wie in Zweitens 2(a) bzw. 2(b).*

Bemerkung Je nachdem welcher Fall in Satz 7.4 eintritt, definiert man

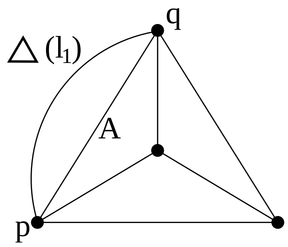
$$t_\alpha := \begin{cases} 0 & : \quad \alpha \in \{2b, 3, 4b\} \\ 1 & : \quad \alpha \in \{1b, 1c, 2a, 4a\} \\ 2 & : \quad \alpha = 1a \end{cases} .$$

□

Beweis Es sei $W := \mathrm{Bild}(\delta, \Delta)$ und $H = G \cup W$. Für $V_2(G) = \emptyset$ gilt $G = K_4$, also gibt es eine Kante $A \in E_{K_4}$ mit $g_H(A) = g_{K_4}(A) = \{p, q\} = \mathcal{P}_2(\delta)(\{0,1\}) = g_H(\Delta(l_1))$. Daher ist H nicht einfach und es tritt 3. aus der Behauptung ein.

Ab nun sei $V_2(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ nicht-leer. Da $G \in sub(K_4)$ ist, erhält man K_4 mittels einer mehrfachen Kontraktion an zweiwertigen Ecken von G. Nach Satz 5.34 lässt sich diese Kontraktion mit Hilfe einer Speziellen injektiven Abbildung i durchführen. Da $V_2(K_4)$ leer ist, hat sie die Gestalt $i : V_2(G) \to E_G$. Seien also $x'_1, \ldots, x'_n \in V_G$, so dass $K_4 = \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G)$ für $y_j := \left(x_j, i(x_j), x'_j\right)$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.
1. Fall: $\deg_G(p) = \deg_G(q) = 3$. Wegen $V(G) = V_2(G) \biguplus V_{K_4}$ und $p, q \notin V_2(G) = V_2(G \cup W) = V_2(H)$ gilt $p, q \in V_{K_4}$, also gibt es eine Kante $A \in E_{K_4}$ mit $g_{K_4}(A) = \{p, q\}$. Satz 4.9 auf Seite 79 liefert $L := \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(H) \overset{p,q \notin V_2(H)}{=} \mathcal{C}_{\lceil y_n \rceil}(G) \cup W = K_4 \cup W$, deshalb gilt

$$\begin{aligned} g_L(A) &= g_{K_4}(A) = \{p, q\} = \{\delta(0), \delta(1)\} \\ &= \mathcal{P}_2(\delta)(\{0,1\}) = g_H(\Delta(l_1)) = g_{G \cup W}(\Delta(l_1)) \\ &= g_W(\Delta(l_1)) = g_L(\Delta(l_1)). \end{aligned}$$



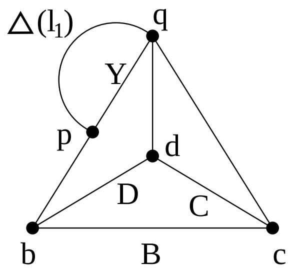
Daher ist H nicht topologisch einfach, denn L enthält die Mehrfachkanten A und $\Delta(l_1)$.
2. Fall: $\deg_G(p) = 2$, $\deg_G(q) = 3$. Also ist $p \in V_2(G)$ und $q \in V_{K_4}$. Nach Satz 5.27.3. auf Seite 139 sei o.B.d.A. $p = x_n$. Für $K := \mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(G)$ gelten $V_2(K) \overset{4.13,\, S.84}{=} \{x_n\}$, $\mathcal{C}_{\lceil y_{n-1} \rceil}(H) \overset{4.9,\, S.79}{=} K \cup W$, $E_K = E_{K_4} \biguplus \{i(x_n)\}$ und $V_K = V_{K_4} \biguplus \{x_n\}$. Also gibt es eine Kante $A \in E_{K_4}$ mit $Inz(x_n, K) = \{i(x_n), A\}$.
1. Unterfall: Es gibt eine Kante $Y \in E_K$ mit $g_K(Y) = \{x_n, q\}$. Dann ist $Y \in \{A, i(x_n)\}$ und es gilt

$$g_{K_4}(A) = \{q, b\} \tag{7.1}$$

für ein $b \in V_{K_4}$, denn: Wenn $Y = A$ gilt, so sei b diejenige Ecke aus V_{K_4}, für die $g_K(i(x_n)) = \{x_n, b\}$ gilt. Dann berechnet man $g_{K_4}(A) = \psi(x_n, b, V_K)\, g_K(A) = \{q, b\}$. Für $Y = i(x_n)$ sei $g_K(A) = \{x_n, b\}$ und man folgert genauso $g_{K_4}(A) = \psi(x_n, q, V_K)\, g_K(A) = \{q, b\}$.

Die Eckenmenge von K_4 lässt sich schreiben als $V_{K_4} = \{q, b, c, d\}$. Vorgelegt seien nun Kanten $B, C, D \in E_{K_4}$, so dass $g_{K_4}(B) = \{b, c\}$, $g_{K_4}(C) = \{c, d\}$ und $g_{K_4}(D) = \{d, b\}$ gelten. Für $X \in \{B, C, D\}$ ergibt sich daraus $x_n \notin g_K(X)$, denn andernfalls ist $X \in Inz(x_n, K) = \{A, i(x_n)\}$ im Widerspruch zu (7.1). Also gilt $g_{K \cup W}(X) = g_K(X) = \psi(x_n, x'_n, V_K)\, g_K(X) = g_{\mathcal{C}_{y_n}(K)}(X) = g_{K_4}(X)$ für jedes $X \in \{B, C, D\}$. Daher sind

$$(\lambda, \Lambda) : J_3 \to K \cup W \quad \text{und}$$
$$(\phi, \Phi) : J_2 \to K \cup W$$



definiert durch $\lambda(0) = b = \lambda(3), \lambda(1) = c, \lambda(2) = d, \Lambda(l_1) = B, \Lambda(l_2) = C, \Lambda(l_3) = D$ sowie $\phi(0) = p = x_n = \phi(2), \phi(1) = q, \Phi(l_1) = Y$ und $\Phi(l_2) = \Delta(l_1)$ Kreise in $K \cup W$ mit $C_1 := \text{Bild}(\lambda, \Lambda) \cap \text{Bild}(\phi, \Phi) =: C_2 = \emptyset$. Mittels Satz 4.18 auf Seite 88 lässt sich $C_1 \cup C_2 < K \cup W$ zu einem Teilgraphen $\widetilde{T}_0^{2a}$ von H hochheben, so dass $\widetilde{T}_0^{2a} \in sub(Z_2)$ gilt, siehe Seite 195.

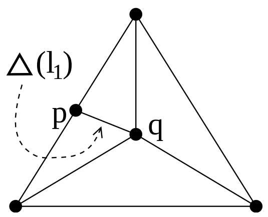
Darüber hinaus ist $K \cup W$ wegen

$$\begin{aligned} g_{K\cup W}(Y) &= g_K(Y) = \{p, q\} = \mathcal{P}_2(\delta)(\{0,1\}) = g_H(\Delta(l_1)) \\ &= g_{G\cup W}(\Delta(l_1)) = g_W(\Delta(l_1)) = g_{K\cup W}(\Delta(l_1)) \end{aligned}$$

nicht einfach, also ist H nicht topologisch einfach. Insgesamt tritt demnach 2(a) aus der Behauptung ein.

2. Unterfall: Die Ecken q und x_n sind nicht adjazent in K. Da $K_4 = \mathcal{C}_{y_n}(K)$ 3-zusammenhängend und einfach ist, ist K_4 gemäß Korollar 5.17 auf Seite 131 3-zusammenhängend nach

Tutte. Mit [27], Theorem IV.16. auf Seite 77 ergibt sich, dass $K \cup W$ 3-zusammenhängend nach Tutte ist. Wegen $|V_{K\cup W}| \geq |V_{K_4}| \geq 4$ und $|E_{K\cup W}| \geq |E_{K_4}| \geq 6$ ist $K \cup W$ 3-zusammenhängend und einfach nach Korollar 5.19 bzw. Satz 5.20 auf Seite 134. Somit ist $H \in sub(K \cup W)$ topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach, und es tritt der Fall 2(b) der Behauptung ein.



Vertauscht man im 2. Fall die Rollen von p und q, so ergeben sich jeweils die Fälle 4(a) und 4(b).

3. Fall: $\deg_G(p) = \deg_G(q) = 2$. Also sind $p, q \in V_2(G)$. Nach Satz 5.27.3. auf Seite 139 sei o.B.d.A. $p = x_n$ und $q = x_{n-1}$. Für $K := \mathcal{C}_{\lceil y_{n-2} \rceil}(G)$ gelten $V_2(K) = \{x_n, x_{n-1}\}$, $\mathcal{C}_{\lceil y_{n-2} \rceil}(H) = K \cup W$, $E_K = E_{K_4} \uplus \{i(x_n), i(x_{n-1})\}$ und $V_K = V_{K_4} \uplus \{x_n, x_{n-1}\}$. Wegen $K_4 = \mathcal{C}_{y_n, y_{n-1}}(K)$ ist K topologisch einfach. Der 3. Fall unterteilt sich zwei weitere Unterfälle:

1. Unterfall: Es gibt eine Kante $Y \in E_K$, so dass $g_K(Y) = \{p, q\}$ gilt. Wegen $p, q \in V_2(K)$ gibt es $X, Z \in E_K$, so dass $Inz(p, K) = \{X, Y\}$ und $Inz(q, K) = \{Y, Z\}$ mit $X \neq Y$ sowie $Y \neq Z$ erfüllt ist. Es gilt auch $X \neq Z$, denn sonst ist K einfach wegen $g_K(Y) = \{p, q\} = g_K(X)$. Es seien nun $a, b \in V_K$ diejenigen Ecken, für die $g_K(X) = \{p, a\}$ und $g_K(Z) = \{q, b\}$ gilt. Da K topologisch einfach ist, folgt $a, b \notin \{p, q\}$, also $a, b \in V_{K_4}$. Es gilt auch $a \neq b$, denn andernfalls berechnet man

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{C}_{p,Y,q}(K)}(X) &= \psi(p, q, V_K)\, g_K(X) = \{a, q\} \\ &= \{b, q\} = \psi(p, q, V_K)\, g_K(Z) = g_{\mathcal{C}_{p,Y,q}(K)}(Z). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{C}_{p,Y,q}(K)$ nicht einfach also K nicht topologisch einfach ist. Widerspruch!

Es gilt $i(p) \in \{X, Y\}$ und $i(q) \in \{Y, Z\}$, daher gibt es genau ein $U \in \{X, Y, Z\}$ mit $U \in E_{K_4}$. Für diese Kante U gilt

$$g_{K_4}(U) = \{a, b\}, \tag{7.2}$$

wie man durch folgende Fallunterscheidung feststellt:
$U = Z$: Es folgt $i(q) = Y, i(p) = X$ und

$$g_{K_4}(U) = \psi\left(p, a, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, p, V_K) g_K(Z) = \{a, b\}.$$

$U = X$: Es folgt $i(q) = Z, i(p) = Y$ und

$$g_{K_4}(U) = \psi\left(p, b, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, b, V_K) g_K(X) = \{a, b\}.$$

$U = Y$: Es folgt $i(q) = Z, i(p) = X$ und

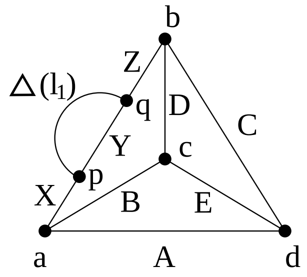
$$g_{K_4}(U) = \psi\left(p, a, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, b, V_K) g_K(Y) = \{a, b\}.$$

Die Eckenmenge von K_4 lässt sich schreiben als $V_{K_4} = \{a, b, c, d\}$. Vorgelegt seien nun Kanten $A, B, C, D, E \in E_{K_4} \subset E_K$, so dass $g_{K_4}(A) = \{a, d\}$, $g_{K_4}(B) = \{a, c\}$, $g_{K_4}(C) = \{b, d\}$, $g_{K_4}(D) = \{c, b\}$ und $g_{K_4}(E) = \{c, d\}$ gelten. Aus (7.2) folgt dann $U \notin \{A, B, C, D, E\}$ also $p, q \notin g_K(S)$ für jedes $S \in \{A, B, C, D, E\}$ (denn aus $S \in Inz(p, K) \cup Inz(q, K)$ folgt $S = U$ wegen $S \in E_{K_4}$). Dann gilt

$$g_{K \cup W}(S) = g_K(S) = \psi\left(p, x'_n, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, x'_{n-1}, V_K) g_K(S) = g_{K_4}(S)$$

für jedes $S \in \{A, B, C, D, E\}$. Die Homomorphismen

$$(\lambda, \Lambda) : J_3 \to K \cup W,$$
$$(\phi, \Phi) : J_3 \to K \cup W \quad \text{und}$$
$$(\psi, \Psi) : J_2 \to K \cup W$$



definiert durch $\lambda(0) := \lambda(3) := a, \lambda(1) := c, \lambda(2) := d, \Lambda(l_1) := B, \Lambda(l_2) := E, \Lambda(l_3) := A, \phi(0) := \phi(3) := b, \phi(1) := c, \phi(2) := d, \Phi(l_1) := D, \Phi(l_2) := E, \Phi(l_3) := C, \psi(0) := \psi(2) := p, \psi(1) := q, \Psi(l_1) := Y$ und $\Psi(l_2) := \Delta(l_1)$ sind Kreise in $K \cup W$ mit $C_1 := \text{Bild}(\lambda, \Lambda) \cap \text{Bild}(\psi, \Psi) =: C_0 = \emptyset$ und $C_2 := \text{Bild}(\phi, \Phi) \cap \text{Bild}(\psi, \Psi) =: C_0 = \emptyset$. Die Teilgraphen $C_1 \cup C_0 < K \cup W$ und $C_2 \cup C_0 < K \cup W$ lassen sich mithilfe von Satz 4.18 auf Seite 88 zu Teilgraphen $\widetilde{T}^{1a}_{-1}$ und $\widetilde{T}^{1a}_0$ von H hochheben, so dass $\widetilde{T}^{1a}_{-1}, \widetilde{T}^{1a}_0 \in sub(Z_2)$ gilt, siehe Seite 195. Wegen $g_{K \cup W}(Y) = g_K(Y) = \{p, q\} = g_H(\Delta(l_1)) = g_W(\Delta(l_1)) = g_{K \cup W}(\Delta(l_1))$ ist H nicht topologisch einfach. Insgesamt tritt deshalb 1(a) aus der Behauptung ein.

2. Unterfall: Es gibt keine Kante in E_K, die inzident zu p und q ist. Es sei $Inz(p, K) = \{i(p), X\}$ und $Inz(q, K) = \{i(q), Y\}$. Es gilt $Inz(p, K) \cap Inz(q, K) = \emptyset$ nach Voraussetzung dieses Unterfalles. Dieser gliedert sich in die folgenden Fälle I und II.

Fall I: Es gibt $a \in V_K, A \in Inz(p, K), B \in Inz(q, K)$, so dass $A, B \in Inz(a, K)$ gilt. Dann kann a weder die Ecke p noch die Ecke q sein. Also gilt $a \in V_{K_4}$. Zunächst wird

$$a \in g_{K_4}(X), \quad a \in g_{K_4}(Y) \tag{7.3}$$

mithilfe folgender Fallunterscheidung nachgewiesen:

$A = X : \Rightarrow g_K(X) = g_K(A) = \{p, a\} \Rightarrow a \in g_{K_4}(X)$.

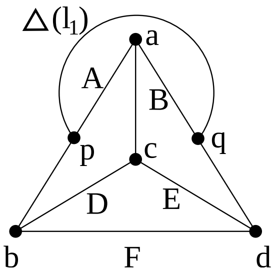
$A \neq X : \Rightarrow A = i(p) \Rightarrow g_K(i(p)) = \{a, p\} \overset{p \in g_K(X)}{\Rightarrow} a \in \psi\left(p, a, V_{\mathcal{C}_{y_n}(K)}\right) \psi(q, x'_{n-1}, V_K) \circ g_K(X) = g_{K_4}(X)$.

$B = Y : \Rightarrow g_K(Y) = g_K(B) = \{q, a\} \Rightarrow a \in g_{K_4}(Y)$.

$B \neq Y : \Rightarrow B = i(q) \Rightarrow g_K(i(q)) = \{a, q\} \overset{q \in g_K(Y)}{\Rightarrow} a \in \psi\left(p, x'_n, V_{\mathcal{C}_{y_n}(K)}\right) \psi(q, a, V_K) \circ g_K(Y) = g_{K_4}(Y)$.

Die Eckenmenge von K_4 lässt sich schreiben als $V_{K_4} = \{a, b, c, d\}$. Vorgelegt seien nun Kanten $D, E, F \in E_{K_4} \subset E_K$, so dass $g_{K_4}(D) = \{b, c\}$, $g_{K_4}(E) = \{c, d\}$ und $g_{K_4}(F) = \{d, b\}$ gelten. Wegen (7.3) ergibt sich $D, E, F \notin \{X, Y\}$. Daraus folgt $p, q \notin g_K(S)$ für jedes $S \in \{D, E, F\}$ und man errechnet: $g_{K \cup W}(S) = g_K(S) = g_{\mathcal{C}_{y_n, y_{n-1}}(K)}(S) = g_{K_4}(S)$. Die Homomorphismen

$$(\lambda, \Lambda) : J_3 \to K \cup W \quad \text{und}$$
$$(\phi, \Phi) : J_3 \to K \cup W$$

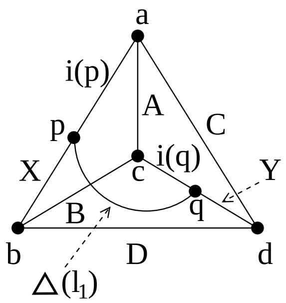


definiert durch $\lambda(0) := \lambda(3) := b, \lambda(1) := c, \lambda(2) := d, \Lambda(l_1) := D, \Lambda(l_2) := E, \Lambda(l_3) := F$ und $\phi(0) := \phi(3) := p, \phi(1) := a, \phi(2) := q, \Phi(l_1) := A, \Phi(l_2) := B, \Phi(l_3) := \Delta\,(l_1)$ sind Kreise in $K \cup W$ mit $C_1 := \text{Bild}(\lambda, \Lambda) \cap \text{Bild}(\phi, \Phi) =: C_2 = \emptyset$. Der Teilgraph $C_1 \cup C_2 < K \cup W$ lässt sich mithilfe von Satz 4.18 auf Seite 88 zu einem Teilgraphen $\widetilde{T}_0^{1c}$ von H hochheben, so dass $\widetilde{T}_0^{1c} \in sub(Z_2)$ gilt, siehe Seite 195.

Da $K_4 = \mathcal{C}_{y_n, y_{n-1}}(K)$ 3-zusammenhängend und einfach ist und p, q nach Voraussetzung nicht adjazent sind, ist $K \cup W$ nach [27], Theorem IV.18., p. 79 3-zusammenhängend nach Tutte. Aus $V_{K_4} \subset V_{K \cup W}$ und $E_{K_4} \subset E_{K \cup W}$ folgt zusammen mit Korollar 5.19 und Satz 5.20 auf Seite 134, dass $K \cup W$ 3-zusammenhängend und einfach ist. Deshalb ist H sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach und es tritt der Fall 1(c) der Behauptung ein.

Fall II: Der Fall I tritt nicht ein. Dann gibt es paarweise verschiedenen Ecken $a, b, c, d \in V_{K_4}$, für die $g_K(i(p)) = \{p, a\}, g_K(X) = \{p, b\}, g_K(i(q)) = \{q, c\}$ und $g_K(Y) = \{q, d\}$ gelten. Also gilt $V_{K_4} = \{a, b, c, d\}$. Seien $A, B, C, D \in E_{K_4}$ diejenigen Kanten von K_4, für die $g_{K_4}(A) = \{a, c\}, g_{K_4}(B) = \{c, b\}, g_{K_4}(C) = \{a, d\}$ und $g_{K_4}(D) = \{b, d\}$ gelten. Wegen

$$\begin{aligned} g_{K_4}(X) &= \psi\left(p, a, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, c, V_K) g_K(X) = \{a, b\} \text{ und} \\ g_{K_4}(Y) &= \psi\left(p, a, V_{\mathcal{C}_{y_{n-1}}(K)}\right) \psi(q, c, V_K) g_K(Y) = \{c, d\} \end{aligned}$$



gilt für jedes $S \in \{A, B, C, D\}$: $S \notin \{X, Y\}$, $p, q \notin g_K(S)$ und $g_{K_4}(S) = g_K(S)$. Man erhält $E_{K \cup W} = \{A, B, C, D, X, Y, \Delta\,(l_1), i(p), i(q)\}$ und $V_{K \cup W} = \{a, b, c, d, p, q\}$. Die Tabelle

	$\gamma(A)$ $:= e_1$	$\gamma(B)$ $:= e_2$	$\gamma(X)$ $:= e_3$	$\gamma(\Delta(l_1))$ $:= e_4$	$\gamma(Y)$ $:= e_5$	$\gamma(C)$ $:= e_6$	$\gamma(i(p))$ $:= e_7$	$\gamma(i(q))$ $:= e_8$	$\gamma(D)$ $:= e_9$
$w(a) := v_1$	1	0	0	0	0	1	1	0	0
$w(c) := v_2$	1	1	0	0	0	0	0	1	0
$w(b) := v_3$	0	1	1	0	0	0	0	0	1
$w(p) := v_4$	0	0	1	1	0	0	1	0	0
$w(q) := v_5$	0	0	0	1	1	0	0	1	0
$w(d) := v_6$	0	0	0	0	1	1	0	0	1

stellt die Inzidenzmatrix von $K \cup W$ bezüglich einer bijektiven Nummerierung (w, γ) : $K \cup W \to (\mathcal{V}_6, \mathcal{E}_9, h_{K \cup W})$ dar. Nach Satz 1.12 auf Seite 17 zusammen mit 3. der darauffolgenden Bemerkung und der Tabelle im Beweis von Satz 6.6 auf Seite 183 ist $K \cup W = K_{3,3}$. Mittels Satz 4.18 auf Seite 88 kann $K \cup W$ zu einem Teilgraphen $\widetilde{T}_0^{1b} \in sub\,(K_{3,3})$ von H hochgehoben werden (siehe unten). Es tritt also der Fall 1(b) der Behauptung ein.

Hochheben der Teilgraphen mittels Satz 4.18: Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $C_j := \mathcal{C}_{\lceil y_j \rceil}(G \cup W)$ und $C_0 := G \cup W$. Es sei $C < C_j$ mit $C \in sub\,(Z_2) \cup sub\,(K_{3,3})$ der von C_j nach C_{j-1} hochzuhebende Teilgraph. Dazu bezeichne $(i, I) : C \to C_j$ den Inklusionshomomorphismus. Es gelten

$$C_j = \mathcal{C}_{x_j, i(x_j), x'_j}\,(C_{j-1}) \quad \text{und} \quad \deg_{C_{j-1}}(x_j) = 2. \tag{7.4}$$

Nach Satz 5.44 auf Seite 168 hat C_j mit C_{j-1} keine Schlaufen, also gilt $Sch(x'_j, C_j) = \emptyset$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ liefert der Satz 4.13 auf Seite 84 die Gleichung

$$\deg_{C_j}(x'_j) = \deg_{C_{j-1}}(x'_j) = \cdots = \deg_{C_0}(x'_j) = \deg_{G \cup W}(x'_j) \geq 2,$$

daher gilt $Inz\left(x'_j, C_j\right) \neq \emptyset$. Somit tritt einer der Fälle A, B1, B2 oder B3 in Satz 4.18 auf Seite 88 ein. In den Fällen A, B1, B2 ist $C < C_j$ vermöge der Inklusion $\left(\tilde{i}, \tilde{I}\right)$. Tritt B3 ein, so gibt es wegen (7.4) eine Kante A von C_{j-1} mit

$$M_{x_j}^{x'_j}(i, I) = \left\{x \in Inz(x'_j, C) \mid I(x) = x \in Inz\,(x_j, C_{j-1})\right\} \subset Inz\,(x_j, C_{j-1}) = \{i(x_j), A\}\,.$$

Wegen $i(x_j) \notin E_C$, $x'_j \in \psi\left(x_j, x'_j, V_{C_{j-1}}\right) g_{C_{j-1}}(A) = g_{C_j}(A)$ und $M_{x_j}^{x'_j}(i, I) \neq \emptyset$ gilt $M_{x_j}^{x'_j}(i, I) = \{A\}$. In Satz 4.18.3d gilt daher $\deg_K(w) = \left|M_{x_j}^{x'_j}(i, I)\right| + 1 = 2$, also ist dort $K \in sub(C)$ wegen 3b. Deshalb ist K eine Unterteilung von Z_2 bzw. $K_{3,3}$ und $\left(\tilde{i}, \tilde{I}\right)$: $K \to C_{j-1}$ der gesuchte Inklusionshomomorphismus. □

7.3 Konstruktion einer Basis des Verschlingungsmoduls 3-zusammenhängender einfacher Graphen

Satz 7.5 *Es sei G ein bijektiv nummerierter orientierter 3-zusammenhängender einfacher Graph. Dann gibt es eine Menge von Teilgraphen von G, deren Elemente Unterteilungen von $K_{3,3}$, K_5 oder Z_2 sind und eine Basis des Verschlingungsmoduls von G induzieren. Mithilfe einer Kette von Teilgraphen gemäß Satz 7.1 auf Seite 187 lassen sich Basiselemente konstruieren.*

Beweis Es sei $J_0 < \cdots < J_k < J_{k+1} < \cdots < J_l = G$ eine von Satz 7.1 auf Seite 187 gelieferte Kette zu G. Es wird gezeigt, wie für jedes $k \in \{0, \ldots, l-1\}$ eine Basis des Verschlingungsmoduls von J_k zu einer Basis des Verschlingungsmoduls von J_{k+1} ergänzt werden kann. Damit beschäftigt sich der gesamte Abschnitt 7.3. Dazu muss man sich auf derartige Graphen $\widetilde{J}_k$ und $\widetilde{J}_{k+1}$, von denen J_k bzw. J_{k+1} Unterteilungen sind, zurückziehen, dass $\widetilde{J}_{k+1}$ aus genau einer Kante mehr besteht als $\widetilde{J}_k$. Da die jeweiligen Verschlingungsmoduln nach Satz 4.29 auf Seite 103 isomorph sind, genügt es eine Basisergänzung von $\widetilde{J}_k$ nach $\widetilde{J}_{k+1}$ durchzuführen. Dabei können aufgrund der speziellen Gestalt von $\widetilde{J}_k$ und $\widetilde{J}_{k+1}$ die Sätze 7.3 und 7.2 auf Seite 188 benutzt werden.

Unter der Annahme, dass eine derartige Basisergänzung gelingt, wird im folgenden Abschnitt 7.3.1 auf Seite 197 erklärt, wie eine vorgelegte Basis des Verschlingungsmoduls von J_k nach $\widetilde{J}_k$ „heruntergedrückt“ und die ergänzte Basis des Verschlingungsmoduls von $\widetilde{J}_{k+1}$ nach J_{k+1} wieder „hochgehoben“ werden kann.

Der Abschnitt 7.3.2 auf Seite 200 über die Basisergänzung zerfällt inhaltlich in drei Teile: Es wird eine Menge von Teilgraphen von $\widetilde{J}_{k+1}$ konstruiert (7.3.2.1 ab Seite 200), aus der nach bestimmten Kriterien Elemente ausgewählt (7.3.2.2 ab Seite 207) und zur Basisergänzung verwendet werden (7.3.2.3 ab Seite 217).

Abschnitt 7.3.2.1 beschäftigt sich bis 7.8.17. auf Seite 204 mit technischen Vorbereitungen. Dabei arbeitet man mit einer Kette für $\widetilde{J}_k$, die Satz 7.2 auf Seite 188 liefert. Auf gewisse Unterteilungen der Graphen dieser Kette lässt sich in 7.8.18. der Satz 7.3 anwenden, um die gewünschten Kandidaten T_x zu erhalten. Diese müssen in 7.9 auf Seite 205 aus technischen Güinden zu Teilgraphen $\widetilde{T}_x$ von $\widetilde{J}_{k+1}$ „hochgehoben“ werden.

Zu Beginn von 7.3.2.2 wird erläutert, was unter der Auswahl aus der Menge der Kandidaten zu verstehen ist. Ein Resultat aus [14] ermöglicht es, die Anzahl der zur Ergänzung benötigten Basiselemente zu berechnen. Ziel des Abschnittes ist, diese Zahl als Kardinalität einer Menge von Teilgraphen von $\widetilde{J}_{k+1}$ zu interpretieren.

In Abschnitt 7.3.2.3 wird nachgewiesen, dass man so ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des Verschlingungsmoduls von $\widetilde{J}_{k+1}$ erhält. Um dies zu beweisen werden bis zu Satz 7.20 auf Seite 226 Vorbereitungen getroffen. Zu diesem Beweis sei hier auf die Erläuterung vor Satz 7.20 hingewiesen.

Sämtliche in diesem Abschnitt vorkommenden Graphen sind orientiert. Ein Teilgraph trägt die auf seine Kanten eingeschränkte Orientierung. Nummerierungen sind stets bijektiv. Es gelten die Abkürzungen von Seite 92. Ist w eine Eckennummerierung und γ eine

Kantennummerierung von G so sei $\mathcal{G}(G) := \mathcal{G}(G, w, \gamma) := \mathrm{Kern}\, G_{(G,w,\gamma)}$.

7.3.1 Kontraktionen zweiwertiger Ecken

Satz 7.1 liefert eine Kette $J_0 < J_1 < \cdots < J_k < J_{k+1} < \cdots < J_l = G$ von Teilgraphen von G mit $J_0 \in sub(K_4)$ und $J_{k+1} = J_k \cup W_k$ für jedes $k \in \{0, \ldots, l-1\}$. Nun wendet man Satz 5.54 auf Seite 175 auf J_k und J_{k+1} für $k \in \{0, \ldots, l-1\}$ an. Dabei setzt man $l \geq 1$ voraus, denn für $l = 0$ ist wegen Satz 6.4 auf Seite 182 nichts zu zeigen. Hier sei $U := U(J_k, W_k)$ und $I := |U|$. Wie in Satz 5.54(c),(d) werden die Graphen $\widetilde{J_k} := \mathcal{C}_{\lceil x_I \rceil}(J_k)$ und $\widetilde{J}_{k+1} := \mathcal{C}_{\lceil z_{n-1} \rceil}(\mathcal{C}_{\lceil x_I \rceil}(J_{k+1}))$ definiert. Sei ϵ_k die Kante aus Satz 5.54(f), so dass $\widetilde{J}_{k+1} - \{\epsilon_k\} = \widetilde{J_k}$ gilt. Da J_k und J_{k+1} nach Satz 7.1 sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach sind, ist $\widetilde{J_k}$ nach Satz 5.54(i) ebenfalls topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach, und $\widetilde{J}_{k+1}$ sowohl 3-zusammenhängend als auch einfach. Nach Satz 7.2 gibt es also Kette $G_0 < G_1 < \cdots < G_q = \widetilde{J_k}$ von Teilgraphen von $\widetilde{J}_{k+1}$, so dass für $i \in \{0, \ldots, q-1\}$

1. G_i ist topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach,

2. $G_{i+1} = G_i \cup P_i$ (Hinzufügen eines Weges),

3. $G_i \cup W$ oder $G_{i+1} \cup W$ ist topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach,

4. $V_W \subset V_{G_0}$

gelten. Dabei ist $W := (\{\zeta_1, \zeta_2\}, \{\epsilon_k\}, g_W)$ mit $g_W(\epsilon_k) := g_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k)$ und $\zeta_1, \zeta_2 \in V_{G_0}$ der zu ϵ_k gehörige Teilgraph von $\widetilde{J}_{k+1}$, und

$$(d_i, D_i) : J'_{n_i} \to G_i \cup P_i = G_{i+1} \tag{7.5}$$

sind für $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ Wege mit $\mathrm{Bild}(d_i, D_i) = P_i$. Nun soll aus einer Basis $\mathcal{B}_k$ von $\mathcal{G}(J_k)$ eine Basis $\mathcal{B}_{k+1}$ für $\mathcal{G}(J_{k+1})$ konstruiert werden.

Zur Abkürzung der Notation wird in diesem Abschnitt 7.3.1 der zu einem injektiven Homomorphismus bijektiv nummerierter orientierter Graphen X und Y gehörige induzierte Homomorphismus der Verschlingungsmoduln aus Definition 2.42 auf Seite 57 stets mit $\Psi_X^Y : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(Y)$ bezeichnet.

Es sei $B := sub(K_{3,3}) \cup sub(K_5) \cup sub(Z_2)$ und zunächst $\mathcal{B}_k := \left\{y_1, \cdots, y_{N_{J_k}}\right\} \neq \emptyset$ mit $N_{J_k} \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ seien bereits Teilgraphen $T_i < J_k$ und dazugehörige Inklusionshomomorphismen $(b_i, B_i) : T_i \to J_k$ gegeben, so dass

5. T_i ist isomorph zu einem Graphen aus B und

6. $\langle t_i \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathcal{G}(T_i) \;\Rightarrow\; y_i = \Psi_{T_i}^{J_k}(t_i)$

gelten. Die erzeugenden Elemente t_i aus 6. werden von den Sätzen 6.2 auf Seite 181, 6.6 auf Seite 183 sowie 6.8 auf Seite 184 geliefert. Es gilt also

$$\mathcal{B}_k = \left\{ \Psi_{T_i}^{J_k}(t_i) \;\middle|\; 1 \leq i \leq N_{J_k} \right\}. \tag{7.6}$$

Für $\mathcal{B}_k = \emptyset$ entfallen die obigen Betrachtungen. Dieser Fall tritt für $k = 0$ ein, denn für $J_0 \in sub(K_4)$ gilt $\mathcal{G}(J_0) = 0$ nach Satz 6.4 auf Seite 182 und Satz 4.29 auf Seite 103.

Konstruktion einer Basis $\boldsymbol{\mathcal{B}_{k+1}}$: Es sei $\mathcal{B}_k \neq \emptyset$. Gemäß Satz 4.16 auf Seite 86 und Satz 4.17 auf Seite 87 induzieren die Abbildungen (b_i, B_i) injektive Homomorphismen $\left(\widetilde{b}_i, \widetilde{B}_i\right) : \widetilde{T}_i \to \widetilde{J}_k$, $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$. Dabei ist $T_i \in sub\left(\widetilde{T}_i\right)$. Mithilfe der Abbildung i_{J_k} von Satz 5.54(b) definiert man

$$N(T_i) := \{ j \in \{1, \ldots, I\} \mid i_{J_k}(u_j) \in E_{T_i} \} \subset \{1, \ldots, I\}$$

$$\text{und} \quad N^c(T_i) := \{1, \ldots, I\} \setminus N(T_i)$$

für $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$. Wenn $N(T_i) := \{j_1, \ldots, j_s\} \neq \emptyset$ und $N^c(T_i) := \{j_{s+1}, \ldots, j_I\} \neq \emptyset$ gilt, gibt es für jedes $\alpha \in \{1, \ldots, I\}$ laut Satz 5.27 auf Seite 139 Ecken $\beta_{j_\alpha} \in V_{J_k}$, so dass mit

$$\hat{x}_{j_\alpha} := (u_{j_\alpha}, i_{J_k}(u_{j_\alpha}), \beta_{j_\alpha}) \quad \text{und}$$

$$\overline{J}_k := \mathcal{C}_{\hat{x}_{j_s}, \ldots, \hat{x}_{j_1}}(J_k)$$

$\widetilde{J}_k = \mathcal{C}_{\hat{x}_{j_I}, \ldots, \hat{x}_{j_{s+1}}}\left(\overline{J}_k\right)$ sowie $\widetilde{T}_i = \mathcal{C}_{\hat{x}_{j_s}, \ldots, \hat{x}_{j_1}}(T_i)$ gelten. Die Sätze 4.31 auf Seite 105 und 4.34 auf Seite 110 liefern das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\langle t_i \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathcal{G}(T_i) \arrow[rr, "\Psi_{T_i}^{J_k}"] & & \mathcal{G}(J_k) \\
\mathcal{G}\left(\widetilde{T}_i\right) \arrow[u, "op(\hat{x}_{j_s}) \circ \cdots \circ op(\hat{x}_{j_1})"'] \arrow[rr, "\Psi_{\widetilde{T}_i}^{\overline{J}_k}"] \arrow[dr, "\Psi_{\widetilde{T}_i}^{\widetilde{J}_k}"'] & & \mathcal{G}\left(\overline{J}_k\right) \arrow[u, "op(\hat{x}_{j_s}) \circ \cdots \circ op(\hat{x}_{j_1})"'] \\
& \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right) \arrow[ur, "op(\hat{x}_{j_I}) \circ \cdots \circ op(\hat{x}_{j_{s+1}})"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.7}$$

Wenn $N(T_i) = \emptyset$ ist, so gelten $\overline{J}_k = J_k$ und $\widetilde{T}_i = T_i$ analog zu Satz 5.54(g) für $m = 0$. Für $N^c(T_i) = \emptyset$ gilt $\widetilde{J}_k = \overline{J}_k$. An den entsprechenden Stellen stehen im Diagramm (7.7) die identischen Abbildungen. Mit $\widetilde{t}_i := [op(\hat{x}_{j_s}) \circ \cdots \circ op(\hat{x}_{j_1})]^{-1}(t_i)$ ist

$$\left\{ \Psi_{\widetilde{T}_i}^{\widetilde{J}_k}\left(\widetilde{t}_i\right) \;\middle|\; 1 \leq i \leq N_{J_k} \right\} \tag{7.8}$$

nach 6., (7.6), (7.7) und Satz 5.37 auf Seite 154 eine Basis von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)$. Da $\Psi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}}$ injektiv ist, ist

$$\widetilde{\mathcal{B}}_k := \left\{\Psi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}} \circ \Psi_{\widetilde{T}_i}^{\widetilde{J}_k}\left(\widetilde{t}_i\right) \mid 1 \leq i \leq N_{J_k}\right\} \tag{7.9}$$

linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ in $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Für $\mathcal{B}_k = \emptyset$ entfallen die obigen Betrachtungen und man setzt $\widetilde{\mathcal{B}}_k := \emptyset$ sowie $N_{J_k} := 0$.

Es sei nun $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ bereits zu einem linear unabhängigen Erzeugendensystem $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} := \widetilde{\mathcal{B}}_k \cup \left\{\widetilde{y}_{N_{J_k}+1}, \ \ldots, \ \widetilde{y}_{N_{\widetilde{J}_{k+1}}}\right\}$ von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ ergänzt worden, so dass $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} \neq \widetilde{\mathcal{B}}_k$ gilt, und es zu jedem $j \in \left\{N_{J_k}+1, \ldots, N_{\widetilde{J}_{k+1}}\right\}$ einen Teilgraphen $\widetilde{T}_j < \widetilde{J}_{k+1}$ sowie eine zugehörige Inklusion $\left(\widetilde{b}_j, \widetilde{B}_j\right) : \widetilde{T}_j \to \widetilde{J}_{k+1}$ mit den Eigenschaften

7. $\widetilde{T}_j$ ist isomorph zu einem Graphen aus B,

8. $\left\langle \widetilde{t}_j \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathcal{G}\left(\widetilde{T}_j\right) \ \Rightarrow \ \widetilde{y}_j = \Psi_{\widetilde{T}_j}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_j\right)$

für jedes $j \in \left\{N_{J_k}+1, \ldots, N_{\widetilde{J}_{k+1}}\right\}$ gibt. Da $\widetilde{J}_{k+1}$ keine Schlaufen hat, gibt es nach Satz 4.18 auf Seite 88 für jeden Index $j \in \left\{N_{J_k}+1, \ldots, N_{\widetilde{J}_{k+1}}\right\}$ Graphen T_j mit $T_j \in sub\left(\widetilde{T}_j\right)$ und injektive Homomorphismen $(b_j, B_j) : T_j \to J_{k+1}$, so dass (b_j, B_j) von $\left(\widetilde{b}_j, \widetilde{B}_j\right)$ induziert wird. Betrachte für $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ und $j \in \left\{N_{J_k}+1, \ldots, N_{\widetilde{J}_{k+1}}\right\}$ die Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(T_i) \arrow[r, "\Psi_{T_i}^{J_k}"] & \mathcal{G}(J_k) \arrow[r, "\Psi_{J_k}^{J_{k+1}}"] & \mathcal{G}(J_{k+1}) & \mathcal{G}(T_j) \arrow[l, "\Psi_{T_j}^{J_{k+1}}"'] \\
\mathcal{G}\left(\widetilde{T}_i\right) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\Psi_{\widetilde{T}_i}^{\widetilde{J}_k}"'] & \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right) \arrow[u, "\cong"', "\widetilde{op}(x_I)"] \arrow[r, "\Psi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}}"'] & \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) \arrow[u, "\cong"', "\widetilde{op}(x_I)\circ\widetilde{op}(z_{n-1})"] & \mathcal{G}\left(\widetilde{T}_j\right) \arrow[u, "\cong"', "\Gamma"] \arrow[l, "\Psi_{\widetilde{T}_j}^{\widetilde{J}_{k+1}}"]
\end{tikzcd} . \tag{7.10}$$

Das linke Diagramm kommutiert nach (7.7) und Satz 5.37 auf Seite 154. Das mittlere Diagramm kommutiert laut Satz 5.54(g),(h). Abhängig von Bild$(\widetilde{b}_j, \widetilde{B}_j)$ liefern die Sätze 4.32 auf Seite 107 und 4.33 auf Seite 109 das rechte Diagramm. Je nachdem, welche Fälle eintreten ist Γ entweder die Identität oder eine Komposition geeigneter $op\,(\cdot)$-Isomorphismen.

Für $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_k$ entfallen diese Betrachtungen, ansonsten ergibt sich zusammen mit 8. und $t_j := \Gamma\left(\widetilde{t}_j\right)$:

$$\widetilde{op}\,(x_I) \circ \widetilde{op}\,(z_{n-1})\,(\widetilde{y}_j) = \Psi_{T_j}^{J_{k+1}}\,(t_j)$$

für $j \in \left\{N_{J_k}+1, \ldots, N_{\widetilde{J}_{k+1}}\right\}$. Ist $\mathcal{B}_k \neq \emptyset$ berechnet man

$$\widetilde{op}\,(x_I) \circ \widetilde{op}\,(z_{n-1})\,(\widetilde{y}_i) = \Psi_{J_k}^{J_{k+1}}\,(y_i) = \Psi_{T_i}^{J_{k+1}}\,(t_i)$$

für $\widetilde{y}_i := \Psi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}} \circ \Psi_{\widetilde{T}_i}^{\widetilde{J}_k}\left(\widetilde{t}_i\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_k$ und $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ mithilfe des Diagramms (7.10).

Setzt man

$$N_{J_{k+1}} := \begin{cases} N_{\widetilde{J}_{k+1}} & : \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} \neq \widetilde{\mathcal{B}}_k \\ N_{J_k} & : \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_k \end{cases}$$

ergibt sich $\mathcal{B}_{k+1} := \left\{\Psi_{T_i}^{J_{k+1}}(t_i) \mid 1 \leq i \leq N_{J_{k+1}}\right\}$ als Basis von $\mathcal{G}(J_{k+1})$, falls $N_{J_{k+1}} \geq 1$ ist. Wenn $N_{J_{k+1}} = 0$ ist, tritt der Fall $\emptyset = \widetilde{\mathcal{B}}_k = \widetilde{\mathcal{B}}_{k+1}$ ein. Dann gilt $\mathcal{G}(J_{k+1}) = \mathcal{G}(J_k) = 0$. Insgesamt hat $\mathcal{B}_{k+1}$ dieselbe Gestalt wie $\mathcal{B}_k$ in (7.6).

7.3.2 Basisergänzung

7.3.2.1 Konstruktion von Kandidaten

Bei den in der Überschrift erwähnten Kandidaten handelt es sich um Teilgraphen $\widetilde{T}_x$ von $\widetilde{J}_{k+1}$, die für die Basisergänzung benutzt werden sollen. Deren Konstruktion beginnt auf Seite 203. Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt. Vorgelegt sei die Kette $G_0 < G_1 < \cdots < G_q = \widetilde{J}_k < \widetilde{J}_{k+1} = \widetilde{J}_k \cup W$ aus 7.3.1. Es seien $q, k \in \mathbb{N}_0$, $S_k := \{G_0, \ldots, G_q\}$, $A_k := \{G_x \in S_k \mid G_x \cup W$ ist nicht topologisch 3-zusammenhängend oder nicht topologisch einfach$\}$ und $M_k := S_k \setminus A_k = \{G_x \in S_k \mid G_x \cup W$ ist topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach$\}$. Die Menge M_k ist nicht leer, denn wegen $\widetilde{J}_{k+1} = G_q \cup W$ ist $G_q \in M_k$. Diese Mengen werden als

$$M_k = \{G_{j_1}, \ldots, G_{j_{m_k}}\} \quad \text{und} \quad A_k = \{G_{i_1}, \ldots, G_{i_{a_k}}\}, \text{ falls } A_k \neq \emptyset,$$

geschrieben. Dabei gelte $a_k := |A_k|$, $m_k := |M_k|$, und für $\alpha < \beta$ seien jeweils $i_\alpha < i_\beta$ bzw. $j_\alpha < j_\beta$. Man sammelt Indizes von M_k in der Menge $I_k := \{j_1, \ldots, j_{m_k}\} \setminus \{q\} \subset \{0, \ldots q-1\}$. Für diese gilt

$$I_k = \begin{cases} \emptyset & : \quad M_k = \{G_q\} \\ \{j_1, \ldots, j_{m_k - 1}\} & : \quad M_k \neq \{G_q\} \end{cases}. \tag{7.11}$$

Wenn $I_k \neq \emptyset$ ist, werden zu jedem Element $x \in I_k$ Graphen $H_x := G_{x+1} \cup W < \widetilde{J}_{k+1}$, dazugehörige Inklusionen $(i'_x, I'_x) : G_{x+1} \to H_x$ und die Kompositionen $(d_x^W, D_x^W) := (i'_x, I'_x) \circ (d_x, D_x)$ definiert, siehe (7.5). Man erhält folgendes Diagramm:

$$(d_x^W, D_x^W) : J'_{n_x} \overset{(d_x, D_x)}{\longrightarrow} G_x \cup P_x = G_{x+1} \overset{(i'_x, I'_x)}{\longrightarrow} H_x. \tag{7.12}$$

Lemma 7.6 *Es sei I_k nicht leer. Für $x \in I_k$ gelten:*

9. $P_x = \mathit{Bild}(d_x^W, D_x^W)$.

10. *Der Graph H_x ensteht aus $G_x \cup W$ durch Hinzufügen des Weges (d_x^W, D_x^W). Es gilt $H_x = (G_x \cup W) \cup P_x$.*

Beweis **Zu 9.:** Nach Voraussetzung gilt $P_x = \mathrm{Bild}(d_x, D_x)$. Da i'_x und I'_x Inklusionen sind, und (i'_x, I'_x) ein Homomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Zu 10.: Man berechnet

$$\begin{aligned} E_{H_x} &= E_{G_{x+1} \cup W} = E_{G_{x+1}} \cup E_W = E_{G_x} \cup E_{P_x} \cup E_W \\ &= E_{G_x \cup W} \cup E_{P_x} \overset{9.}{=} E_{G_x \cup W} \cup \mathrm{Bild}(D_x^W) \qquad \text{sowie} \\ E_{G_x \cup W} \cap \mathrm{Bild}(D_x^W) &= (E_{G_x} \cup E_W) \cap E_{P_x} = (E_{G_x} \cap E_{P_x}) \cup (E_W \cap E_{P_x}) \overset{2., \text{ S.197}}{=} \emptyset. \end{aligned}$$

Wegen $V_W \overset{4., \text{ S.197}}{\subset} V_{G_0}$ gilt $V_{H_x} = V_{G_{x+1}}$ und $V_{G_x} = V_{G_x} \cup V_W$. Daraus folgen:

$$\begin{aligned} &V_{G_x \cup W} \cap \mathrm{Bild}\, d_x^W = V_{G_x} \cap \mathrm{Bild}(d_x) = \{d_x(0), d_x(n_x)\} = \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}, \\ &V_{H_x} = V_{G_{x+1}} = V_{G_{x+1}} \cup V_W = V_{G_x} \cup V_{P_x} \cup V_W \overset{9.}{=} V_{G_x \cup W} \cup \mathrm{Bild}(d_x^W). \end{aligned}$$

Damit sind die Bedingungen der Definition 5.50 auf Seite 172 erfüllt. □

Es sei weiterhin $I_k \neq \emptyset$. Mit Hilfe von Satz 5.26 werden Spezielle injektive Abbildungen $i_x : V_2\left(J'_{n_x}\right) \to E_{J'_{n_x}}$ gewählt, sofern $V_2\left(J'_{n_x}\right) \neq \emptyset$ ($\Leftrightarrow n_x \geq 2$) gilt. Satz 5.27 liefert zu jedem $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$ Elemente $\beta_\sigma \in V_{J'_{n_x}}$, so dass mit $y_\sigma := (\sigma, i_x(\sigma), \beta_\sigma)$ der Graph

$$\mathcal{J}_x := \begin{cases} \mathcal{C}_{\lceil y_{n_x - 1} \rceil}(J'_{n_x}) & : \quad V_2(J'_{n_x}) \neq \emptyset \\ J'_{n_x} & : \quad V_2(J'_{n_x}) = \emptyset \end{cases}$$

definiert ist. Der injektive Homomorphismus $\left(d_x^W, D_x^W\right)$ aus (7.5) auf Seite 197 ist ein Isomorphismus auf sein Bild und liefert daher mit $z_\sigma := \left(d_x^W(\sigma), D_x^W(i_x(\sigma)), d_x^W(\beta_\sigma)\right)$, $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$ einen wohldefinierten Graphen

$$\Theta_x := \begin{cases} \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x - 1} \rceil}(H_x) & : \quad V_2(J'_{n_x}) \neq \emptyset \\ H_x & : \quad V_2(J'_{n_x}) = \emptyset \end{cases}$$

sowie einen nach Satz 4.16 auf Seite 86 injektiven Homomorphismus $(\widetilde{d}_x, \widetilde{D}_x) : \mathcal{J}_x \to \Theta_x$.

Lemma 7.7 *Sei I_k nicht leer. Für $x \in I_k$ gelten:*

11. $\exists! \sigma_x \in \{1, \ldots, n_x\} : l_{\sigma_x} \in E_{J'_{n_x}} \setminus \mathit{Bild}(i_x)$.

12. $\sigma \in \{1, \ldots, \sigma_x - 1\} \Rightarrow i_x(\sigma) = l_\sigma, \quad \sigma \in \{\sigma_x, \ldots, n_x - 1\} \Rightarrow i_x(\sigma) = l_{\sigma+1}$.

13. $\mathcal{J}_x = (\{0, n_x\}, \{l_{\sigma_x}\}, g_{\mathcal{J}_x})$ *mit* $\nu g_{\mathcal{J}_x}(l_{\sigma_x}) = \{0, n_x\}$.

14. $\Theta_x = G_x \cup W \cup \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x - 1} \rceil}(P_x)$.

15. *$W_x := \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1}\rceil}(P_x) = \left(\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\}, \{D_x^W(l_{\sigma_x})\}, g_{W_x}\right)$ mit $\nu g_{W_x}(D_x^W(l_{\sigma_x})) = \{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\}$.*

Mithilfe von 11. lassen sich Kanten $\varepsilon_x := D_x^W(l_{\sigma_x}) \in E_{H_x}$ eindeutig auszeichnen. Für diese Kanten ε_x und die Kante ϵ_k von W gilt:

16. *Die Graphen $\Theta_x - \{\varepsilon_x\}$, $\Theta_x - \{\varepsilon_x, \epsilon_k\}$ und $\Theta_x - \{\epsilon_k\}$ sind sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach.*

Beweis Sei zunächst $n_x = 1$. Dann ist $\sigma_x = 1$ in 11., $\mathcal{J}_x = J_1'$ in 13., $\mathcal{C}_{\lceil z_0\rceil}(P_x) \overset{\text{Def.}}{=} P_x$, $W_x = P_x$ in 15. und $\Theta_x = H_x = G_x \cup W \cup W_x$ in 14. Für die Aussagen 11. bis 15. gelte nun $n_x \geq 2$ als zusätzliche Voraussetzung.

Zu 11.: i_x injektiv $\Rightarrow$ $|\text{Bild}(i_x)| = n_x - 1 < n_x = \left|E_{J'_{n_x}}\right|$ $\Rightarrow$ $\exists! \sigma_x : l_{\sigma_x} \notin \text{Bild}(i_x)$.

Zu 12.: Beweis der zweiten Aussage: Da i_x eine Spezielle injektive Abbildung ist, gilt $i_x(\sigma_x) \in \{l_{\sigma_x}, l_{\sigma_x+1}\}$. Aus 11. folgt daher $i_x(\sigma_x) = l_{\sigma_x+1}$. Also muss für jedes $\sigma > \sigma_x$ gelten : $i_x(\sigma) \in \{l_\sigma, l_{\sigma+1}\} = \{i_x(\sigma-1), l_{\sigma+1}\} \overset{i_x \text{ inj.}}{\Rightarrow} i_x(\sigma) = l_{\sigma+1}$.

Die erste Aussage von 12. beweist man analog. Vergleiche die Abbildung auf Seite 219.

Zu 13.: Für die Kanten- bzw. Eckenmenge von $\mathcal{J}_x$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{J}_x} &= E_{J'_{n_x}} \setminus \{i_x(n_x-1), \ldots, i_x(1)\} \overset{11.}{=} \{l_{\sigma_x}\}, \\ V_{\mathcal{J}_x} &= V_{J'_{n_x}} \setminus \{n_x - 1, \ldots, 1\} = \{0, n_x\}. \end{aligned}$$

Mithilfe von 12. erhält man $y_\sigma = (\sigma, l_\sigma, 0)$ für $\sigma \in \{1, \ldots, \sigma_x - 1\}$ und $y_\sigma = (\sigma, l_{\sigma+1}, \sigma+1)$ für $\sigma \in \{\sigma_x, \ldots, n_x - 1\}$. Daher berechnet man

$$\begin{aligned} \nu g_{\mathcal{J}_x}(l_{\sigma_x}) &= \mathcal{P}_2 \left(\psi\left(n_x - 1, n_x, V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{n_x-2}\rceil}(J'_{n_x})}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(\sigma_x, \sigma_x + 1, V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{\sigma_x-1}\rceil}(J'_{n_x})}\right)\right. \\ &\quad \left. \circ \psi\left(\sigma_x - 1, 0, V_{\mathcal{C}_{\lceil y_{\sigma_x-2}\rceil}(J'_{n_x})}\right) \circ \cdots \circ \psi\left(1, 0, V_{J'_{n_x}}\right)\right)(\{\sigma_x - 1, \sigma_x\}) \\ &= \{n_x, 0\}. \end{aligned}$$

Zu 14.: Sei $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$.

a) $D_x^W i_x(\sigma) \in E_{P_x} \setminus E_{G_x \cup W}$, denn: $D_x^W i_x(\sigma) \in \text{Bild}(D_x^W) \overset{9.}{=} E_{P_x} \overset{2., \text{ S.197.}}{=} E_{G_{x+1}} \setminus E_{G_x}$ $\overset{E_W \cap E_{P_x} = \emptyset}{\Rightarrow} D_x^W i_x(\sigma) \in E_{P_x} \setminus (E_{G_x} \cup E_W)$.

b) $d_x^W(\sigma) \in V_{P_x} \setminus V_{G_x \cup W}$, denn nach 2., S.197. gilt: $d_x^W(\sigma) \in V_{G_{x+1}} \setminus V_{G_x} \overset{V_W \subseteq V_{G_0}}{\Rightarrow} d_x^W(\sigma) \in V_{P_x} \setminus (V_{G_x} \cup V_W)$.

Wegen a) und b), lässt sich Satz 4.9 auf Seite 79 anwenden:

$$\Theta_x = \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1}\rceil}(H_x) \overset{10.}{=} \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1}\rceil}((G_x \cup W) \cup P_x) \overset{4.9}{=} G_x \cup W \cup \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1}\rceil}(P_x).$$

Zu 15.: Man berechnet:

$$\begin{aligned}
E_{W_x} &= E_{P_x} \setminus D_x^W(\mathrm{Bild}(i_x)) \overset{9.}{=} D_x^W\left(E_{J'_{n_x}}\right) \setminus D_x^W(\mathrm{Bild}(i_x)) \overset{11.,\, D_x^W \text{ inj.}}{=} D_x^W(l_{\sigma_x}), \\
V_{W_x} &= V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(1), \ldots, d_x^W(n_x - 1)\right\} \overset{9.}{=} d_x^W\left(V_{J'_{n_x}}\right) \setminus d_x^W\left(V_{J'_{n_x}} \setminus \{0, n_x\}\right) \\
&\overset{d_x^W \text{ inj.}}{=} \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\left(d_x^W, D_x^W\right) : J'_{n_x} \to \mathrm{Bild}(d_x^W, D_x^W) = P_x$ induziert $\left(\widetilde{d_x^W}, \widetilde{D_x^W}\right) : \mathcal{J}_{n_x} \to W_x$ laut Satz 4.16 auf Seite 86 und es gilt:

$$\nu g_{W_x}\left(D_x^W(l_{\sigma_x})\right) = \nu g_{W_x}\left(\widetilde{D_x^W}(l_{\sigma_x})\right) = \mathcal{P}_2\left(\widetilde{d_x^W}\right) \circ \nu g_{\mathcal{J}_{n_x}}(l_{\sigma_x}) \overset{13.}{=} \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}.$$

Zu 16.: Für $n_x \geq 1$ gelten:

a) $\Theta_x - \{\varepsilon_x\} \overset{\text{Def.}}{=} \Theta_x - \left\{D_x^W(l_{\sigma_x})\right\} \overset{14.,15.}{=} G_x \cup W$. Wegen $x \in I_k$ ist $G_x \in M_k$, daher ist $G_x \cup W$ sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach.

b) $\Theta_x - \{\varepsilon_x, \epsilon_k\} \overset{14.,15.}{=} G_x$. Da $G_x \in S_k$ ein Graph der vorgelegten Kette ist, ist er topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach.

c) $\Theta_x - \{\epsilon_k\} \overset{14.}{=} G_x \cup W_x \overset{15.}{=} G_x \cup \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(P_x) \overset{4.9}{=} \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(G_x \cup P_x) = \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(G_{x+1})$. Da $G_{x+1} \in S_k$ topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach ist, gilt dies nach Satz 5.46 auf Seite 170 und 5.49 auf Seite 171 auch für $\mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(G_{x+1})$.

□

Nun wird die Konstruktion von gewissen Inklusionshomomorphismen $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right) : \widetilde{T}_x \to H_x$, die sich als geeignet für die Basisergänzung heraustellen werden, vorbereitet. Dazu definiert man die Menge

$$X := \{(G_x, G_{x+1}) \in S_k \times S_k \mid G_x \in M_k \ \wedge \ G_{x+1} \in M_k\} \tag{7.13}$$

und, falls $X \neq \emptyset$, eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc}
\gamma : & X & \longrightarrow & \{P_i \mid 0 \leq i \leq q-1, P_i \text{ aus } 2., S.197\} \\
& (G_x, G_{x+1}) & \mapsto & P_x
\end{array}.$$

Darüberhinaus benötigt man eine Teilmenge

$$C := \begin{cases} \{P_i \in \mathrm{Bild}(\gamma) \mid \zeta_1 \in V_{P_i} \ \vee \ \zeta_2 \in V_{P_i}\} & : \ X \neq \emptyset \\ \emptyset & : \ X = \emptyset \end{cases} \tag{7.14}$$

des Bildes von γ und eine dazugehörige Abbildung

$$\begin{aligned} \delta: \quad \mathrm{Bild}(\gamma) \setminus C &\longrightarrow E_{\widetilde{J}_{k+1}} \\ P_x &\mapsto \varepsilon_x \end{aligned} \tag{7.15}$$

sofern $\mathrm{Bild}(\gamma) \setminus C \neq \emptyset$ ist. Dabei sind die Elemente ε_x die in Lemma 7.7 auf Seite 201 definierten Kanten. Die Abbildung δ ist wohldefiniert, denn $P_x \in \mathrm{Bild}(\gamma)$ impliziert $x \in I_k$ gemäß der Definition von X. Falls $X = \emptyset$ ist, seien $\mathrm{Bild}\,\gamma := \emptyset$ und $\mathrm{Bild}\,\delta := \emptyset$. Wenn $\mathrm{Bild}(\gamma) \setminus C = \emptyset$ gilt, sei $\mathrm{Bild}\,\delta := \emptyset$.

Lemma 7.8 *Es sei $x \in I_k \neq \emptyset$ und $\varepsilon_x \in Bild(\delta) \neq \emptyset$. Dann gelten:*

17. $W_x \cap W = \emptyset$.

18. Es gibt einen Graphen T_x, der isomorph zu einem Element der Menge B auf Seite 197 ist, und Inklusionen $(b_x, B_x) : T_x \to \Theta_x$, so dass T_x, ε_x und ϵ_k eine der folgenden Aussagen erfüllen:

(a) Ist $T_x \in sub\,(Z_2)$, so sind ε_x und ϵ_k in verschiedenen Komponenten von T_x enthalten.

(b) Ist $T_x \in sub\,(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} \in \{K_5, K_{3,3}\}$, so sind $\varepsilon_x, \epsilon_k \in E_{\mathcal{K}} \subset E_{T_x}$ nicht inzident in $\mathcal{K}$.

Beweis **Zu 17.:**

a) $E_{W_x} \cap E_W \overset{15.}{=} \{\varepsilon_x\} \cap \{\epsilon_k\} = \emptyset$, denn $\varepsilon_x = D_x^W(l_{\sigma x}) \overset{9.}{\in} E_{P_x} \subset E_{\widetilde{J}_k}$ und $\epsilon_k \notin E_{\widetilde{J}_k}$.

b) Da G_{x+1} aus G_x durch Hinzufügen des Weges (d_x, D_x) ensteht, gilt

$$V_{P_x} \cap V_{G_x} = \left\{ d_x^W(0), d_x^W(n_x) \right\} \overset{15.}{=} V_{W_x}. \tag{7.16}$$

Sei $\delta\,(P_x) = \varepsilon_x$: $P_x \notin C \;\Rightarrow\; \zeta_1 \notin V_{P_x} \;\wedge\; \zeta_2 \notin V_{P_x} \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \zeta_1 \notin V_{W_x} \;\wedge\; \zeta_2 \notin V_{W_x} \;\Rightarrow\; V_W \cap V_{W_x} = \emptyset$.

Zu 18.: Wegen 16. und 17. lässt sich Satz 7.3 auf Seite 188 anwenden. □

Es sei $x \in I_k$ und $\varepsilon_x \in \mathrm{Bild}(\delta)$. Die in 18. gefundenen Homomorphismen werden jetzt zu injektiven Homomorphismen $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right) : \widetilde{T}_x \to H_x$ hochgehoben. Gilt $n_x = 1$, so ist $\Theta_x = H_x$ und man definiert $\widetilde{T}_x := T_x$. Andernfalls kann man B3. des Satzes 4.18 auf Seite

88 mehrmals hintereinander anwenden. Der resultierende Graph $\widetilde{T}_x = (V_{\widetilde{T}_x}, E_{\widetilde{T}_x}, g_{\widetilde{T}_x})$ ist gegeben durch

$$\widetilde{E}_x := \bigcup_{l=1}^{n_x-1} \{D_x^W i_x(l)\} \ , \ \widetilde{V}_x := \bigcup_{l=1}^{n_x-1} \{d_x^W(l)\} \ , \ E_{\widetilde{T}_x} := E_{T_x} \cup \widetilde{E}_x \ , \ V_{\widetilde{T}_x} := V_{T_x} \cup \widetilde{V}_x \quad (7.17)$$

$$\text{sowie} \quad g_{\widetilde{T}_x}(c) := \begin{cases} g_{T_x}(c) & : \ c \in E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\} \\ \left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}\left(\left(D_x^W\right)^{-1}(c)\right) & : \ c \in \widetilde{E}_x \\ \left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}(l_{\sigma_x}) & : \ c = \varepsilon_x = D_x^W(l_{\sigma_x}) \end{cases} .$$

Lemma 7.9 *Es sei $x \in I_k$, $\varepsilon_x \in Bild(\delta)$ und $n_x \geq 2$. Es gelten:*

19. $E_{T_x} \cap \widetilde{E}_x = \emptyset$, $V_{T_x} \cap \widetilde{V}_x = \emptyset$, $g_{\widetilde{T}_x}$ *ist wohldefiniert.*

20. Es gibt einen Inklusionshomomorphismus $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right) : \widetilde{T}_x \to H_x$.

21. $T_x = \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(\widetilde{T}_x)$.

22. Die Abbildung (b_x, B_x) aus 18. wird durch $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right)$ induziert.

23. $\forall c \in E_{P_x} = \widetilde{E}_x \cup \{\varepsilon_x\} \ : \ \nu g_{\widetilde{T}_x}(c) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}(\epsilon_k) = \emptyset$.

Beweis **Zu 19.:** Laut 7.6, 7.7, 7.8 gelten $E_{T_x} \subset E_{G_x} \cup E_W \cup E_{W_x}$ und $\widetilde{E}_x = E_{P_x} \setminus \{\varepsilon_x\}$. Daraus folgt $E_{T_x} \cap \widetilde{E}_x \subset \left(E_{G_x} \cap \widetilde{E}_x\right) \cup \left(E_W \cap \widetilde{E}_x\right) \cup \left(E_{W_x} \cap \widetilde{E}_x\right) = \emptyset$. Genauso erreicht man $\widetilde{V}_x \cap V_{T_x} \subset \widetilde{V}_x \cap (V_{G_x} \cup V_W \cup V_{W_x}) = \emptyset$, denn $\widetilde{V}_x = V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}$. Wegen $g_{T_x}(c) \in V_{T_x} \times V_{T_x} \subset V_{\widetilde{T}_x} \times V_{\widetilde{T}_x}$, $d_x^W(\sigma) \in \widetilde{V}_x \subset V_{\widetilde{T}_x}$ für $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$ und $d_x^W(0), d_x^W(n_x) \overset{15.}{\in} V_{W_x} \overset{18.}{\subset} V_{T_x}$ ist $g_{\widetilde{T}_x} : E_{\widetilde{T}_x} \to V_{\widetilde{T}_x} \times V_{\widetilde{T}_x}$ eine wohldefinierte Abbildung.

Zu 20.:

a) $E_{\widetilde{T}_x} \subset E_{H_x} : c \in E_{\widetilde{T}_x} \ \Rightarrow \ c \in E_{T_x} \ \vee \ c \in E_{P_x} \setminus \{\varepsilon_x\} \overset{7.7,7.8}{\Rightarrow} c \in E_{G_x} \cup E_W \cup E_{W_x} \cup E_{P_x} \setminus \{\varepsilon_x\} \overset{7.7.15.}{\Rightarrow} c \in E_{G_x} \cup E_W \cup E_{P_x} \overset{7.6.10.}{=} E_{H_x}$.

b) $\widetilde{V}_{\widetilde{T}_x} \subset V_{H_x} : v \in V_{\widetilde{T}_x} \ \Rightarrow \ v \in V_{T_x} \ \vee \ v \in V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\} \overset{7.7,7.8}{\Rightarrow} v \in V_{G_x} \cup V_W \cup V_{W_x} \cup V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\} \overset{7.7.15.}{\Rightarrow} v \in V_{G_x} \cup V_W \cup V_{P_x} \overset{7.6.10.}{=} V_{H_x}$.

Die Inklusion $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right)$ ist ein Homomorphismus, denn für alle $c \in E_{\widetilde{T}_x}$ gilt $g_{\widetilde{T}_x}(c) = g_{H_x}(c)$:

1.Fall: $c \in E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\}) \cap E_{P_x} &= (E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\}) \cap \left(\widetilde{E}_x \cup \{\varepsilon_x\}\right) \\ &= \left((E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\}) \cap \widetilde{E}_x\right) \cup ((E_{T_x} \setminus \{\varepsilon_x\}) \cap \{\varepsilon_x\}) \overset{19.}{=} \emptyset. \end{aligned}$$

Daher gilt $(*)$ in folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} g_{\widetilde{T}_x}(c) & \overset{\text{Def.}}{=} & g_{T_x}(c) \overset{7.8.18.}{=} g_{\Theta_x}(c) \overset{7.7}{=} g_{G_x \cup W \cup W_x}(c) \\ & \overset{c \neq \varepsilon_x}{=} & g_{G_x \cup W}(c) \overset{(*)}{=} g_{G_x \cup W \cup P_x}(c) \overset{7.6}{=} g_{H_x}(c). \end{aligned}$$

2.Fall: $c \in \widetilde{E}_x$. Sei $c = D_x^W i_x(\sigma)$ für ein $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$. Da D_x^W injektiv ist, gilt also $i_x(\sigma) = \left(D_x^W\right)^{-1}(c)$. Man berechnet:

$$\begin{aligned} g_{H_x}(c) & = & g_{H_x} D_x^W i_x(\sigma) \overset{(7.12), \text{ S.200}}{=} \left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}\left(i_x(\sigma)\right) \\ & = & \left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}\left(\left(D_x^W\right)^{-1}(c)\right) \overset{\text{Def.}}{=} g_{\widetilde{T}_x}(c). \end{aligned}$$

3.Fall: $c = \varepsilon_x = D_x^W\left(l_{\sigma_x}\right)$. Dann gilt:

$$g_{H_x}(c) = g_{H_x} D_x^W\left(l_{\sigma_x}\right) = \left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}\left(l_{\sigma_x}\right) \overset{\text{Def.}}{=} g_{\widetilde{T}_x}(c).$$

Zu 21.: Zunächst gelten $E_{\mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(\widetilde{T}_x)} = E_{\widetilde{T}_x} \setminus \widetilde{E}_x = E_{T_x}$ und $V_{\mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(\widetilde{T}_x)} = V_{\widetilde{T}_x} \setminus \widetilde{V}_x = V_{T_x}$ nach 19., S.205. Der injektive Homomorphismus $\left(\widetilde{b}_x, \widetilde{B}_x\right)$ aus 20., S.205 induziert mittels Satz 4.16 auf Seite 86 einen Homomorphismus $\mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(\widetilde{T}_x) \to \mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(H_x) \overset{14., \text{ S.201}}{=} \Theta_x$ bestehend aus Inklusionsabbildungen. Also gilt

$$g_{T_x}(c) \overset{18., \text{ S.204}}{=} g_{\Theta_x}(c) = g_{\mathcal{C}_{\lceil z_{n_x-1} \rceil}(\widetilde{T}_x)}(c)$$

für alle $c \in E_{T_x}$.

Zu 22.: Da $b_x, \widetilde{b}_x, B_x$ und $\widetilde{B}_x$ Inklusionen sind, gilt $b_x(c) = c = \widetilde{b}_x(c)$ für alle $c \in V_{T_x} \subset V_{\widetilde{T}_x}$ und $B_x(c) = c = \widetilde{B}_x(c)$ für alle $c \in E_{T_x} \subset E_{\widetilde{T}_x}$.

Zu 23.: Zunächst gilt $c \in \widetilde{E}_x \cup \{\varepsilon_x\} = E_{P_x}$ nach 7.6.9. auf Seite 200. Man errechnet:

a) $\nu g_{\widetilde{T}_x}(\epsilon_k) \overset{20., \text{ S.205}}{=} \nu g_{H_x}(\epsilon_k) \overset{10., \text{ S.201}}{=} \nu g_W(\epsilon_k) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$.

b) $\nu g_{\widetilde{T}_x}(c) \overset{20.}{=} \nu g_{H_x}(c) \overset{10.}{=} \nu g_{P_x}(c) \in \mathcal{P}_2\left(V_{P_x}\right)$.

c) $\{\zeta_1, \zeta_2\} \in V_{G_0} \Rightarrow \zeta_1, \zeta_2 \notin V_{G_{x+1}} \setminus V_{G_0} \supset V_{G_{x+1}} \setminus V_{G_x} = V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\} \Rightarrow \zeta_1, \zeta_2 \notin V_{P_x} \setminus \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}$.

d) $\emptyset \overset{17., \text{ S.204}}{=} \nu g_W(\epsilon_k) \cap \nu g_{W_x}(\varepsilon_x) \overset{15., \text{ S.202}}{=} \{\zeta_1, \zeta_2\} \cap \left\{d_x^W(0), d_x^W(n_x)\right\}$.

Aus c) und d) folgt $\zeta_1, \zeta_2 \notin V_{P_x}$. Daher gilt $\nu g_{\widetilde{T}_x}(c) \cap \nu g_{T_x}(\epsilon_k) = \emptyset$ wegen a) und b). $\square$

7.3.2.2 Auswahl aus der Menge der Kandidaten

Da nun die Kanditaten $\widetilde{T}_x$ aus 20., S.205 konstruiert sind, muss untersucht werden, wieviele und welche von diesen zur Basisergänzung verwendet werden können. Dazu wird ein Resultat aus [14] über den Rang des Verschlingungsmoduls 3-zusammenhängender Graphen herangezogen (siehe Satz 7.13 auf Seite 214). Damit wird in 31. auf Seite 215 die Differenz der Ränge von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)$ und $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ berechnet. Aussage 32. liefert wie folgt eine Menge von Kandidaten, die sich als die gesuchte Menge von Teilgraphen zur Basisergänzung herausstellen wird: Man betrachtet die Graphen $\widetilde{T}_\alpha^\beta$ aus Satz 7.4 auf Seite 189 zusammen mit denjenigen $\widetilde{T}_x$, für die ε_x im Bild von δ enthalten ist. Wie man an 31. erkennt, spielt der Eckengrad von ζ_1 und ζ_2 ein Rolle. Daher müssen diesbezüglich Vorbereitungen getroffen werden. Sei weiterhin die Menge C aus (7.14) auf Seite 203 vorgelegt. Gegeben seien

$$C(\zeta_\alpha) := \{P_i \in C \mid \zeta_\alpha \in V_{P_i \cap W}\}\,, \quad \alpha \in \{1,2\} \quad \text{und}$$

$$Y := \{(G_i, G_{i+1}) \in S_k \times S_k \mid G_i \in M_k \ \wedge\ G_{i+1} \in A_k \ \wedge\ i \in \{0,\dots,q-1\}\}\,. \tag{7.18}$$

Lemma 7.10 *Sei $i \in \{0,\dots,q-1\}$. Es gelten:*

24. $C(\zeta_1) \cap C(\zeta_2) = \emptyset \quad , \quad C(\zeta_1) \cup C(\zeta_2) = C.$

25. $G_{i+1} \in A_k \quad \Longrightarrow \quad V_{P_i} \cap V_W = \{\zeta_1, \zeta_2\}.$

26. $(G_i, G_{i+1}) \notin X \ \wedge\ (G_i, G_{i+1}) \notin Y \ \Rightarrow\ V_{P_i} \cap V_W = \emptyset.$

27. $\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_\alpha) = \deg_{G_0}(\zeta_\alpha) + 1 + |C(\zeta_\alpha)| + |Y| \quad , \quad \alpha \in \{1,2\}.$

Beweis **Zu 24.:** $C(\zeta_1) \cap C(\zeta_2) = \emptyset$: Für $C(\zeta_1) = \emptyset$ oder $C(\zeta_2) = \emptyset$ ist die Aussage richtig. Angenommen es gibt ein $P_x \in C(\zeta_2) \cap C(\zeta_1)$. Daraus folgt $\zeta_1, \zeta_2 \in V_{P_x \cap W} = V_{P_x} \cap V_W \subset V_{P_x}$ im Widerspruch zur Konsequenz aus c) und d) im Beweis zu 7.9.23.
$C(\zeta_1) \cup C(\zeta_2) = C$: Wegen $V_W = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ folgt dies aus der Definition von C und $C(\zeta_\alpha)$.
Zu 25.: Es sei $G_{i+1} \cup W$ nicht topologisch einfach oder nicht topologisch 3-zusammenhängend. Dem Beweis der Aussage durch eine Fallunterscheidung werden die Betrachtungen a) bis d) vorangestellt:
a) $V_2(G_{i+1} \cup W) \overset{5.53(\mathrm{d})\mathrm{ii.},\,\mathrm{S.174}}{=} V_2(G_{i+1}) \backslash \{\zeta_1, \zeta_2\} \overset{5.53(\mathrm{d})}{=} [V_2(G_i) \setminus \{d_i(0), d_i(n_i)\} \uplus V_2(P_i)] \backslash \{\zeta_1, \zeta_2\} \overset{4.,\,\mathrm{S.197}}{=} V_2(G_i) \setminus \{d_i(0), d_i(n_i), \zeta_1, \zeta_2\} \uplus V_2(P_i)$. Diese Mengen werden nun geschrieben als:

$$\{u_1, \dots, u_k\} = V_2(G_i) \setminus \{d_i(0), d_i(n_i), \zeta_1, \zeta_2\}\,,\ \{w_1, \dots, w_l\} = V_2(P_i).$$

Dabei sind $k, l \in \mathbb{N}_0$ die jeweiligen Kardinalitäten der Mengen. Damit gilt insbesondere

$u_j \notin V_{P_i}$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $w_j \notin V_{G_i}$ für $j \in \{1, \ldots, l\}$.

b) Da G_i topologisch 3-zusammenhängend ist, gibt es, falls $k \geq 1$ ist, nach Satz 5.48 und 5.27.3. eine Spezielle injektive Abbildung $i' : \{u_1, \ldots, u_k\} \to E_{G_i}$ und Ecken $u'_1, \ldots, u'_k \in V_{G_i}$, so dass mit $x_j := \left(u_j, i'(u_j), u'_j\right)$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ der Graph $\mathcal{C}_{\lceil x_k \rceil}(G_i)$ wohldefiniert ist.

Wegen $P_i \cong J'_{n_i}$ gibt es, sofern $l \geq 1$ gilt, nach Satz 5.26 und 5.27 eine Spezielle injektive Abbildung $i'' : \{w_1, \ldots, w_l\} \to E_{P_i}$ und Ecken $w'_1, \ldots, w'_l \in V_{P_i}$, so dass mit $y_j := \left(w_j, i''(w_j), w'_j\right)$, $j \in \{1, \ldots, l\}$ der Graph $\mathcal{C}_{\lceil y_l \rceil}(P_i)$ definiert ist. Wenn $V_2(G_{i+1} \cup W)$ nicht-leer ist ($\Rightarrow k \geq 1$ oder $l \geq 1$), definiere $i : V_2(G_{i+1} \cup W) \to E_{G_{i+1} \cup W}$ durch

$$i(x) := \begin{cases} i'(x) & : \quad x \in \{u_1, \ldots, u_k\} \\ i''(x) & : \quad x \in \{w_1, \ldots, w_l\} \end{cases}.$$

Wegen $E_{G_{i+1} \cup W} = E_{G_i} \biguplus E_{P_i} \biguplus E_W$ ist i eine Spezielle injektive Abbildung.

c) Mit den Elementen x_j, y_j aus b) ist der Graph

$$H := \begin{cases} \mathcal{C}_{x_k, \ldots, x_1, y_l, \ldots, y_1}(G_{i+1} \cup W) \overset{(*)}{=} \mathcal{C}_{\lceil x_k \rceil}(G_i) \cup \mathcal{C}_{\lceil y_l \rceil}(P_i) \cup W & : \quad k, l \geq 1 \\ \mathcal{C}_{x_k, \ldots, x_1}(G_{i+1} \cup W) \overset{(*)}{=} \mathcal{C}_{\lceil x_k \rceil}(G_i) \cup P_i \cup W & : \quad k \geq 1, l = 0 \\ \mathcal{C}_{y_l, \ldots, y_1}(G_{i+1} \cup W) \overset{(*)}{=} G_i \cup \mathcal{C}_{\lceil y_l \rceil}(P_i) \cup W & : \quad l \geq 1, k = 0 \\ G_i \cup P_i \cup W & : \quad k = l = 0 \end{cases}$$

wohldefiniert, denn: die drei Graphen, die jeweils rechts von $\overset{(*)}{=}$ stehen, haben paarweise disjunkte Kantenmengen, daher ist jeweils die Vereinigung dieser Graphen wohldefiniert. Aus diesem Grund sind auch die Graphen links von $\overset{(*)}{=}$ wohldefiniert. Satz 4.9 auf Seite 79 liefert dann die Gleichheiten bei $(*)$.

Um ab jetzt die für k und l eintretenden Fälle simultan behandeln zu können, müssen die folgenden Abkürzungen festgelegt werden:

$$\mathcal{C}_{k,l}(X) := \begin{cases} \mathcal{C}_{x_k, \ldots, x_1, y_l, \ldots, y_1}(X) & : \quad k, l \geq 1 \\ \mathcal{C}_{x_k, \ldots, x_1}(X) & : \quad l = 0, k \geq 1 \\ \mathcal{C}_{y_l, \ldots, y_1}(X) & : \quad k = 0, l \geq 1 \\ X & : \quad k = l = 0 \end{cases}.$$

d) Analog zu 15. auf Seite 202 sei $W_i := \mathcal{C}_{y_l, \ldots, y_1}(P_i) = \mathcal{C}_{0,l}(P_i)$. Es gilt $V_{W_i} = \{d_i(0), d_i(n_i)\}$, $E_{W_i} = \{\varepsilon_i\}$ und $\{d_i(0), d_i(n_i)\} = \nu g_{W_i}(\varepsilon_i) = \nu g_H(\varepsilon_i)$.

1. Fall: $G_{i+1} \cup W$ nicht topologisch einfach. Nach Satz 5.46 auf Seite 170 ist daher der Graph H aus c) nicht topologisch einfach. Da nach Konstruktion $V_2(H) = \emptyset$ gilt, ist H

definitionsgemäß nicht einfach. Angenommen es gibt eine Schlaufe f von H. Ist f eine Kante von $\mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}) < H$, so ist G_{i+1} nicht topologisch einfach im Widerspruch zu den Eigenschaften der vorgelegten Kette. Also ist f Kante von W, das heißt $f = \epsilon_k$ ist eine Schlaufe. Widerspruch! Daher gibt es keine Schlaufen in H, sondern Mehrfachkanten c, d mit $\nu g_H(c) = \nu g_H(d)$. Sind c, d Kanten von $\mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1})$, so ist G_{i+1} nicht topologisch einfach. Widerspruch! Sei daher o.B.d.A. c Kante von $\mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}) \overset{\text{d)}}{=} \mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W_i$ und d Kante von W, also $d = \epsilon_k$. Dann folgt $\nu g_H(c) = \nu g_H(d) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$.

Angenommen es gilt $c \in E_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i)}$. Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i \cup W)}(c) &\overset{4.9}{=} \nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i)\cup W}(c) = \nu g_H(c) = \{\zeta_1, \zeta_2\} \\ &= \nu g_W(\epsilon_k) = \nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i)\cup W}(\epsilon_k) = \nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i \cup W)}(\epsilon_k).\end{aligned}$$

In $\mathcal{C}_{k,0}(G_i \cup W)$ sind daher c und ϵ_k Mehrfachkanten und deshalb ist $G_i \cup W$ nicht topologisch einfach. Also ist sowohl $G_i \in A_k$ als auch $G_{i+1} \overset{\text{Vor.}}{\in} A_k$. Dies ist ein Widerspruch zur Eigenschaft 3. der Kette auf Seite 197. Deshalb muss c eine Kante von W_i sein, d.h. $c = \varepsilon_i$. Man berechnet

$$\{\zeta_1, \zeta_2\} = \nu g_H(c) = \nu g_H(\varepsilon_i) \overset{\text{d)}}{=} \{d_i(0), d_i(n_i)\}.$$

Daraus folgt $V_W \subset V_{P_i}$, also $\{\zeta_1, \zeta_2\} = V_W = V_{P_i} \cap V_W$.

2. Fall: $G_{i+1} \cup W$ nicht topologisch 3-zusammenhängend. Es wird gezeigt : $\{\zeta_1, \zeta_2\} \neq V_{P_i} \cap V_W \;\Rightarrow\; G_{i+1} \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend.

Unterfall A: $\zeta_1, \zeta_2 \in V_2(G_{i+1})$. Aus a) in den Vorbetrachtungen geht

$$V_2(G_{i+1}) = \{u_1, \ldots, u_k\} \biguplus \{w_1, \ldots, w_l\} \biguplus \{\zeta_1, \zeta_2\} \tag{7.19}$$

hervor. Sei $i : V_2(G_{i+1}) \to E_{G_{i+1}}$ eine Spezielle injektive Abbildung gemäß Satz 5.48. Es gibt

$$\begin{aligned} x_j &:= \left(u_j, i(u_j), u_j'\right), j \in \{1, \ldots, k\}, \text{ falls } k \geq 1, \\ y_j &:= \left(w_j, i(w_j), w_j'\right), j \in \{1, \ldots, l\}, \text{ falls } l \geq 1, \text{ sowie} \\ z_1 &:= \left(\zeta_2, i(\zeta_2), \zeta_2'\right) \text{ und } z_2 := \left(\zeta_1, i(\zeta_1), \zeta_1'\right), \end{aligned}$$

wie in c), so dass $L := \mathcal{C}_{z_2,z_1}(S)$ mit $S := \mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1})$ definiert ist. Da G_{i+1} topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach ist, folgt wie im Beweis zu 5.54(i), dass L 3-zusammenhängend und einfach ist, denn $V_2(L) = \emptyset$. Nach Satz 4.13 auf Seite 84 gilt $\deg_S(\zeta_\alpha) = \deg_{G_{i+1}}(\zeta_\alpha) = 2$ für $\alpha \in \{1, 2\}$, daher existieren $r_\alpha \in E_S$, so dass

$$S = \mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}) \overset{4.9}{=} \mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup \mathcal{C}_{0,l}(P_i) \overset{\text{d)}}{=} \mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W_i \quad \text{und} \tag{7.20}$$

$$Inz(\zeta_\alpha, S) = \{i(\zeta_\alpha), r_\alpha\} \quad \text{für} \quad \alpha \in \{1, 2\} \tag{7.21}$$

gelten.

Unterfall A1: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) \neq \emptyset$. Dann gibt es $f \in E_S$ mit $\nu g_S(f) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$. Angenommen es gilt $f \in E_{W_i}$, also $f = \varepsilon_i$. Man berechnet

$$\{\zeta_1, \zeta_2\} = \nu g_S(f) = \nu g_S(\varepsilon_i) = \nu g_{W_i}(\varepsilon_i) \overset{\text{d)}}{=} \{d_i(0), d_i(n_i)\} \subset V_{P_i}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muss f Kante von $\mathcal{C}_{k,0}(G_i)$ sein. Wegen

$$\nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W}(f) = \nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i)}(f) = \nu g_S(f) = \{\zeta_1, \zeta_2\} = \nu g_{\mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W}(\epsilon_k)$$

sind f und ϵ_k Mehrfachkanten in $\mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W \overset{4.9}{=} \mathcal{C}_{k,0}(G_i \cup W)$, also ist $G_i \cup W$ nicht topologisch einfach. Nun erzwingt die Bedingung 3. von Seite 197 an die Kette, dass $G_{i+1} \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend ist.

Unterfall A2: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) = \emptyset$. Die Kanten r_1, r_2 sind nach Voraussetzung dieses Unterfalles in dem wegen Satz 5.17 auf Seite 131 nach Tutte 3-zusammenhängenden Graphen L verschieden, deshalb ist $S \cup W$ nach [27], Theorem IV.18., Seite 79 3-zusammenhängend nach Tutte. Laut Korollar 5.19 auf Seite 134 ist daher $S \cup W$ 3-zusammenhängend, denn $4 \leq |V_{G_0}| \leq |V_{S \cup W}|$. Wegen $S \cup W = \mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}) \cup W = \mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1} \cup W)$ ist $G_{i+1} \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend.

Unterfall B: $\zeta_2 \in V_2(G_{i+1}), \zeta_1 \notin V_2(G_{i+1})$. Aus a) in den Vorbetrachtungen geht

$$V_2\left(G_{i+1}\right) = \{u_1, \ldots, u_k\} \uplus \{w_1, \ldots, w_l\} \uplus \{\zeta_2\}$$

hervor. Analog zum Unterfall A seien $L := \mathcal{C}_{z_1}\left(\mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}), \; S := \mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W_i\right.$ und $Inz(\zeta_2, S) = \{i(\zeta_2), r_2\}$ definiert.

Unterfall B1: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) \neq \emptyset$. Man argumentiert exakt wie im Unterfall A1.

Unterfall B2: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) = \emptyset$. Sei $v' \in E_S$, so dass $\nu g_S(r_2) = \{\zeta_2, v'\}$ gilt. Außerdem ergibt sich $\nu g_S\left(i(\zeta_2)\right) = \{\zeta_2, \zeta_2'\}$ aus der Definition von z_1. Daraus erhält man $\zeta_1 \notin \{\zeta_2', v'\}$, denn:

1) $\zeta_1 = v' \;\Rightarrow\; r_2 \in Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S)$. Widerspruch!

2) $\zeta_1 = \zeta_2' \;\Rightarrow\; i(\zeta_2) \in Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S)$. Widerspruch!

Also gilt

$$\zeta_1 \notin \{v', \zeta_2'\} = \nu\left(\left(\psi(\zeta_2, \zeta_2', E_L) \times \psi(\zeta_2, \zeta_2', E_L)\right) g_S(r_2)\right) = \nu g_L(r_2).$$

Da L 3-zusammenhängend und einfach ist, folgt mit [27], Theorem IV.16., Seite 77, dass $S \cup W = \mathcal{C}_{k,0}(G_{i+1} \cup W)$ 3-zusammenhängend und somit $G_{i+1} \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend ist.

Unterfall C: $\zeta_1, \zeta_2 \notin V_2(G_{i+1})$. Aus a) in den Vorbetrachtungen geht

$$V_2\left(G_{i+1}\right) = \{u_1, \ldots, u_k\} \biguplus \{w_1, \ldots, w_l\}$$

hervor. Wie im Unterfall A sei $S := \mathcal{C}_{k,l}(G_{i+1}) = \mathcal{C}_{k,0}(G_i) \cup W_i$ definiert.

Unterfall C1: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) \neq \emptyset$. Man argumentiert wie im Unterfall A1.

Unterfall C2: $Inz(\zeta_1, S) \cap Inz(\zeta_2, S) = \emptyset$. Es folgt sofort, dass ζ_1 und ζ_2 in S nicht adjazent sind. Da S 3-zusammenhängend und einfach ist, ist $S \cup W$ 3-zusammenhängend nach [27], Theorem IV.11., Seite 74. Daher ist $G_{i+1} \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend.

Unterfall D: $\zeta_1 \in V_2(G_{i+1}), \zeta_2 \notin V_2(G_{i+1})$. Man vertauscht im Unterfall B die Rollen von ζ_1 und ζ_2.

Zu 26.: Aus der Voraussetzung folgt $G_i \in A_k$ und $G_{i+1} \in M_k$. Angenommen es gilt $V_{P_i} \cap V_W \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $\zeta_1 = d_i(0) \in V_{P_i} \cap V_W$. Dabei seien (d_i, D_i) die Wege aus (7.5) auf Seite 197.

1. Fall: $i \geq 1$. Nach 25. gilt $V_{P_{i-1}} \cap V_W = \{\zeta_1, \zeta_2\}$. Sei o.B.d.A. $\zeta_1 = d_{i-1}(0)$ sowie $\zeta_2 = d_{i-1}(n_{i-1})$.

1. Unterfall: $d_i\left(n_i\right) \in V_{P_{i-1}}$. Dann gibt es ein $j \in \{0, \ldots, n_{i-1}\}$ mit $d_{i-1}(j) = d_i(n_i)$. Man definiert einen Weg $(d', D') : J'_j \to G_{i+1}$ durch $d'(\sigma) := d_{i-1}(\sigma)$ für $\sigma \in \{0, \ldots, j\}$ und $D'\left(l_\sigma\right) := D_{i-1}\left(l_\sigma\right)$ für $\sigma \in \{1, \ldots, j-1\}$. Somit erfüllen die Wege (d', D') und (d_i, D_i) die Bedingungen aus Satz 5.41 auf Seite 157. Also ist G_{i+1} nicht topologisch einfach. Widerspruch!

2. Unterfall: $d_i(n_i) \notin V_{P_{i-1}}$. Man definiert einen Weg $(d', D') : J'_1 \to G_{i+1} \cup W$ durch $d'(0) := \zeta_1$, $d'(1) := \zeta_2$ und $D'\left(l_1\right) := \epsilon_k$. Fasst man den Weg (d_{i-1}, D_{i-1}) als Weg nach $G_{i+1} \cup W$ auf, so erfüllen (d', D') und (d_{i-1}, D_{i-1}) die Bedingungen aus Satz 5.41. Daher ist $G_{i+1} \cup W$ nicht topologisch einfach, also $G_{i+1} \in A_k$. Widerspruch!

2. Fall: $i = 0$. Wegen $G_0 \in A_k$ ist $G_0 \cup W$ nicht topologisch einfach. Daher gibt es Wege (w_1, W_1) und (d_{-1}, D_{-1}), die die Bedingungen aus Satz 5.41 erfüllen. Da G_0 als Unterteilung von K_4 tpologisch einfach ist, muss die Kante ϵ_k von W entweder im Bild von W_1 oder im Bild von D_{-1} enthalten sein. Sei o.B.d.A. $\epsilon_k \in \operatorname{Bild} W_1$. Da $\deg_{G_0 \cup W}(\zeta_1) \geq 3$ und $\deg_{G_0 \cup W}(\zeta_2) \geq 3$ nach 4.7.6. auf Seite 76 gelten, muss der Weg (w_1, W_1) die Gestalt $(w_1, W_1) : J'_1 \to W$ haben. Also gilt $\{d_{-1}(0), d_{-1}\left(n_{-1}\right)\} = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ für den Weg $(d_{-1}, D_{-1}) : J'_{n-1} \to G_0$. Man definiert nun $P_{-1} := \operatorname{Bild}\left(d_{-1}, D_{-1}\right) < G_0 < G_0 \cup W$ und beweist die Behauptung wie im ersten Fall nur für $i = 0$.

Zu 27.: Zunächst gebe es $P_i \in C\left(\zeta_\alpha\right)$. Wegen $\zeta_\alpha \in V_{G_0}$ ist $\zeta_\alpha \in \left\{d_i^W(0), d_i^W\left(n_i\right)\right\}$. Also gilt $\deg_{P_i}\left(\zeta_\alpha\right) = 1$, denn d_i^W ist injektiv. Für ein Element $(G_i, G_{i+1}) \in Y$ gilt $G_{i+1} = G_i \cup P_i$

und $P_i \notin C \subset \operatorname{Bild}\gamma$ wegen $G_{i+1} \in A_k$. Aus 25. folgt $\deg_{P_i}(\zeta_\alpha) = 1$. Betrachte nun den Teilgraphen

$$U_\alpha := G_0 \cup W \cup \bigcup_{P_i \in C(\zeta_\alpha)} P_i \quad \cup \bigcup_{\substack{\{i \in \{0,\dots,q-1\} \mid \\ (G_i, G_{i+1}) \in Y\}}} P_i \quad < \widetilde{J}_{k+1}.$$

Für diesen gilt $Inz\left(\zeta_\alpha, \widetilde{J}_{k+1}\right) = Inz(\zeta_\alpha, U_\alpha)$, denn:

⊃: $c \in Inz(\zeta_\alpha, U_\alpha) \Rightarrow \zeta_\alpha \in \nu g_{U_\alpha}(c) = \nu g_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) \Rightarrow c \in Inz\left(\zeta_\alpha, \widetilde{J}_{k+1}\right)$.

⊂: Sei $c \in Inz\left(\zeta_\alpha, \widetilde{J}_{k+1}\right)$. Da c Kante von $\widetilde{J}_{k+1}$ ist, ist $c \in E_{G_0}$ oder $c \in E_W$ oder $c \in E_{P_i}$ für ein $i \in \{0,\dots,q-1\}$. In den ersten beiden Fällen folgt sofort $c \in Inz(\zeta_\alpha, U_\alpha)$. Andernfalls ergibt sich: $c \in E_{P_i} \cap Inz\left(\zeta_\alpha, \widetilde{J}_{k+1}\right) \Rightarrow \zeta_\alpha \in \nu g_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) = \nu g_{P_i}(c) \Rightarrow V_{P_i} \cap V_W \neq \emptyset \overset{26.}{\Rightarrow} (G_i, G_{i+1}) \in X$ oder $(G_i, G_{i+1}) \in Y \Rightarrow P_i \in C(\zeta_\alpha)$ oder $Y \neq \emptyset$ $\Rightarrow P_i < U_\alpha \Rightarrow c \in E_{U_\alpha} \Rightarrow \nu g_{U_\alpha}(c) = \nu g_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) \ni \zeta_\alpha \Rightarrow c \in Inz(\zeta_\alpha, U_\alpha)$.

Da $\widetilde{J}_{k+1}$ einfach ist, folgt $Sch(\zeta_\alpha, U_\alpha) \subset Sch\left(\zeta_\alpha, \widetilde{J}_{k+1}\right) = \emptyset$. Mit Satz 4.7.5. auf Seite 76 ergibt sich nun $\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_\alpha) = \deg_{U_\alpha}(\zeta_\alpha)$. Die Graphen G_0, $W, P_1, \dots, P_{q-1}$ haben paarweise disjunkte Kantenmengen, da sie der vorgelegten Kette entnommen sind. Satz 4.7.8. liefert

$$\begin{aligned}
\deg_{U_\alpha}(\zeta_\alpha) &= \deg_{G_0}(\zeta_\alpha) + \deg_W(\zeta_\alpha) + \sum_{P_i \in C(\zeta_\alpha)} \deg_{P_i}(\zeta_\alpha) + \sum_{\substack{\{i \in \{0,\dots,q-1\} \mid \\ \wedge\ (G_i, G_{i+1}) \in Y\}}} \deg_{P_i}(\zeta_\alpha) \\
&= \deg_{G_0}(\zeta_\alpha) + 1 + |C(\zeta_\alpha)| + |Y|
\end{aligned}$$

□

Um in Lemma 7.12 die Kardinalzahl der Menge X aus (7.13) auf Seite 203 abzuschätzen, wird zuerst ein Hilfslemma bewiesen:

Lemma 7.11 *Vorgelegt sei* $z := (z_0, \dots, z_q) \in \{0,1\}^{q+1}$ *mit* $q \in \mathbb{N}_0$ *und* $(z_i, z_{i+1}) \neq (0,0)$ *für jedes* $i \in \{0,\dots,q-1\}$. *Für die Mengen* $L := \{z_i \mid 0 \leq i \leq q \ \wedge\ z_i = 0\}$ *und* $Z := \{(z_i, z_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq q \ \wedge\ z_i = z_{i+1} = 1\}$ *gilt :*

$$|Z| = \begin{cases} q - 2|L| & : \quad z_0 = z_q = 1 \\ q + 1 - 2|L| & : \quad z_0 = 1 - z_q \\ q + 2 - 2|L| & : \quad z_0 = z_q = 0 \end{cases}.$$

Beweis **1. Fall:** $q = 0$. In diesem Fall ist $Z = \emptyset$. Für $z_0 = 0$ gilt $q+2-2|L| = 0+2-2 = 0 = |Z|$ und für $z_0 = 1$ ergibt sich $q - 2|L| = 0 - 0 = |Z|$.

2. Fall: $q \geq 1$. Sei $K := \{z_i \in \{z_0, \ldots, z_q\} \mid z_i = 1\}$. Nach Voraussetzung ist $K \neq \emptyset$. Mittels

$$z_i \sim z_j \quad :\Leftrightarrow \quad \forall s \in \{\min\{i,j\}, \ldots, \max\{i,j\}\} : z_s = 1$$

wird eine Äquivalenzrelation auf K erklärt. Sei $n := \left| K/_{\sim} \right|$ und $[z_{i_1}], \ldots, [z_{i_n}]$ die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen. Daraus ergibt sich $|Z| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\left| [z_{i_j}] \right| - 1 \right)$. Aus $q + 1 - |L| = |K| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left| [z_{i_j}] \right|$ folgt somit $|Z| = |K| - n = q + 1 - |L| - n$. Aus $(z_i, z_{i+1}) \neq (0,0)$ ergeben sich die folgenden Fälle:

a) $z_0 = z_q = 1 \;\Rightarrow\; n = |L| + 1 \;\Rightarrow\; |Z| = q + 1 - |L| - |L| - 1 = q - 2|L|$.

b) $z_0 = 1 - z_q \;\Rightarrow\; n = |L| \;\Rightarrow\; |Z| = q + 1 - |L| - |L| = q + 1 - 2|L|$.

c) $z_0 = z_q = 0 \;\Rightarrow\; n = |L| - 1 \;\Rightarrow\; |Z| = q + 1 - |L| - |L| + 1 = q + 2 - 2|L|$.

□

Lemma 7.12 *Für die Mengen X, Y aus (7.13) bzw. (7.18) gelten*

$$|Y| = \begin{cases} a_k & : \; G_0 \in M_k \\ a_k - 1 & : \; G_0 \in A_k \end{cases} \quad \textit{und} \quad |X| = \begin{cases} q - 2a_k & : \; G_0 \in M_k \\ q + 1 - 2a_k & : \; G_0 \in A_k \end{cases}.$$

Beweis Sei zunächst $Y = \emptyset$. Daraus ergibt sich $A_k = \emptyset$, also $a_k = 0$, für $G_0 \in M_k$, sowie $A_k = \{G_0\}$, also $a_k = 1$, falls $G_0 \in A_k$ gilt. Sei nun $Y \neq \emptyset$. Dann ist auch $A_k \setminus \{G_0\} \neq \emptyset$. Definiere eine Abbildung $f : Y \to A_k$ durch $(G_i, G_{i+1}) \mapsto G_{i+1}$.

1. Fall: $G_0 \in M_k$. Definiere eine Abbildung $g : A_k \to Y$ durch $G_i \mapsto (G_{i-1}, G_i)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn $G_0 \notin A_k$ und $G_{i-1} \in M_k$ wegen 3. auf Seite 197. Man berechnet $gf(G_i, G_{i+1}) = g(G_{i+1}) = (G_i, G_{i+1})$ für $(G_i, G_{i+1}) \in Y$ und $fg(G_i) = f(G_{i-1}, G_i) = G_i$ für $G_i \in A_k$. Daher gilt $|A_k| = |Y|$.

2. Fall: $G_0 \in A_k$. Definiere eine Abbildung $g : A_k \setminus \{G_0\} \to Y$ durch $G_i \mapsto (G_{i-1}, G_i)$. Wie im 1. Fall erkennt man, dass g wohldefiniert und bijektiv ist. Daraus folgt $|Y| = |A_k \setminus \{G_0\}| = a_k - 1$.

Zum Beweis der zweiten Gleichung ordnet man der Menge S_k wie folgt ein Element $z := (z_0, \ldots, z_q) \in \{0,1\}^{q+1}$ zu:

$$z_i := \begin{cases} 0 & : \; G_i \in A_k \\ 1 & : \; G_i \in M_k \end{cases}$$

für $i \in \{0, \ldots, q\}$. Dann gilt $z_q = 1$. Für $G_0 \in M_k$ gilt dann $z_0 = 1$ und mit 7.11 folgt die Behauptung, denn dort gilt in diesem Zusammenhang $|A_k| = |L| = a_k$ und $|X| = |Z|$.

Andernfalls ist $z_0 = 0$, wenn $G_0 \in A_k$ ist. Die Ungleichung $|X| = q + 1 - 2a_k$ ergibt sich wieder aus 7.11. □

Um in 31. die Anzahl der zur Basisergänzung benötigten Elemente zu bestimmen wird Theorem 3.1. aus [14] verwendet:

Satz 7.13 *Es sei $\mathcal{Z}$ ein eindimensionaler Zellenkomplex, $G(\mathcal{Z})$ der zugehörige abstrakte Graph und $\beta :=$Rang$(H_1(\mathcal{Z};\mathbb{Z}))$. Wenn $G(\mathcal{Z})$ 3-zusammenhängend und einfach ist, gilt*

$$2 \cdot \mathit{Rang}\,(L(\mathcal{Z})) = \beta^2 + \beta + 4\,|\mathcal{Z}_1| - \sum_{v \in \mathcal{Z}_0} \left(\deg_{G(\mathcal{Z})}(v)\right)^2.$$

Beweis [14], Theorem 3.1. □

Lemma 7.14 *Sei $G = (V, E, g)$ ein topologisch 3-zusammenhängender und topologisch einfacher bijektiv nummerierter Graph und $\beta_G := |E| - |V| + 1$. Es gilt*

$$2 \cdot \mathit{Rang}(\mathcal{G}\,(G)) = \beta_G^2 + \beta_G + 4|E| - \sum_{v \in V} (\deg_G(v))^2.$$

Beweis Für $V_2(G) \neq \emptyset$ sei $i : V_2(G) \to E$ eine Spezielle injektive Abbildung gemäß Satz 5.48. Der Graph $H = (V_H, E_H, g_H)$ gehe aus G durch Kontraktionen an den Ecken aus $V_2(G)$ hervor. Wenn $V_2(G) = \emptyset$ ist, sei $H := G$. Da $V_2(H) = \emptyset$ gilt, ist H nach 5.46 auf Seite 170 und 5.49 auf Seite 171 3-zusammenhängend und einfach. Nun sei ein zusammenhängender eindimensionaler Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ vorgelegt, so dass $H = G(\mathcal{Z})$ gilt. Aus

a) $\beta = \text{Rang}\,(H_1\,(\mathcal{Z};\mathbb{Z})) = \text{Rang}\,(H_0\,(\mathcal{Z};\mathbb{Z})) - \chi(\mathcal{Z}) = 1 - (|\mathcal{Z}_0| - |\mathcal{Z}_1|) = |\mathcal{Z}_1| - |\mathcal{Z}_0| + 1,$

b) $\mathcal{Z}_0 = V_H = V \setminus V_2(G)$ und $\mathcal{Z}_1 = E_H = E \setminus i\,(V_2(G))$

folgt $\beta_G = |E| - |V| + 1 = |\mathcal{Z}_1| + |i\,(V_2(G))| - |\mathcal{Z}_0| - |V_2(G)| + 1 \overset{i \text{ inj.}}{=} |\mathcal{Z}_1| - |\mathcal{Z}_0| + 1 = \beta.$ Deshalb lässt sich

$$\begin{aligned}
2 \cdot \text{Rang}\,(\text{Kern}\, G_G) &\overset{4.29,\, \text{S.}103}{=} 2 \cdot \text{Rang}\,(\text{Kern}\, G_H) \overset{3.7,\, \text{S.}70}{=} 2 \cdot \text{Rang}\,(L(\mathcal{Z})) \\
&\overset{7.13,\, \text{S.}214}{=} \beta^2 + \beta + 4\,|\mathcal{Z}_1| - \sum_{v \in \mathcal{Z}_0} (\deg_H(v))^2 \\
&\overset{\text{b)}}{=} \beta_G^2 + \beta_G + 4|E| - 4\,|V_2(G)| - \sum_{v \in V \setminus V_2(G)} (\deg_H(v))^2 \\
&\overset{4.13,\, \text{S.}84}{=} \beta_G^2 + \beta_G + 4|E| - 4\,|V_2(G)| - \sum_{v \in V \setminus V_2(G)} (\deg_G(v))^2 \\
&= \beta_G^2 + \beta_G + 4|E| - 4\,|V_2(G)| - \left[\sum_{v \in V} (\deg_G(v))^2 - \sum_{v \in V_2(G)} (\deg_G(v))^2\right] \\
&= \beta_G^2 + \beta_G + 4|E| - 4\,|V_2(G)| + 4\,|V_2(G)| - \sum_{v \in V} (\deg_G(v))^2
\end{aligned}$$

berechnen. □

Lemma 7.15 *Es gelten:*

28. $\beta_{\widetilde{J}_{k+1}} = \beta_{\widetilde{J}_k} + 1$.

29. $\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_\alpha) = \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_\alpha) - 1$ *für* $\alpha \in \{1,2\}$, $\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(v) = \deg_{\widetilde{J}_k}(v)$ *für* $v \notin \{\zeta_1, \zeta_2\}$.

30. $\beta_{\widetilde{J}_k} = 3 + q$.

31. $D_k := \mathit{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right) - \mathit{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) = 5 + q - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2)$.

32. $D_k - |\mathit{Bild}\,\delta| - t_\alpha = 0$, *wobei* $\alpha \in \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 3, 4a, 4b\}$ *und* t_α *die Zahl aus der Bemerkung auf Seite 189 ist, je nachdem welcher Fall* α *dort eintritt.*

Beweis **Zu 28.:** Wegen $\widetilde{J}_k = \widetilde{J}_{k+1} - \{\epsilon_k\}$ gilt $E_{\widetilde{J}_{k+1}} = E_{\widetilde{J}_k} \cup \{\epsilon_k\}$ und $V_{\widetilde{J}_{k+1}} = V_{\widetilde{J}_k}$. Daraus folgt $\beta_{\widetilde{J}_{k+1}} = \left|E_{\widetilde{J}_{k+1}}\right| - \left|V_{\widetilde{J}_{k+1}}\right| + 1 = \left|E_{\widetilde{J}_k}\right| + 1 - \left|V_{\widetilde{J}_k}\right| + 1 = \beta_{\widetilde{J}_k} + 1$.

Zu 29.: Aus $\widetilde{J}_{k+1} = \widetilde{J}_k \cup W$ erhält man $\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_\alpha) = \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_\alpha) + \deg_W(\zeta_\alpha) = \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_\alpha) + 1$ aus Satz 4.7.6. auf Seite 76. Für $v \notin V_W = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ gilt definitionsgemäß $\deg_W(v) = 0$.

Zu 30.: Da G_0 eine Unterteilung von K_4 ist, gibt es, sofern $V_2(G_0)$ nicht-leer ist, wie zu Beginn des Beweises von Satz 7.4 eine Spezielle injektive Abbildung $i : V_2(G_0) \to E_{G_0}$, so dass $E_{K_4} = E_{G_0} \setminus \mathrm{Bild}\, i$ und $V_{K_4} = V_{G_0} \setminus V_2(G_0)$ gelten. Wenn $V_2(G_0)$ leer ist, sei hier formal $\mathrm{Bild}\, i := \emptyset$. Daraus ergibt sich $\beta_{G_0} = |E_{G_0}| - |V_{G_0}| + 1 = |E_{K_4}| + |i\,(V_2(G_0))| - |V_{K_4}| - |V_2(G_0)| + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Für $q \geq 1$ und $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ gilt: $G_{i+1} = G_i \cup P_i \Rightarrow \beta_{G_{i+1}} = \left|E_{G_{i+1}}\right| - \left|V_{G_{i+1}}\right| + 1 = |E_{G_i}| + n_i - (|V_{G_i}| + (n_i - 1)) + 1 = \beta_{G_i} + 1 \Rightarrow \beta_{G_{i+1}} - \beta_{G_0} = \sum_{s=1}^{i+1} \beta_{G_s} - \beta_{G_{s-1}} = i + 1 \Rightarrow \beta_{G_{i+1}} = \beta_{G_0} + i + 1 = 3 + (i+1)$. Für $i + 1 = q$ liefert diese Formel die Behauptung $\beta_{\widetilde{J}_k} = \beta_{G_q} = 3 + q$.

Zu 31.: Man errechnet:

$$
\begin{aligned}
&2\left(\mathrm{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right) - \mathrm{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right)\right) \\
&\overset{7.14}{=} \quad \beta^2_{\widetilde{J}_{k+1}} + \beta_{\widetilde{J}_{k+1}} + 4\left|E_{\widetilde{J}_{k+1}}\right| - \sum_{v \in V_{\widetilde{J}_{k+1}}} \left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(v)\right)^2 - \beta^2_{\widetilde{J}_k} - \beta_{\widetilde{J}_k} - 4\left|E_{\widetilde{J}_k}\right| \\
&\qquad + \sum_{v \in V_{\widetilde{J}_k}} \left(\deg_{\widetilde{J}_k}(v)\right)^2 \\
&\overset{28.}{=} \quad \left(\beta_{\widetilde{J}_k} + 1\right)^2 + \beta_{\widetilde{J}_k} + 1 + 4\left|E_{\widetilde{J}_k}\right| + 4 - \left[\left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1)\right)^2 + \left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2)\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\substack{v \in V_{\widetilde{J}_{k+1}} \\ \wedge\, v \neq \zeta_1, v \neq \zeta_2}} \left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(v)\right)^2\right] - \beta^2_{\widetilde{J}_k} - \beta_{\widetilde{J}_k} - 4\left|E_{\widetilde{J}_k}\right| + \sum_{v \in V_{\widetilde{J}_k}} \left(\deg_{\widetilde{J}_k}(v)\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{29.}{=} && \beta^2_{\widetilde{J}_k} + 2\beta_{\widetilde{J}_k} + 1 + \beta_{\widetilde{J}_k} + 1 + 4\left|E_{\widetilde{J}_k}\right| + 4 - \beta^2_{\widetilde{J}_k} - \beta_{\widetilde{J}_k} - 4\left|E_{\widetilde{J}_k}\right| + \sum_{v \in V_{\widetilde{J}_k}} \left(\deg_{\widetilde{J}_k}(v)\right)^2 \\
& && -\left[\left(\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1)+1\right)^2 + \left(\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2)+1\right)^2 + \sum_{\substack{v \in V_{\widetilde{J}_k} \\ \wedge\, v \neq \zeta_1, v \neq \zeta_2}} \left(\deg_{\widetilde{J}_k}(v)\right)^2\right] \\
&= && 2\beta_{\widetilde{J}_k} + 6 - 2\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1) - 2\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2) - 1 - 1 \\
&= && 2\beta_{\widetilde{J}_k} + 4 - 2\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1) - 2\deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2) \overset{30.}{=} 2\left(5 + q - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2)\right).
\end{aligned}$$

Zu 32.: Zunächst sei $\operatorname{Bild}\gamma \setminus C \neq \emptyset$. Dann ist auch $X \neq \emptyset$, und es folgt $|\operatorname{Bild}\delta| = |\operatorname{Bild}\gamma| - |C| = |X| - |C|$, da sowohl γ als auch δ injektiv sind. Mit 31. ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D_k - |\operatorname{Bild}\delta| &= 5 + q - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_k}(\zeta_2) - |X| + |C| \qquad (7.22)\\
&\overset{29.}{=} 5 + q - \left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1) - 1\right) - \left(\deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2) - 1\right) - |X| + |C| \\
&= 7 + q - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2) - |X| + |C| =: t_1.
\end{aligned}$$

Nun werden die Fälle $\alpha \in \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 3, 4a, 4b\}$ nacheinander untersucht:

Fall 1a: Hier gilt $G_0 \in A_k$.

$$\begin{aligned}
t_1 - t_{1a} &\overset{7.4,\ S.189}{=} t_1 - 2 = 5 + q - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2) - |X| + |C| \\
&\overset{27.,\ S.207}{=} 5 + q - 3 - |C(\zeta_1)| - |Y| - 3 - |C(\zeta_2)| - |Y| - |X| + |C| \\
&\overset{7.12,\ S.213,\ 24.,\ S.207}{=} -1 + q - |C| + |C| - 2(a_k - 1) - q + 2a_k - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Fall 1b: Hier gilt $G_0 \in M_k$.

$$\begin{aligned}
t_1 - t_{1b} &\overset{7.4,\ S.189}{=} t_1 - 1 = 6 + q - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2) - |X| + |C| \\
&\overset{27.,24.}{=} q - 2|Y| - |X| \overset{7.12}{=} q - 2a_k - q + 2a_k = 0.
\end{aligned}$$

Fall 1c: Hier gilt $G_0 \in M_k$ und wie im Fal 1b berechnet man $t_1 - t_{1c} = t_1 - 1 = 0$.

Fall 2a/4a: Es gilt $G_0 \in A_k$.

$$\begin{aligned}
t_1 - t_{2a} &\overset{7.4,\ S.189}{=} t_1 - 1 = 6 + q - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_1) - \deg_{\widetilde{J}_{k+1}}(\zeta_2) - |X| + |C| \\
&\overset{27.,24.}{=} 6 - 7 + q - 2|Y| - |X| \overset{7.12}{=} -1 + q - 2(a_k - 1) - q + 2a_k - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Fall 2b/4b: Es gilt $G_0 \in M_k$.

$$\begin{aligned}
t_1 - t_{2b} &\overset{7.4,\ S.189}{=} t_1 \overset{27.,24.}{=} q - 2|Y| - |X| \\
&\overset{7.12}{=} q - 2a_k - q + 2a_k = 0.
\end{aligned}$$

Fall 3: Hier gilt $G_0 \in A_k$.

$$\begin{aligned} t_1 - t_3 &\overset{7.4,\ \text{S.}189}{=} t_1 \overset{27.,24.}{=} 7 - 8 + q - 2|Y| - |X| \\ &\overset{7.12}{=} -1 + q - 2(a_k - 1) - q + 2a_k - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nun sei $\operatorname{Bild}\gamma \setminus C = \emptyset$. Definitionsgemäß gilt $\operatorname{Bild}\delta = \emptyset$. Wenn $C = \operatorname{Bild}\gamma \neq \emptyset$ gilt, so folgt $X \neq \emptyset$ und $|X| = |\operatorname{Bild}\gamma| = |C|$, also $|\operatorname{Bild}\delta| = 0 = |X| - |C|$. Daher lässt sich genauso wie oben schließen, denn die Gleichung (7.22) bleibt auch in diesem Zusammenhang gültig. Ist hingegen $\operatorname{Bild}\gamma = \emptyset$, so müssen auch X und C leer sein. Es gilt wieder $|\operatorname{Bild}\gamma| = 0 = |X| - |C|$ und man argumentiert wie oben, denn in 7.12 ist auch $X = \emptyset$ erlaubt. □

7.3.2.3 Die Auswahl induziert eine Basis

Aus I_k werden nun falls möglich gewisse Elemente ausgewählt und in der Menge

$$\widetilde{I}_k := \begin{cases} \emptyset & : \quad X = \emptyset \\ \{x \in I_k \mid P_x \in \operatorname{Bild}(\gamma) \setminus C\} & : \quad X \neq \emptyset \end{cases} \tag{7.23}$$

gesammelt. Diese kann leer sein, auch wenn $X \neq \emptyset$ ist. Falls X nicht leer ist, lässt sie sich durch

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_k \quad = \quad & \{x \in \{0, \ldots, q-1\} \mid G_x \cup W \text{ und } G_{x+1} \cup W \text{ sind sowohl} \\ & \text{topologisch einfach als auch topologisch} \\ & \text{3-zusammenhängend} \ \wedge\ \zeta_1 \notin V_{P_x} \ \wedge\ \zeta_2 \notin V_{P_x}\} \end{aligned} \tag{7.24}$$

charakterisieren.

Im Satz 7.20 auf Seite 226 wird $\widetilde{I}_k$ verwendet, um eine Basisergänzung durchzuführen. Vorab müssen dazu, je nachdem ob $\widetilde{I}_k$ leer ist oder nicht, Vorbereitungen bezüglich der Nummerierungen getroffen werden.

1. Fall: $\widetilde{I}_k \neq \emptyset$. Es sei $\widetilde{I}_k = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset I_k$, $m \in \mathbb{N}$ mit $x_i < x_j$ für $i < j$. Für $G \in \left\{\widetilde{J}_k, \widetilde{J}_{k+1}, \widetilde{T}_{x_i}, H_{x_i}, T_{x_i}\right\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ seien bijektive Nummerierungen (w_G, γ_G) vorgelegt. Nach Satz 2.29.4. auf Seite 46 hängt der Isomorphietyp eines Verschlingungsmoduls nicht von der Wahl einer bijektiven Nummerierung ab. Im folgenden wird erläutert, wie

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}} : E_{\widetilde{J}_{k+1}} \to \mathcal{E}_{|E_{\widetilde{J}_{k+1}}|} \quad \text{und} \quad \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}} : E_{\widetilde{T}_{x_i}} \to \mathcal{E}_{|E_{\widetilde{T}_{x_i}}|}$$

für $i \in \{1, \ldots, m\}$ ausgewählt werden sollen. Dazu definiert man mithilfe der n_{x_i} aus (7.12) auf Seite 200 zunächst Zahlen

$$b(i,j) := 2 + j + \sum_{\sigma=1}^{i-1} n_{x_\sigma} \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{und} \quad 0 \leq j \leq n_{x_i} - 1, \tag{7.25}$$

die sich vermöge der Tabelle

(i,j)	$(1,0)$	$(1,1)$	$\cdots$	$(1,n_{x_1}-1)$	$(2,0)$	$\cdots$	$(2,n_{x_2}-1)$	$(3,0)$	$\cdots$
$b_{(i,j)}$	2	3	$\cdots$	$n_{x_1}+1$	$n_{x_1}+2$	$\cdots$	$n_{x_1}+n_{x_2}+1$	$n_{x_1}+n_{x_2}+2$	$\cdots$

veranschaulichen lassen. Für $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}$ und $\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}$ sollen nun

$$\begin{aligned} \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k) &:= e_1, & \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}(\epsilon_k) &:= e_1, \\ \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\varepsilon_{x_i}) &:= e_{b(i,0)}, & \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}(\varepsilon_{x_i}) &:= e_2, \\ \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(D^W_{x_i} i_{x_i}(j)\right) &:= e_{b(i,j)}, & \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(D^W_{x_i} i_{x_i}(j)\right) &:= e_{j+2} \end{aligned} \tag{7.26}$$

gelten. Dabei seien $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n_{x_i}-1$. Außerdem sind $D^W_{x_i}$, i_{x_i} die Abbildungen sowie $\varepsilon_{x_i} = D^W_{x_i}\left(l_{\sigma_{x_i}}\right)$ die eindeutig definierte Kante aus Lemma 7.7 auf Seite 201, und ϵ_k die Kante des Graphen W von Seite 197. Für das größte Element $b_{\max}$ aller $b(i,j)$ aus (7.25) gilt

$$b_{\max} := \max\left\{b_{(i,j)} \mid 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n_{x_i} - 1\right\} = b_{(m,n_{x_m}-1)}.$$

Mithilfe dieser Zahl sei die Einschränkung

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}\Big|_{E_{G_0}} : E_{G_0} \to \left\{e_{b_{\max}+1}, \ldots, e_{b_{\max}+|E_{G_0}|}\right\} \tag{7.27}$$

auf die Kanten des Teilgraphen $G_0 < \widetilde{J}_{k+1}$ festgelegt. Auf allen anderen Kanten ist keine spezielle Festlegung von $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}$ und $\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}$ notwendig.

Wie gewohnt werden nun einige Bezeichnungen bezüglich der Nummerierungen bereitgestellt. Nach (7.17) auf Seite 205 gibt es Inklusionen $\widetilde{K}_{x_i} : E_{T_{x_i}} \to E_{\widetilde{T}_{x_i}}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. In dem Diagramm $(*)$ von (7.28) sei $\Xi_{x_i} := \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}} \circ \widetilde{K}_{x_i} \circ \left(\gamma_{T_{x_i}}\right)^{-1}$ gegeben durch eine Bijektion

$$\xi_{x_i} : \left\{1, \ldots, |E_{T_{x_i}}|\right\} \to \left\{1, \ldots, |E_{\widetilde{T}_{x_i}}|\right\} \setminus \{3, \ldots, n_{x_i} + 1\}.$$

Wegen $\widetilde{E}_{x_i} \overset{19., \text{S.205}}{=} E_{\widetilde{T}_{x_i}} \setminus E_{T_{x_i}}$ und (7.26) ist ξ_{x_i} wohldefiniert. Wenn $n_{x_i} = 1$ ist, ist $\widetilde{T}_{x_i} = T_{x_i}$ und $\widetilde{K}_{x_i}$ die Identität. Es gelte also $\Xi_{x_i}(e_j) := e_{\xi_{x_i}(j)}$ für $e_j \in \mathcal{E}_{|E_{T_{x_i}}|}$. Darüber hinaus seien bezüglich den Inklusionen

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{r}_{x_i}, \widetilde{R}_{x_i}\right) : \widetilde{T}_{x_i} \to H_{x_i} \quad & \text{die Abbildung } \widetilde{R}_{x_i} \text{ in 2.1 auf Seite 27 gegeben durch} \quad (\Delta_{x_i}; \delta_{x_i}), \\ \left(\widetilde{l}_{x_i}, \widetilde{L}_{x_i}\right) : H_{x_i} \to \widetilde{J}_{k+1} \quad & \text{die Abbildung } \widetilde{L}_{x_i} \text{ in 2.1 auf Seite 27 gegeben durch} \quad (\Lambda_{x_i}; \lambda_{x_i}), \\ \left(\widetilde{p}, \widetilde{P}\right) : \widetilde{J}_k \to \widetilde{J}_{k+1} \quad & \text{die Abbildung } \widetilde{P} \text{ in 2.1 auf Seite 27 gegeben durch} \quad (\Pi; \pi), \end{aligned}$$

so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

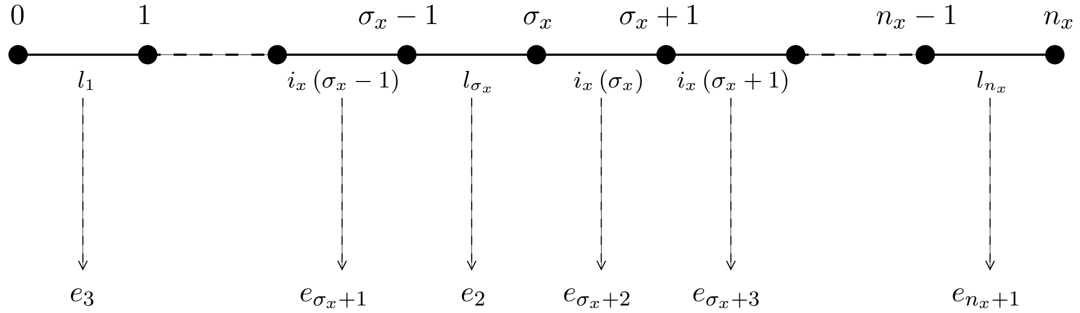
$$\begin{tikzcd}
E_{T_{x_i}} \arrow[r, "\widetilde{K}_{x_i}"] \arrow[d, "\gamma_{T_{x_i}}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & E_{\widetilde{T}_{x_i}} \arrow[r, "\widetilde{R}_{x_i}"] \arrow[d, "\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}"'] & E_{H_{x_i}} \arrow[r, "\widetilde{L}_{x_i}"] \arrow[d, "\gamma_{H_{x_i}}"'] & E_{\widetilde{J}_{k+1}} \arrow[d, "\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}"'] & E_{\widetilde{J}_k} \arrow[l, "\widetilde{P}"'] \arrow[d, "\gamma_{\widetilde{J}_k}"'] \\
\mathcal{E}_{|E_{T_{x_i}}|} \arrow[r, "\Xi_{x_i}"] & \mathcal{E}_{|E_{\widetilde{T}_{x_i}}|} \arrow[r, "\Delta_{x_i}"] & \mathcal{E}_{|E_{H_{x_i}}|} \arrow[r, "\Lambda_{x_i}"] & \mathcal{E}_{|E_{\widetilde{J}_{k+1}}|} & \mathcal{E}_{|E_{\widetilde{J}_k}|} \arrow[l, "\Pi"']
\end{tikzcd} . \tag{7.28}$$

2. Fall: $\widetilde{I}_k = \emptyset$. Vorgelegt seien bijektive Nummerierungen (w_G, γ_G) für $G \in \left\{\widetilde{J}_k, \widetilde{J}_{k+1}\right\}$. Wie im rechten Diagramm von (7.28) sei $\widetilde{P}$ durch (Π, π) gegeben und es gelte $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k) := e_1$. Darüber hinaus sei die Einschränkung (7.27) mit $b_{\max} := 1$ gegeben.

Satz 7.16 *Es sei $x \in \widetilde{I}_k \neq \emptyset$. Für n_x aus (7.12) auf Seite 200 und σ_x aus 7.7.11. auf Seite 201 gelte $\sigma_x \in \{1, \dots, n_x\}$ und $n_x \geq 2$ in 34. bis 37. Es gelten die Aussagen:*

33. $\rho\left(\xi_x^{-1}(1), \xi_x^{-1}(2)\right) \in IE\,(T_x)$ *und* $\rho(1,2) \in IE(\widetilde{T}_x)$.
34. $\sigma_x \in \{2, \dots, n_x\} \;\Rightarrow\; \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma_x+1})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_2)\right) = \left\{d_x^W(\sigma_x - 1)\right\}$.
35. $\sigma_x \in \{1, \dots, n_x - 1\} \;\Rightarrow\; \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma_x+2})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_2)\right) = \left\{d_x^W(\sigma_x)\right\}$.
36. $\sigma_x \geq 3, \sigma \in \{1, \dots, \sigma_x - 2\} \;\Rightarrow\; \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma+2})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma+3})\right) = \left\{d_x^W(\sigma)\right\}$.
37. $\sigma_x \leq n_x - 2, \sigma \in \{\sigma_x, \dots, n_x - 2\} \;\Rightarrow\; \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma+2})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma+3})\right) = \left\{d_x^W(\sigma + 1)\right\}$.

Bemerkung Die untenstehende Abbildung illustriert die Aussagen von Satz 7.16.



Hier wird J'_{n_x} zusammen mit der Speziellen injektiven Abbildung i_x veranschaulicht. Die vertikalen Pfeile symbolisieren die Einschränkung der Nummerierung $\gamma_{\widetilde{T}_x}$ auf P_x.

Beweis **Zu 33.:** Es gelten $\gamma_{T_x}(\varepsilon_x) \overset{(7.28)}{=} \Xi_x^{-1}\gamma_{\widetilde{T}_x}(\varepsilon_x) \overset{(7.26)}{=} e_{\xi_x^{-1}(2)}$ sowie $\gamma_{T_x}(\epsilon_k) \overset{(7.28)}{=} \Xi_x^{-1}\gamma_{\widetilde{T}_x}(\epsilon_k) \overset{(7.26)}{=} e_{\xi_x^{-1}(1)}$. Aus $\nu g_{T_x}(\epsilon_k) \cap \nu g_{T_x}(\varepsilon_x) \overset{17., \text{S.}204}{=} \emptyset$ folgt daher $\rho\left(\xi_x^{-1}(2), \xi_x^{-1}(1)\right) \in IE\,(T_x)$. Mithilfe von Lemma 4.21.1. auf Seite 94 gilt $\rho\left(\xi_x\xi_x^{-1}(1), \xi_x\xi_x^{-1}(2)\right) = \rho(1,2) \in$

$IE(\widetilde{T}_x)$.

Zu 34.: Aus (7.26) folgt $\gamma_{\widetilde{T}_x}\left(D_x^W i_x(\sigma_x - 1)\right) = e_{\sigma_x+1}$ und $\gamma_{\widetilde{T}_x}\left(D_x^W(l_{\sigma_x})\right) = e_2$. Man berechnet

$$\begin{aligned}
&\nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma_x+1})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_2)\right)\\
&\quad = \quad \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(D_x^W i_x(\sigma_x - 1)\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(D_x^W(l_{\sigma_x})\right)\\
&\quad \overset{20.,\ \underline{S.205}}{=} \quad \nu g_{H_x}\left(D_x^W i_x(\sigma_x - 1)\right) \cap \nu g_{H_x}\left(D_x^W(l_{\sigma_x})\right)\\
&\quad \overset{(7.12),\ \underline{S.200}}{=} \quad \nu\left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}\left(i_x(\sigma_x - 1)\right) \cap \nu\left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}(l_{\sigma_x})\\
&\quad \overset{12.,\ \underline{S.201}}{=} \quad \nu\left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}(l_{\sigma_x-1}) \cap \nu\left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}(l_{\sigma_x})\\
&\quad = \quad \left\{d_x^W(\sigma_x - 1), d_x^W(\sigma_x - 2)\right\} \cap \left\{d_x^W(\sigma_x), d_x^W(\sigma_x - 1)\right\} = \left\{d_x^W(\sigma_x - 1)\right\}.
\end{aligned}$$

Zu 35.: Analog zu 34. wird folgende Rechnung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
&\nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_{\sigma_x+2})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}(e_2)\right)\\
&\quad = \quad \nu g_{H_x}\left(D_x^W i_x(\sigma_x)\right) \cap \left\{d_x^W(\sigma_x), d_x^W(\sigma_x - 1)\right\}\\
&\quad \overset{12.,\ \underline{S.201}}{=} \quad \nu\left(d_x^W \times d_x^W\right) g_{J'_{n_x}}(l_{\sigma_x+1}) \cap \left\{d_x^W(\sigma_x), d_x^W(\sigma_x - 1)\right\}\\
&\quad = \quad \left\{d_x^W(\sigma_x + 1), d_x^W(\sigma_x)\right\} \cap \left\{d_x^W(\sigma_x), d_x^W(\sigma_x - 1)\right\} = \left\{d_x^W(\sigma_x)\right\}.
\end{aligned}$$

Zu 36. und 37.: Diese Aussagen lassen sich genauso wie 34. bzw. 35. nachweisen. $\square$

Nach 21. auf Seite 205 geht T_x aus $\widetilde{T}_x$ durch Kontraktion der in H_x zweiwertigen Ecken $d_x^W(\sigma)$, $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\}$ hervor. Definiert man

$$\widetilde{op}(z_{n_x-1}) := \begin{cases} op(z_{n_x}) \circ \cdots \circ op(z_1) & : \quad n_x \geq 2 \\ id_{\mathcal{G}(T_x)} & : \quad n_x = 1 \end{cases},$$

so induzieren die Kontraktionen zusammen mit den unteren Abbildungen im Diagramm (7.28) die Homomorphismen

$$\mathcal{G}(T_x) \xrightarrow{\widetilde{op}(z_{n_x-1})} \mathcal{G}\left(\widetilde{T}_x\right) \xrightarrow{(\delta_x)_{\widetilde{T}_x}^{H_x}} \mathcal{G}(H_x) \xrightarrow{(\lambda_x)_{H_x}^{\widetilde{J}_{k+1}}} \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) \xleftarrow{\pi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}}} \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right). \tag{7.29}$$

Wie 6. auf Seite 198 sei t_x gemäß 6.9 auf Seite 186 ein erzeugendes Element von $\mathcal{G}(T_x)$, also $\langle t_x\rangle_{\mathbb{Z}} \overset{6.}{=} \mathcal{G}(T_x) \cong \mathbb{Z}$. Dessen Bild unter dem Isomorphismus $\widetilde{op}(z_{n_x-1})$ wird mit $\widetilde{t_x} := \widetilde{op}(z_{n_x-1})(t_x)$ bezeichnet.

Satz 7.17 *Es sei $x \in \widetilde{I}_k \neq \emptyset$. Wie in 7.16 auf Seite 219 sei $\sigma_x \in \{1, \ldots, n_x\}$ vorgelegt. Es gelten:*

38. $\left|(t_x)_{\rho\left(\xi_x^{-1}(1), \xi_x^{-1}(2)\right)}\right| = 1.$

39. $\left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,2)}\right| = 1.$

40. $n_x \geq 2 \;:\; \sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\} \;\Rightarrow\; \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,\sigma+2)}\right| = 1.$

Beweis **Zu 38.:** Laut 18. auf Seite 204 gibt es einen Graphen $K \in \{K_{3,3}, K_5, Z_2\}$, so dass $T_x \in sub\,(K)$ gilt. In diesem Zusammenhang betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_K \arrow[r, "F_x"] \arrow[d, "\gamma_K"'] & E_{T_x} \arrow[d, "\gamma_{T_x}"] \\ \mathcal{E}_{|E_K|} \arrow[r, "\widetilde{\Xi}_x"] & \mathcal{E}_{|E_{T_x}|} \end{tikzcd} \quad , \tag{7.30}$$

wobei (w_K, γ_K) eine bijektive Nummerierung von K, F_x eine Inklusion und $\widetilde{\Xi}_x := \gamma_{T_x} \circ F_x \circ \gamma_K^{-1}$ durch eine injektive Abbildung $\widetilde{\xi}_x : \{1, \ldots, |E_K|\} \to \{1, \ldots, |E_{T_x}|\}$ gegeben ist. Diese induziert mittels 4.24 auf Seite 96 einen Isomorphismus $\overline{op} : \mathcal{G}\,(K) \to \mathcal{G}\,(T_x)$. Sei $t_K := \overline{op}^{-1}\,(t_x)$. Gemäß 18. auf Seite 204 sind die Kanten $\varepsilon_x, \epsilon_k \in E_K \subset E_{T_x}$ nicht inzident in K. Aus

$$\begin{aligned} \gamma_K\,(\epsilon_k) &\overset{(7.30)}{=} \widetilde{\Xi}_x^{-1}\gamma_{T_x}\,(\epsilon_k) \overset{(7.26),\,(7.28)}{=} \widetilde{\Xi}_x^{-1}\left(e_{\xi_x^{-1}(1)}\right) = e_{\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(1)} \quad \text{und} \\ \gamma_K\,(\varepsilon_x) &\overset{(7.30)}{=} \widetilde{\Xi}_x^{-1}\gamma_{T_x}\,(\varepsilon_x) \overset{(7.26),\,(7.28)}{=} \widetilde{\Xi}_x^{-1}\left(e_{\xi_x^{-1}(2)}\right) = e_{\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(2)} \end{aligned}$$

folgt daher $\left|(t_K)_{\rho\left(\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(1),\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| = 1$ mithilfe von 6.2 auf Seite 181, 6.6 auf Seite 183, 6.8 auf Seite 184. Man berechnet nun

$$\begin{aligned} \left|(t_x)_{\rho\left(\xi_x^{-1}(1),\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| &\overset{4.28,\text{ S.}100,\ 4.29,\text{ S.}103}{=} \left|\left(\overline{op}^{-1}\,(t_x)\right)_{\rho\left((\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(1),\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| \\ &= \left|(t_K)_{\rho\left(\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(1),\widetilde{\xi}_x^{-1}\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| = 1. \end{aligned}$$

Zu 39.:

$$\left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,2)}\right| \overset{4.28,\ 4.29}{=} \left|\widetilde{op}\,(z_{n_x-1})^{-1}\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho\left(\xi_x^{-1}(1),\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| = \left|(t_x)_{\rho\left(\xi_x^{-1}(1),\xi_x^{-1}(2)\right)}\right| \overset{38.}{=} 1.$$

Zu 40.: Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \sigma \in \{1, \ldots, n_x - 1\} \quad &\Rightarrow \quad D_x^W i_x(\sigma) \in \widetilde{E}_x \\ &\overset{23.,\text{ S.}205}{\Rightarrow} \quad \emptyset = \nu g_{\widetilde{T}_x} D_x^W\,(i_x(\sigma)) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\,(\epsilon_k) \\ &\qquad \overset{(7.26),\text{ S.}218}{=} \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}\,(e_{\sigma+2})\right) \cap \nu g_{\widetilde{T}_x}\left(\gamma_{\widetilde{T}_x}^{-1}\,(e_1)\right) \\ &\Rightarrow \quad \rho(1, \sigma+2) \in IE(\widetilde{T}_x). \end{aligned} \tag{7.31}$$

1. Fall: $\sigma_x \geq 3$.

(a) $\sigma \in \{1, \ldots, \sigma_x - 2\} \;\Rightarrow\; \sigma \leq n_x - 1, \sigma + 1 \leq n_x - 1 \overset{(7.31)}{\Rightarrow} \rho(1, \sigma+2), \rho(1, \sigma+3) \in IE(\widetilde{T}_x) \overset{\text{36. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+3)}\right|$.

(b) $\sigma_x - 1 \leq n_x - 1 \overset{(7.31)}{\Rightarrow} \rho\,(1, \sigma_x + 1) \in IE(\widetilde{T}_x) \overset{\text{34., 33. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} 1 \overset{39.}{=} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma_x+1)}\right|$.

Aus (a) und (b) ergibt sich

$$1 = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma)}\right| \quad \text{für alle} \quad \sigma \in \{3, \ldots, \sigma_x + 1\}\,. \tag{7.32}$$

1. Unterfall: $\sigma_x = n_x$. Hier ist (7.32) bereits die Behauptung.

2. Unterfall: $\sigma_x \leq n_x - 2$.

(c) $\sigma \in \{\sigma_x, \ldots, n_x - 2\} \;\Rightarrow\; \sigma \leq n_x - 1, \sigma + 1 \leq n_x - 1 \overset{(7.31)}{\Rightarrow} \rho(1, \sigma+2), \rho(1, \sigma+3) \in IE(\widetilde{T}_x) \overset{\text{37. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+3)}\right|$.

(d) $\sigma_x \leq n_x - 2 \leq n_x - 1 \overset{(7.31)}{\Rightarrow} \rho\,(1, \sigma_x + 2) \in IE(\widetilde{T}_x) \overset{\text{35., 33. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} 1 \overset{39.}{=} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma_x+2)}\right|$.

Aus (c) und (d) erhält man $1 = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma)}\right|$ für alle $\sigma \in \{\sigma_x + 2, \ldots, n_x + 1\}$. Zusammen mit (7.32) ergibt sich die Behauptung.

3. Unterfall: $\sigma_x = n_x - 1$. Mit (7.31) folgt daraus $\rho\,(1, \sigma_x + 2) \in IE(\widetilde{T}_x)$, also $1 \overset{39.}{=} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,n_x+1)}\right|$ mit 35., 33. und 4.27.1. Zusammen mit (7.32) folgt die Behauptung.

2. Fall: $\sigma_x = 2$. Aus 33., 34., (7.31) und 4.27.1. erhält man

$$1 \overset{39.}{=} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,3)}\right|. \tag{7.33}$$

1. Unterfall: $\sigma_x \leq n_x - 2$.

(e) $\sigma \in \{\sigma_x = 2, \ldots, n_x - 2\} \overset{(7.31)}{\Rightarrow} \rho(1, \sigma+2), \rho(1, \sigma+3) \in IE(\widetilde{T}_x) \overset{\text{37. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma+3)}\right|$.

(f) $1 < \sigma_x = 2 \leq n_x - 2 \leq n_x - 1 \overset{\text{35., 33. und 4.27.1., S.100}}{\Rightarrow} 1 \overset{39.}{=} \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,2)}\right| = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,4)}\right|$.

Aus (e) und (f) folgt $1 = \left|(\widetilde{t}_x)_{\rho(1,\sigma)}\right|$ für alle $\sigma \in \{4, \ldots, n_x + 1\}$. Zusammen mit (7.33) ergibt sich die Behauptung.

2. Unterfall: $\sigma_x = n_x - 1$. Daraus folgt $n_x + 1 = 4$. Auch hier gilt (f) und daher mit (7.33) die Behauptung.

3. Unterfall: $\sigma_x = n_x = 2$. Wegen $n_x + 1 = 3$ ist gemäß (7.33) nichts mehr zu zeigen.

3. Fall: $\sigma_x = 1$.

1. Unterfall: $1 = \sigma_x \leq n_x - 2$. Wie in (e) gilt $\left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,\sigma+2)}\right| = \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,\sigma+3)}\right|$ für alle $\sigma \in \{1, \ldots, n_x - 2\}$. Mit 35., 33. und 4.27.1. folgt $1 \overset{39.}{=} \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,2)}\right| = \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,3)}\right|$ und somit die Behauptung.

2. Unterfall: $1 = \sigma_x = n_x - 1$. Es folgt $n_x = 2$. Wegen (7.31) gilt $\rho(1, \sigma_x + 2) = \rho(1, 3) \in IE(\widetilde{T}_x)$ und mit 35., 33. sowie 4.27.1. ergibt sich die Behauptung $1 \overset{39.}{=} \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,2)}\right| = \left|\left(\widetilde{t}_x\right)_{\rho(1,3)}\right|$. $\square$

Satz 7.18 *Es sei $\widetilde{I}_k = \{x_1, \ldots, x_m\} \neq \emptyset$.*

41. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$,$j \in \{0, \ldots, n_{x_i} - 1\}$ gilt $\left[(\lambda_{x_i}\delta_{x_i})^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(\widetilde{t}_{x_i}\right)\right]_{(1,b(i,j))} \in \{-1, 1\}$.

42. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\sigma > i$ und $j \in \{0, \ldots, n_{x_\sigma} - 1\}$ gilt $\left[(\lambda_{x_i}\delta_{x_i})^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(\widetilde{t}_{x_i}\right)\right]_{(1,b(\sigma,j))} = 0$.

43. Für $c \in \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)$ und $(1, \sigma) \in IE\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ gilt $\left[\pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}(c)\right]_{(1,\sigma)} = 0$.

Beweis **Zu 41.:**

(a) $e_1 \overset{(7.26),\text{ S.218}}{=} \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k) \overset{(7.28),\text{ S.219}}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}(\epsilon_k) \overset{(7.26),\text{ S.218}}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}(e_1) \;\Rightarrow\; 1 = \lambda_{x_i}\delta_{x_i}(1)$.

(b) $e_{b(i,0)} \overset{(7.26)}{=} \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\varepsilon_{x_i}) \overset{(7.28)}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}(\varepsilon_{x_i}) \overset{(7.26)}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}(e_2) \;\Rightarrow\; b(i, 0) = \lambda_{x_i}\delta_{x_i}(2)$.

(c) $e_{b(i,j)} \overset{(7.26),\ j>0}{=} \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(D^W_{x_i} i_{x_i}(j)\right) \overset{(7.28)}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}\gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(D^W_{x_i} i_{x_i}(j)\right)$
$\overset{(7.26)}{=} \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}\left(e_{j+2}\right) \;\Rightarrow\; b(i, j) = \lambda_{x_i}\delta_{x_i}(j + 2)$.

(d) $j \in \{0, \ldots, n_{x_i} - 1\} \overset{33.,(7.31),\text{ S.221}}{\Rightarrow} \rho(1, j + 2) \in IE(\widetilde{T}_{x_i}) \;\Rightarrow\; \rho\left(1, b(i, j)\right) \overset{(a),(b),(c)}{=} \rho\left(\lambda_{x_i}\delta_{x_i}(1), \lambda_{x_i}\delta_{x_i}(j + 2)\right) \overset{2.43,\text{ S.57}}{\in} IE\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Wegen (d) lässt sich nun

$$\left[(\lambda_{x_i}\delta_{x_i})^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(\widetilde{t}_{x_i}\right)\right]_{(1,b(i,j))} \overset{2.33,\text{ S.50, }2.45,\text{ S.59}}{=} \left(\widetilde{t}_{x_i}\right)_{\rho(1,j+2)} \overset{39.,40.}{\in} \{1, -1\}$$

berechnen.

Zu 42.: Nach Satz 2.45 auf Seite 59 und Definition 2.33 auf Seite 50 genügt es

(a) $\rho\left(1, b(\sigma, j)\right) \in IE\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ und (b) $b(\sigma, j) \notin \operatorname{Bild} \lambda_{x_i}\delta_{x_i}$

zu zeigen.

Zu (a): Nach (7.26) gibt es eine Kante $c \in E_{P_{x_\sigma}}$, für die $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) = e_{b(\sigma,j)}$ gilt. Es folgt $\emptyset \overset{23., \text{ S.205}}{=} \nu g_{\widetilde{T}_{x_\sigma}}(c) \cap \nu g_{\widetilde{T}_{x_\sigma}}(\epsilon_k) \overset{(7.28)}{=} \nu g_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) \cap \nu g_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k)$. Also gilt $(1, b(\sigma, j)) \in IE\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Zu (b): Die Kante c aus (a) kann keine Kante von G_{x_σ} sein. Wegen $x_\sigma \geq x_{i+1} \geq x_i + 1$ (siehe Text vor (7.11) auf Seite 200) ist sie daher auch nicht Kante von G_{x_i+1}. Zusammen mit der Definition (7.25) von $b(\sigma, j)$ auf Seite 218 lässt sich die Aussage

$$c \notin E_{G_{x_i+1}} \quad \wedge \quad b(\sigma, j) \geq 2 \tag{7.34}$$

formulieren. Angenommen (b) gilt nicht, also gebe es ein β mit $\lambda_{x_i}\delta_{x_i}(\beta) = b(\sigma, j)$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& e_{b(\sigma,j)} = \Lambda_{x_i}\Delta_{x_i}(e_\beta) \;\Rightarrow\; \exists y \in E_{\widetilde{T}_{x_i}} : \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}(y) = e_\beta \\
& \overset{(7.28)}{\Rightarrow} \quad \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(y) = e_{b(\sigma,j)} \\
& \overset{\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}} \text{ bij.}}{\Rightarrow} \quad c = y \in E_{\widetilde{T}_{x_i}} \overset{20., \text{ S.205}}{\subset} E_{H_{x_i}} \overset{10., \text{ S.201}}{=} E_{G_{x_i+1}} \cup E_W \\
& \Rightarrow \quad c \in E_{G_{x_i+1}} \vee c = \epsilon_k \overset{(7.26)}{\Rightarrow} c \in E_{G_{x_i+1}} \vee e_1 = \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) = e_{b(\sigma,j)} \\
& \Rightarrow \quad c \in E_{G_{x_i+1}} \vee b(\sigma, j) = 1. \quad \text{Widerspruch zu (7.34)!}
\end{aligned}$$

Zu 43.: Es ist $1 \notin \operatorname{Bild} \pi$ nachzuweisen. Angenommen es gibt ein β mit $\pi(\beta) = 1$. Daraus folgt

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k) = e_1 = e_{\pi(\beta)} = \Pi(e_\beta) = \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\gamma_{\widetilde{J}_k}^{-1}(e_\beta)\right).$$

Da $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}$ bijektiv ist, ergibt sich daraus $\epsilon_k = \gamma_{\widetilde{J}_k}^{-1}(e_\beta) \in E_{\widetilde{J}_k}$. Das ist ein Widerspruch zu $\{\epsilon_k\} = E_{\widetilde{J}_{k+1}} \setminus E_{\widetilde{J}_k}$. □

Da G_0 als erster Graph der Kette eine Unterteilung von K_4 ist, und der Graph W von Seite 197 aus genau einer Kante besteht, dessen Ecken zu der Eckenmenge von G_0 gehören, kann Satz 7.4 auf Seite 189 auf $G_0 \cup W$ angewendet werden. Je nachdem welcher Fall dort eintritt, sei der Graph $\widetilde{T}^\alpha_\beta \in \left\{\widetilde{T}^{1a}_{-1}, \widetilde{T}^{1a}_0, \widetilde{T}^{1b}_0, \widetilde{T}^{1c}_0, \widetilde{T}^{2a}_0, \widetilde{T}^{4a}_0\right\}$ vorgelegt. In jedem Fall gilt dort $\widetilde{T}^\alpha_\beta \in sub(Z_2) \cup sub(K_{3,3})$, daher gibt es ein erzeugendes Element $\widetilde{t}^\alpha_\beta \in \mathcal{G}\left(\widetilde{T}^\alpha_\beta\right) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz 6.9 auf Seite 186. Bezüglich der Teilgraphen $\widetilde{T}^\alpha_\beta < G_0 \cup W < \widetilde{J}_{k+1}$ seien die jeweiligen Inklusionen $E_{\widetilde{T}^\alpha_\beta} \hookrightarrow E_{G_0 \cup W}$ und $E_{G_0 \cup W} \hookrightarrow E_{\widetilde{J}_{k+1}}$ in Generalvoraussetzung 2.1 auf Seite 27 gegeben durch $\left(\Omega^\alpha_\beta; \omega^\alpha_\beta\right)$ bzw. $(\Phi; \phi)$.

Satz 7.19 *44. Für $\widetilde{I}_k \neq \emptyset$ gilt: $\sigma \in \{2, \ldots, b_{\max}\} \Rightarrow \left[\left(\phi\omega^\alpha_\beta\right)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}^\alpha_\beta}\left(\widetilde{t}^\alpha_\beta\right)\right]_{(1,\sigma)} = 0.$*

45. Es gibt eine Zahl $\tau \in \{1, \ldots, |E_{G_0}|\}$*, so dass gilt:*

$$\left[\left(\phi\omega_0^{1a}\right)_{\widetilde{T}_0^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_0^{1a}\right)\right]_{(1,b_{\max}+\tau)} = 0, \quad \left[\left(\phi\omega_{-1}^{1a}\right)_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_{-1}^{1a}\right)\right]_{(1,b_{\max}+\tau)} \in \{\pm 1\}.$$

46. Zu jedem $\widetilde{T}_\beta^\alpha$ *gibt es eine Zahl* $\tau \in \{1, \ldots, |E_{G_0}|\}$*, so dass gilt:*

$$\left[\left(\phi\omega_\beta^{\alpha}\right)_{\widetilde{T}_\beta^{\alpha}}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_\beta^{\alpha}\right)\right]_{(1,b_{\max}+\tau)} \in \{\pm 1\}.$$

Beweis **Zu 44.:** Da $\sigma \in \{2, \ldots, b_{\max}\}$ gilt, gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{0, \ldots, n_{x_i} - 1\}$, so dass $\sigma = b(i,j)$ erfüllt ist. Daher existiert eine Kante c von P_{x_i}, für die $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(c) = e_{b(i,j)} = e_\sigma$ gilt. Wie in 42. (a) folgt nun $(1, \sigma) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$.

Jetzt ist noch $\sigma \notin \operatorname{Bild} \phi\omega_\beta^\alpha$ zu zeigen. Angenommen es gibt ein z mit $\phi\omega_\beta^\alpha(z) = \sigma$. Für $y := \gamma_{\widetilde{T}_\beta^\alpha}^{-1}(e_z) \in E_{\widetilde{T}_\beta^\alpha} \subset E_{G_0 \cup W} = E_{G_0} \cup E_W$ gilt dann

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(y) = \Phi\Omega_\beta^\alpha \gamma_{\widetilde{T}_\beta^\alpha}(y) = e_{\phi\omega_\beta^\alpha(z)} = e_\sigma.$$

1. Fall: $y \in E_W$. Daraus folgt $y = \epsilon_k$, also $e_1 = \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(\epsilon_k) = e_\sigma$. Dies ergibt den Widerspruch $1 = \sigma \geq 2$.

2. Fall: $y \in E_{G_0}$. Nach (7.27) auf Seite 218 gibt es $\tau \in \{1, \ldots, |E_{G_0}|\}$, so dass $e_\sigma = \gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(y) = e_{b_{\max}+\tau}$ gilt. Man erhählt den Widerspruch $b_{\max} \geq \sigma = b_{\max} + \tau \geq b_{\max} + 1$.

Zu 45.: Vorgelegt sei die Situation des ersten Unterfalls im 3. Fall auf Seite 192 von Satz 7.4. Für die Kante A gilt dort $A \in E_{C_1} \subset E_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}} \subset E_{G_0}$ sowie $A \notin E_{\widetilde{T}_0^{1a}}$, denn $A \notin E_{C_2}$. Für die Nummerierung von $\widetilde{T}_{-1}^{1a}$ gelte $\gamma_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}(A) := e_2$ und $\gamma_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}(\epsilon_k) := e_1$. Nach (7.27) auf Seite 218 gibt es ein $\tau \in \{1, \ldots, |E_{G_0}|\}$ mit

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(A) = \Phi\Omega_{-1}^{1a} \gamma_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}(A) = e_{\phi\omega_{-1}^{1a}(2)} = e_{b_{\max}+\tau}.$$

Da A und ϵ_k in $C_1 \cup C_0$ nicht inzident sind, sind sie es nach Lemma 4.21.1. auf Seite 94 auch nicht in $\widetilde{T}_{-1}^{1a}$. Daher gilt $\rho(1,2) \in IE\left(\widetilde{T}_{-1}^{1a}\right)$ und mit Lemma 2.43 auf Seite 57 folgt $\rho\left(1, b_{\max} + \tau\right) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$. Nun berechnet man

$$\left[\left(\phi\omega_{-1}^{1a}\right)_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_{-1}^{1a}\right)\right]_{(1,b_{\max}+\tau)} = \left(\widetilde{t}_{-1}^{1a}\right)_{(1,2)} \overset{6.9,\ \text{S.}186}{\in} \{1, -1\}.$$

Zum Nachweis der ersten Aussage ist $b_{\max} + \tau \notin \operatorname{Bild} \phi\omega_0^{1a}$ zu zeigen. Angenommen es gibt β mit $\phi\omega_0^{1a}(\beta) = b_{\max} + \tau$. Dann existiert ein $y \in E_{\widetilde{T}_0^{1a}}$, für das $\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(y) = \Phi\Omega_0^{1a}(e_\beta) = e_{b_{\max}+\tau}$ gilt. Aus der Bijektivität der Nummerierung folgt $y = A \in E_{\widetilde{T}_0^{1a}}$. Widerspruch!

Zu 46.: Da $\widetilde{T}_\beta^\alpha$ eine Unterteilung von Z_2 oder $K_{3,3}$ ist und die Kante ϵ_k enthält, gibt es eine

Kante A von $\widetilde{T}^\alpha_\beta$, die in $\widetilde{T}^\alpha_\beta$ nicht inzident zu ϵ_k ist. Es gelte $\gamma_{\widetilde{T}^\alpha_\beta}(A) := e_2$ und $\gamma_{\widetilde{T}^\alpha_\beta}(\epsilon_k) := e_1$. Daher gilt $\rho(1,2) \in IE\left(\widetilde{T}^\alpha_\beta\right)$. Nach (7.27) auf Seite 218 gibt es ein $\tau \in \{1, \ldots, |E_{G_0}|\}$ mit

$$\gamma_{\widetilde{J}_{k+1}}(A) = \Phi\Omega^\alpha_\beta \gamma_{\widetilde{T}^\alpha_\beta}(A) = e_{\phi\omega^\alpha_\beta(2)} = e_{b_{\max}+\tau}.$$

Mit Lemma 2.43 auf Seite 57 folgt $\rho\,(1, b_{\max} + \tau) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$. Nun berechnet man

$$\left[\left(\phi\omega^\alpha_\beta\right)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}^\alpha_\beta}\left(\widetilde{t}^\alpha_\beta\right)\right]_{(1,b_{\max}+\tau)} = \left(\widetilde{t}^\alpha_\beta\right)_{(1,2)} \overset{6.9,\ S.186}{\in} \{1,-1\}.$$

$\square$

Zum Abschluss wird gezeigt, dass die durch die Auswahl induzierten Elemente eine Basis des Verschlingungsmoduls von $\widetilde{J}_{k+1}$ bilden. Die lineare Unhabhängigkeit wird in 7.20 für $\widetilde{I}_k \neq \emptyset$ und in Satz 7.21 auf Seite 228 für $\widetilde{I}_k = \emptyset$ nachgewiesen. Dass es sich um ein Erzeugendensystem handelt, ergibt sich in Satz 7.24 auf Seite 231 für $\widetilde{I}_k \neq \emptyset$ und in Satz 7.25 auf Seite 234 für $\widetilde{I}_k = \emptyset$.

Satz 7.20 *Die Menge $\widetilde{I}_k = \{x_1, \ldots, x_m\}$ aus (7.23) auf Seite 217 sei nicht leer. Gemäß (7.29) auf Seite 220 seien die Elemente $y_i := (\lambda_{x_i}\delta_{x_i})^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}_{x_i}}\left(\widetilde{t}_{x_i}\right)$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sowie mithilfe der Bezeichnungen vor Satz (7.19) auf Seite 224 die Menge*

$$\mathcal{D}_\alpha := \begin{cases} \left\{\left(\phi\omega^{1a}_0\right)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}^{1a}_0}\left(\widetilde{t}^{1a}_0\right), \left(\phi\omega^{1a}_{-1}\right)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}^{1a}_{-1}}\left(\widetilde{t}^{1a}_{-1}\right)\right\} & : \ \alpha = 1a \\ \left\{\left(\phi\omega^\alpha_0\right)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{T}^\alpha_0}\left(\widetilde{t}^\alpha_0\right)\right\} & : \ \alpha \in \{1b, 1c, 2a, 4a\} \\ \emptyset & : \ \alpha \in \{2b, 3, 4b\} \end{cases}$$

vorgelegt, je nachdem welcher Fall α in Satz 7.4 auf Seite 189 eintritt. Zusammen mit der Menge $\widetilde{\mathcal{B}}_k \subset \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ aus (7.9) auf Seite 199 gelten:

1. *$\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} := \widetilde{\mathcal{B}}_k \cup \mathcal{D}_\alpha \cup \{y_1, \ldots, y_m\}$ ist eine über $\mathbb{Z}$ linear unabhängige Menge von Elementen aus $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.*
2. *Rang$\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right) =$ Rang$\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) + |\mathcal{D}_\alpha| + m$.*

Beweis **Zu 1.:** Zunächst sei $\widetilde{\mathcal{B}}_k \neq \emptyset$. Die Menge $\left\{\Psi^{\widetilde{J}_k}_{\widetilde{T}_i}\left(\widetilde{t}_i\right) \mid 1 \leq i \leq N_{J_k}\right\}$ aus (7.8) auf Seite 198 ist eine Basis von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)$. Deren Elemente sollen nun als $\bar{y}_i := \Psi^{\widetilde{J}_k}_{\widetilde{T}_i}\left(\widetilde{t}_i\right)$ notiert werden. Die Inklusion von $\widetilde{J}_k$ nach $\widetilde{J}_{k+1}$ ist in diesem Zusammenhang gemäß (7.28) auf Seite 219 durch $(\Pi; \pi)$ gegeben, daher gilt $\Psi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k} = \pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}$ in der Menge (7.9) auf Seite 199. Mittels $\widetilde{y}_i := \pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}(\bar{y}_i)$ lässt sich somit $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \left\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{J_k}}\right\}$ schreiben. Zu zeigen ist:

$$s := \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \widetilde{y}_i + \sum_{y \in \mathcal{D}_\alpha} \sigma_y y + \sum_{i=1}^{m} \tau_i y_i = 0 \ \Rightarrow \ \mu_i = 0, \sigma_y = 0, \tau_i = 0. \tag{7.35}$$

Vorab werden die untenstehenden Behauptungen (a) und (b) nachgewiesen:

(a) Für jedes $j \in \{1,\ldots,m-1\}$ gilt: $\tau_m = \cdots = \tau_{j+1} = 0 \;\Rightarrow\; \tau_j = 0$.

(b) $\tau_m = 0$.

Zu (a): Sei $j \in \{1,\ldots,m-1\}$. Nach 41 (d) auf Seite 223 gilt $(1, b(j,0)) \in IE\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

i) $\forall i \in \{1,\ldots,N_{J_k}\} : \bar{y}_i \in \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right) \overset{43., \text{S.}223}{\Rightarrow} \forall i \in \{1,\ldots,N_{J_k}\} : (\widetilde{y}_i)_{(1,b(j,0))} = 0$.

ii) Für $j \geq 2$ gilt: $\forall i \in \{1,\ldots,j-1\} : j > i \overset{42., \text{S.}223}{\Rightarrow} \forall i \in \{1,\ldots,j-1\} : (y_i)_{(1,b(j,0))} = 0$.

iii) $(y_j)_{(1,b(j,0))} \in \{1,-1\}$ nach 41. auf Seite 223.

iv) $\forall y \in \mathcal{D}_\alpha : y_{(1,b(j,0))} = 0$ nach 44. auf Seite 224.

Aus i) bis iv), der Voraussetzung $\tau_m = \cdots = \tau_{j+1} = 0$ und (7.35) folgt $0 = s_{(1,b(j,0))} = \pm\tau_j$.
Zu (b): Die Aussagen i) bis iv) aus (a) gelten auch für $j = m$. Deshalb folgt $0 = s_{(1,b(m,0))} = \pm\tau_m$ aus (7.35).

Aus den Aussagen (a) und (b) ergibt sich $\tau_i = 0$ für jedes $i \in \{1,\ldots,m\}$. Mit (7.35) erhält man

$$s = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \widetilde{y}_i + \sum_{y \in \mathcal{D}_\alpha} \sigma_y y. \tag{7.36}$$

1. Fall: $\alpha \in \{2b, 3, 4b\}$. Hier gilt $\mathcal{D}\alpha = \emptyset$, daher berechnet man

$$0 = s = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \pi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}}(\bar{y}_i) = \pi_{\widetilde{J}_k}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \bar{y}_i\right) \overset{2.35., \text{S.}52}{\Rightarrow} 0 = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \bar{y}_i$$

aus (7.36). Da die Elemente $\bar{y}_i$ eine Basis von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)$ bilden, folgt $\mu_1 = \cdots = \mu_{N_{J_k}} = 0$.
2. Fall: $\alpha \in \{1b, 1c, 2a, 4a\}$. Sei $\mathcal{D}_\alpha = \{y\}$. Aus 46. auf Seite 225 folgt, dass es ein $\tau \in \{1,\ldots,|E_{G_0}|\}$ mit $y_{(1,b_{\max}+\tau)} \in \{1,-1\}$ gibt. Damit folgt $0 = s_{(1,b_{\max}+\tau)} = \pm\sigma_y$ aus 43. und (7.36). Wie im ersten Fall ergibt sich nun $\mu_i = 0$ für $i \in \{1,\ldots,N_{J_k}\}$.
3. Fall: $\alpha = 1a$. Für $i \in \{0,-1\}$ sei $y_i := \left(\phi\omega_i^{1a}\right)_{\widetilde{T}_i^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{t}_i^{1a}\right)$. Also gilt $\mathcal{D}_\alpha = \{y_{-1}, y_0\}$. Nach 45. gibt es ein $\tau \in \{1,\ldots,|E_{G_0}|\}$, so dass $(y_0)_{(1,b_{\max}+\tau)} = 0$ und $(y_{-1})_{(1,b_{\max}+\tau)} = \pm 1$ gelten. Mit 43. und (7.36) ergibt sich daraus $0 = s_{(1,b_{\max}+\tau)} = \pm\sigma_{y_{-1}}$. Also gilt

$$0 = s = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \widetilde{y}_i + \sigma_{y_0} y_0. \tag{7.37}$$

Gemäß 46. gibt es ein $\tau' \in \{1,\ldots,|E_{G_0}|\}$, so dass $(y_0)_{(1,b_{\max}+\tau')} = \pm 1$ gilt. Vermöge 43. erhält man $0 = s_{(1,b_{\max}+\tau')} = \pm\sigma_{y_0}$ aus (7.37). Wie im ersten Fall folgt dann auch

$\mu_1 = \cdots = \mu_{N_{J_k}} = 0.$

Nun sei $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \emptyset$. Die Aussagen (a) und (b) lassen sich genauso nachweisen. Es entfällt lediglich der Fall i) in (a). Da die Koeffizienten μ_i aus (7.35) nicht auftauchen, wird der 1. Fall nicht benötigt. Dementsprechend verkürzen sich die Betrachtungen im 2. und im 3. Fall.

Zu 2.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right) &\overset{31.,\ \underline{\text{S.}215}}{=} \operatorname{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) + D_k \\
&\overset{32.,\ \underline{\text{S.}215}}{=} \operatorname{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) + |\operatorname{Bild}\delta| + t_\alpha \\
&\overset{(7.23),\ \text{S.}217}{=} \operatorname{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) + \left|\widetilde{I}_k\right| + t_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.21 *Die Menge $\widetilde{I}_k$ aus (7.23) auf Seite 217 sei leer. Mithilfe der Bezeichnungen vor Satz (7.19) auf Seite 224 die Menge*

$$\mathcal{D}_\alpha := \begin{cases} \left\{ \left(\phi\omega_0^{1a}\right)_{\widetilde{T}_0^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}} \left(\widetilde{t}_0^{1a}\right), \left(\phi\omega_{-1}^{1a}\right)_{\widetilde{T}_{-1}^{1a}}^{\widetilde{J}_{k+1}} \left(\widetilde{t}_{-1}^{1a}\right) \right\} & : \quad \alpha = 1a \\ \left\{ \left(\phi\omega_0^{\alpha}\right)_{\widetilde{T}_0^{\alpha}}^{\widetilde{J}_{k+1}} \left(\widetilde{t}_0^{\alpha}\right) \right\} & : \quad \alpha \in \{1b, 1c, 2a, 4a\} \\ \emptyset & : \quad \alpha \in \{2b, 3, 4b\} \end{cases}$$

vorgelegt, je nachdem welcher Fall α in Satz 7.4 auf Seite 189 eintritt. Zusammen mit der Menge $\widetilde{\mathcal{B}}_k \subset \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ aus (7.9) auf Seite 199 gelten:

1. *$\widetilde{B}_{k+1} := \widetilde{B}_k \cup \mathcal{D}_\alpha$ ist eine über $\mathbb{Z}$ linear unabhängige Menge von Elementen aus $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.*
2. *Rang$\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right) =$ Rang$\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right)\right) + |\mathcal{D}_\alpha|$.*

Beweis **Zu 1.:** Der Beweis zu 1. in Satz 7.20 kann ab (7.36) übernommen werden.

Zu 2.: Laut (7.23) auf Seite 217 müssen die Fälle $X = \emptyset$ und $X \neq \emptyset$ untersucht werden. Falls $X = \emptyset$ ist, gilt $\operatorname{Bild}\delta = \emptyset$ laut den Definitionen vor 7.8 auf Seite 204. Mit 31. und 32. auf Seite 215 folgt die Behauptung. Nun sei $X \neq \emptyset$. Dann ist auch $\operatorname{Bild}\gamma \neq \emptyset$. Angenommen es gibt ein Element $P_i \in \operatorname{Bild}\gamma \setminus C$. Daraus folgt $i \in I_k$ laut den Definitionen (7.13) auf Seite 203 von X und (7.11) auf Seite 200 von I_k. Also gilt $i \in \widetilde{I}_k$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus diesem Widerspruch ergibt sich $\operatorname{Bild}\gamma \setminus C = \emptyset$. Wie oben folgt die Behauptung mithilfe der Definitionen vor 7.8. □

Bemerkung Lässt man in Satz 7.20 auf Seite 226 formal $m = 0$ zu, so ist die Aussage von Satz 7.21 in der von 7.20 enthalten. □

Lemma 7.22 *Vorgelegt sei die Situation aus 2.1 auf Seite 27. Debei seien die Graphen bijektiv nummeriert und $(f, F) : G \to H$ injektiv. Für $e_{(k,l)} \in M^{tr}\left(IV(G), \mathbb{G}\right)$ gilt $(\Psi, \psi)^H_G \left(e_{(k,l)}\right) = e_{(\Psi(k),\psi(l))}$.*

Beweis Zunächst gilt $(\Psi(k), \psi(l)) \in IV(H)$ nach 2.43 auf Seite 57. Sei $(s, i) \in IV(H)$ und vorerst $s = \Psi(s')$ sowie $i = \psi(i')$. Gemäß 2.43 ist $(s', i') \in IV(G)$ und man berechnet:

$$
\begin{aligned}
\left[(\Psi, \psi)^H_G \left(e_{(k,l)}\right)\right]_{(s,i)} &\overset{2.42,\,S.57}{=} \left(e_{(k,l)}\right)_{(s',i')} \\
&= \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & : & k \neq \Psi^{-1}(s) \,\vee\, l \neq \psi^{-1}(i) \\ 1 & : & k = \Psi^{-1}(s) \,\wedge\, l = \psi^{-1}(i) \end{array} \right\} = \left(e_{(\Psi(k),\psi(l))}\right)_{(s,i)} .
\end{aligned}
$$

Falls $s \notin \operatorname{Bild}\Psi$ oder $i \notin \operatorname{Bild}\psi$ gilt, folgt definitionsgemäß

$$
\left[(\Psi, \psi)^H_G \left(e_{(k,l)}\right)\right]_{(s,i)} = 0 = \left(e_{(\Psi(k),\psi(l))}\right)_{(s,i)} .
$$

□

Die Abbildung $\widetilde{P}$ des Inklusionshomomorphismus $\left(\widetilde{p}, \widetilde{P}\right) : \widetilde{J}_k \to \widetilde{J}_{k+1}$ sei weiterhin in Generalvoraussetzung 2.1 gegeben durch $(\Pi; \pi)$. Außerdem sei nun $\widetilde{p}$ in 2.1 durch $(\Upsilon; \upsilon)$ gegeben. Wie bisher seien (w_G, γ_G) für $G \in \left\{\widetilde{J}_k, \widetilde{J}_{k+1}\right\}$ bijektive Nummerierungen. Die in dem Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_k), \mathbb{Q}\right) \arrow[rrr, "\pi_{\mathbb{Q}}"] \arrow[ddd, "G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k}"'] \arrow[drrr, phantom, "\mathbf{i)}"] & & & M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Q}\right) \arrow[ddd, "G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}"] \\
& M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_k), \mathbb{Z}\right) \arrow[ul, "j_k"'] \arrow[r, "\pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}"] \arrow[d, "G_{\widetilde{J}_k}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Z}\right) \arrow[ur, "j_{k+1}"] \arrow[d, "G_{\widetilde{J}_{k+1}}"] & \\
\arrow[r, phantom, "\mathbf{iii)}"] & M^{tr}\left(IV(\widetilde{J}_k), \mathbb{Z}\right) \arrow[dl, "i_k"'] \arrow[r, "(\pi, \upsilon)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}"] \arrow[d, phantom, "\mathbf{ii)}"] & M^{tr}\left(IV(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Z}\right) \arrow[dr, "i_{k+1}"] \arrow[r, phantom, "\mathbf{iv)}"] & {} \\
M^{tr}\left(IV(\widetilde{J}_k), \mathbb{Q}\right) \arrow[rrr, "(\pi, \upsilon)_{\mathbb{Q}}"] & {} & & M^{tr}\left(IV(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Q}\right)
\end{tikzcd}
\tag{7.38}
$$

auftretenden Abbildungen seien wie folgt gegeben:

1. j_k, j_{k+1}, i_k und i_{k+1} sind Inklusionen.

2. $G_{\widetilde{J}_k}(x) := \mathcal{M}\left(\widetilde{J}_k\right) \cdot x, \quad G_{\widetilde{J}_{k+1}}(x) := \mathcal{M}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) \cdot x$ (vgl. 2.37 auf Seite 54).

3. $G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k}(x) := \mathcal{M}\left(\widetilde{J}_k\right) \cdot x, \quad G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}(x) := \mathcal{M}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) \cdot x.$

4. $\pi_{\mathbb{Q}}\left(e_{(s,t)}\right) := e_{\rho(\pi(s),\pi(t))}$ für $(s,t) \in IE(\widetilde{J}_k)$.

5. $(\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}}\left(e_{(s,t)}\right) := e_{(\pi(s),\upsilon(t))}$ für $(k,l) \in IV(\widetilde{J}_k)$.

Wegen 7.22 und 4.30 auf Seite 104 sind $\pi_{\mathbb{Q}}$ und $(\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}}$ wohldefiniert und zusammen mit $G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k}$ und $G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$ Homomorphismen von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen.

Lemma 7.23 *Das Diagramm (7.38) ist kommutativ.*

Beweis **Zu (∗):** Dieses Diagramm kommutiert nach 2.46 auf Seite 59.

Zu i): Für $(s,t) \in IE(\widetilde{J}_k)$ gilt:

$$\pi_{\mathbb{Q}} j_k\left(e_{(s,t)}\right) = \pi_{\mathbb{Q}}\left(e_{(s,t)}\right) = e_{\rho(\pi(s),\pi(t))} = j_{k+1}\left(e_{\rho(\pi(s),\pi(t))}\right) = j_{k+1}\pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right).$$

Zu ii): Für $(s,t) \in IV(\widetilde{J}_k)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}} i_k\left(e_{(s,t)}\right) &= (\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}}\left(e_{(s,t)}\right) = e_{(\pi(s),\upsilon(t))} = i_{k+1}\left(e_{(\pi(s),\upsilon(t))}\right)\\ &= i_{k+1}(\pi,\upsilon)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right).\end{aligned}$$

Zu iii): Für $(s,t) \in IE(\widetilde{J}_k)$ gilt:

$$i_k G_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right) = \mathcal{M}(\widetilde{J}_k) \cdot e_{(s,t)} = \mathcal{M}(\widetilde{J}_k) \cdot j_k\left(e_{(s,t)}\right) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k} j_k\left(e_{(s,t)}\right).$$

Zu iv): Für $(k,l) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$ gilt:

$$i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(e_{(s,t)}\right) = \mathcal{M}(\widetilde{J}_{k+1}) \cdot e_{(s,t)} = \mathcal{M}(\widetilde{J}_{k+1}) \cdot j_{k+1}\left(e_{(s,t)}\right) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}} j_{k+1}\left(e_{(s,t)}\right).$$

Äußeres Diagramm: Für $(s,t) \in IE(\widetilde{J}_k)$ gilt:

$$\begin{aligned}G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}\pi_{\mathbb{Q}}\left(e_{(s,t)}\right) &= G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(e_{\rho(\pi(s),\pi(t))}\right) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}} j_{k+1}\left(e_{\rho(\pi(s),\pi(t))}\right)\\ &\overset{\text{iv)}}{=} i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(e_{\rho(\pi(s),\pi(t))}\right) = i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}\pi^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right)\\ &\overset{(*),\text{ ii)}}{=} (\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}} i_k G_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right) \overset{\text{iii)}}{=} (\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k} j_k\left(e_{(s,t)}\right)\\ &= (\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k}\left(e_{(s,t)}\right).\end{aligned}$$

□

Satz 7.24 *Es sei* $\widetilde{I}_k = \{x_1, \ldots, x_m\} \neq \emptyset$. *Wenn* $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ *nicht leer ist, sei* $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \left\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{J_k}}\right\}$ *wie im Beweis zu Satz 7.20 auf Seite 226. Darüber hinaus seien* $r_1, \ldots, r_n$ *die in Satz 7.20.1. ergänzten Elemente aus* $\mathcal{D}_\alpha \cup \{y_1, \ldots, y_m\}$. *Dann ist*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} := \left\{j_{k+1}\left(\widetilde{y}_1\right), \ldots, j_{k+1}\left(\widetilde{y}_{N_{J_k}}\right), j_{k+1}(r_1), \ldots, j_{k+1}(r_n)\right\} \tag{7.39}$$

eine $\mathbb{Q}$*-Basis von Kern* $G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$. *Ist* $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \emptyset$, *so ist* $\{j_{k+1}(r_1), \ldots, j_{k+1}(r_n)\}$ *eine* $\mathbb{Q}$*-Basis von Kern* $G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$. *In beiden Fällen ist* $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_k \cup \{r_1, \ldots, r_n\}$ *aus Satz 7.20.1. eine* $\mathbb{Z}$*-Basis von* $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Beweis Aus den folgenden Aussagen folgt, dass $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ eine Basis der geforderten Art ist:

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \subset \operatorname{Kern} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$, (b) $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$,

(c) $\forall v \in \operatorname{Kern} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}} : v \in \operatorname{Spann}_{\mathbb{Q}}\left(\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}\right)$.

Zu (a): Für jedes $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ gilt:

$$G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right)\right) \overset{\text{iv)}}{=} i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(\widetilde{y}_i\right) \overset{(*)}{=} i_{k+1}(\pi, v)^{\widetilde{J}_{k+1}}_{\widetilde{J}_k} \underbrace{G_{\widetilde{J}_k}\left(\bar{y}_i\right)}_{=0} = 0.$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}\left(j_{k+1}(r_i)\right) \overset{\text{iv)}}{=} i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}(r_i) = 0.$$

Zu (b): Vorgelegt sei die Linearkombination

$$0 = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \cdot j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot j_{k+1}(r_i) \tag{7.40}$$

mit $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{Q}$. Zu zeigen ist $\mu_1 = \cdots = \mu_{N_{J_k}} = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Falls $\mathcal{B}_k = \emptyset$ gilt, sei hier wie in (7.9) auf Seite 199 $N_{J_k} = 0$ erlaubt. Dann werden die Elemente μ_i in den nachfolgenden Betrachtungen nicht benötigt.

Zunächst lassen sich μ_i und λ_i für $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ als

$$\mu_i = \frac{p_i}{q_i}, \quad \lambda_j = \frac{t_j}{s_j}, \quad t_j, p_i \in \mathbb{Z}, \quad q_i, s_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

schreiben. Definiere $N := \prod_{i=1}^{N_{J_k}} q_i \prod_{j=1}^{n} s_j$. Dann ist $N \neq 0$ und aus (7.40) erhält man:

$$0 \;=\; N \cdot 0 = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \underbrace{N\mu_i}_{\in\mathbb{Z}} \cdot j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{N\lambda_i}_{\in\mathbb{Z}} \cdot j_{k+1}(r_i) = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} N\mu_i \cdot \widetilde{y}_i + \sum_{i=1}^{n} N\lambda_i \cdot r_i.$$

Nach Satz 7.20 ist die Menge $\left\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{J_k}}, r_1, \ldots, r_n\right\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ in $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$, daher gilt $N\mu_1 = \cdots = N\mu_{N_{J_k}} = N\lambda_1 = \cdots = N\lambda_n = 0$. Da N nicht Null ist, folgt die Behauptung.

Zu (c): Gegeben sei ein Element $v \in \operatorname{Kern} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$. Dann gibt es $v_{(s,t)} \in \mathbb{Q}$, so dass $v = \sum_{(s,t)\in IE(\widetilde{J}_{k+1})} v_{(s,t)} \cdot e_{(s,t)}$ gilt. Für jedes $(s,t) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$ lassen sich die Koordinaten $v_{(s,t)}$ als

$$v_{(s,t)} = \frac{p_{(s,t)}}{q_{(s,t)}}, \quad p_{(s,t)} \in \mathbb{Z}, \quad q_{(s,t)} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

schreiben. Mit $N := \prod_{(s,t)\in IE(\widetilde{J}_{k+1})} q_{(s,t)}$ gilt dann $N \neq 0$ und $N \cdot v \in M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Z}\right)$. Aus der Rechnung

$$G_{\widetilde{J}_{k+1}}(Nv) \;=\; i_{k+1} G_{\widetilde{J}_{k+1}}(Nv) \overset{\text{iv)}}{=} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}} j_{k+1}(Nv) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}(Nv) = N \cdot G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}(v) = 0$$

folgt $Nv \in \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Nun sei $z_i := \widetilde{y}_i$ für $i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\}$ und $z_i := r_{i-N_{J_k}}$ für $N_{J_k} + 1 \leq i \leq N_{J_k} + n =: r$. Nach Satz 7.20 ist $\{z_1, \ldots, z_r\}$ linear unabhängig in $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ und $r = \operatorname{Rang}\left(\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)\right)$. Sei $\{b_1, \ldots, b_r\}$ eine Basis von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ und $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{Z}$ sowie $\lambda_{j,i} \in \mathbb{Z}$, $j, i \in \{1, \ldots, r\}$ so gewählt, dass

$$Nv = \sum_{i=1}^{r} \mu_i b_i \quad \text{und} \quad z_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,i} b_j \quad \text{für jedes} \quad i \in \{1, \ldots, r\} \tag{7.41}$$

gelten. Dann gibt es $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \lambda_{j,i} \quad \text{für jedes} \quad j \in \{1, \ldots, r\} \tag{7.42}$$

gilt (siehe unten). Damit berechnet man:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i j_{k+1}(z_i) \;&=\; \sum_{i=1}^{r} \sigma_i z_i \overset{(7.41)}{=} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,i} b_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \lambda_{j,i} b_j \\ &=\; \sum_{j=1}^{r} b_j \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \lambda_{j,i} \overset{(7.42)}{=} \sum_{j=1}^{r} \mu_j b_j \overset{(7.41)}{=} Nv. \end{aligned}$$

Da $N \neq 0$ ist erhält man die Behauptung, indem man durch N teilt: $v = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma_i}{N} \cdot j_{k+1}(z_i)$.

Zu (7.42): Gesucht sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{Q}$, so dass mit $\Lambda := (\lambda_{j,i}) \in M_{r\times r}(\mathbb{Q})$ die Gleichung $\Lambda \cdot (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)^{tr} = (\mu_1, \ldots, \mu_r)^{tr}$ erfüllt ist. Angenommen die Spalten $\Lambda_i := (\lambda_{1,i}, \ldots, \lambda_{r,i})^{tr}$, $i \in \{1, \ldots, r\}$ der Matrix Λ sind linear abhängig über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}$, die nicht alle Null sind, so dass

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \Lambda_i = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_{j,i} = 0 \quad \text{für jedes} \quad j \in \{1, \ldots, r\} \tag{7.43}$$

gilt. Die Rechnung

$$\sum_{i=1}^{r} a_i j_{k+1}(z_i) \overset{(7.41)}{=} \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,i} b_j = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_{j,i} b_j = \sum_{j=1}^{r} b_j \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_{j,i} \overset{(7.43)}{=} 0$$

ergibt einen Widerspruch zu (b). Daher ist Λ invertierbar über $\mathbb{Q}$.

Zu zeigen bleibt, dass $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ ist. Dazu sei $v \in \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ vorgelegt. Wegen Lemma 7.23 auf Seite 230 ist $j_{k+1}(v) \in \operatorname{Kern} G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$, also gibt es nach (c) Zahlen $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}$, so dass

$$s := j_{k+1}(v) = \sum_{i=1}^{r} a_i j_{k+1}(z_i) \tag{7.44}$$

gilt. Es ist nun $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ zu zeigen. Dann folgt nämlich aus (7.44) die Behauptung aus der Injektivität von j_{k+1}.

Zunächst schreibt man

$$s = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i \underbrace{j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right)}_{=\widetilde{y}_i} + \sum_{y \in \mathcal{D}_\alpha} \sigma_y \underbrace{j_{k+1}(y)}_{=y} + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \underbrace{j_{k+1}(y_i)}_{=y_i} \tag{7.45}$$

wie in (7.35) auf Seite 226. Die μ_i, σ_y, τ_i seien dabei die entsprechenden Koeffizienten a_i aus (7.44). Analog zu Satz 7.20 auf Seite 226 gelten die Aussagen

(a1) $\forall j \in \{1, \ldots, m-1\} : \tau_m, \ldots, \tau_{j+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tau_j \in \mathbb{Z}$, (b1) $\tau_m \in \mathbb{Z}$.

Zu (a1): Die Teilaussagen i)-iv) aus dem Beweis zu Satz 7.20 gelten auch in diesem Zusammenhang. Daher gilt

$$\pm\tau_j = \tau_j \left(y_j\right)_{(1,b(j,0))} = \underbrace{s_{(1,b(j,0))}}_{\in\mathbb{Z}} - \sum_{i=j+1}^{m} \underbrace{\tau_i \left(y_i\right)_{(1,b(j,0))}}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

Zu (b1): Man schließt wie in (a) für $j = m$ und erhält $\pm\tau_m = s_{(1,b(m,0))} \in \mathbb{Z}$.

Analog zum 2. und 3. Fall aus dem Beweis zu Satz 7.20 lässt sich so auch $\sigma_y \in \mathbb{Z}$ für $y \in \mathcal{D}_\alpha$ nachweisen, falls $\mathcal{D}_\alpha$ nicht leer ist, so dass insgesamt $a_{N_{J_k}+1}, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ gilt. Wenn $N_{J_k} = 0$ ist, ist die Behauptung an dieser Stelle gezeigt. Andernfalls muss noch $a_1, \ldots, a_{N_{J_k}} \in \mathbb{Z}$ gezeigt werden. Definiere dazu

$$w := \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \underbrace{\mu_i}_{=a_i} j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right) \overset{(7.44),(7.45)}{=} s - \sum_{i=N_{J_k}+1}^{r} a_i j_{k+1}(z_i) \quad \in M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_{k+1}), \mathbb{Q}\right).$$

Demnach gilt $w_{(p,q)} \in \mathbb{Z}$ für alle $(p,q) \in IE(\widetilde{J}_{k+1})$. Sei

$$\widetilde{w} := \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i j_k\left(\bar{y}_i\right) \quad \in M^{tr}\left(IE(\widetilde{J}_k), \mathbb{Q}\right). \tag{7.46}$$

Mit diesen Bezeichnungen schließt man:

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mathbb{Q}}\left(\widetilde{w}\right) \overset{\text{i)}}{=} \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right) = w \\
&\Rightarrow \quad \forall (p,q) \in IE(\widetilde{J}_k) : \widetilde{w}_{(p,q)} = \left(\pi_{\mathbb{Q}}\left(\widetilde{w}\right)\right)_{\rho(\pi(p),\pi(q))} = w_{\rho(\pi(p),\pi(q))} \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad j_k(\widetilde{w}) = \widetilde{w} \\
&\Rightarrow \quad i_k\left(G_{\widetilde{J}_k}\left(\widetilde{w}\right)\right) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k} j_k\left(\widetilde{w}\right) = G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k}\left(\widetilde{w}\right) \overset{(7.46)}{=} \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_k} j_k\left(\bar{y}_i\right) \\
&\qquad \overset{\text{iii)}}{=} \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i i_k \underbrace{G_{\widetilde{J}_k}\left(\bar{y}_i\right)}_{=0} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \widetilde{w} \in \mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right) \;\Rightarrow\; \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_{J_k}} \in \mathbb{Z} : \widetilde{w} = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \alpha_i \bar{y}_i \;\Rightarrow\; j_k(\widetilde{w}) = \widetilde{w} = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \alpha_i j_k\left(\bar{y}_i\right) \\
&\Rightarrow \quad 0 = j_k(\widetilde{w}) - \widetilde{w} = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \alpha_i j_k\left(\bar{y}_i\right) - \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \mu_i j_k\left(\bar{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \left(\alpha_i - \mu_i\right) j_k\left(\bar{y}_i\right) \\
&\Rightarrow \quad 0 = \pi_{\mathbb{Q}}(0) \overset{\text{i)}}{=} \sum_{i=1}^{N_{J_k}} \left(\alpha_i - \mu_i\right) j_{k+1}\left(\widetilde{y}_i\right) \overset{\text{(b)}}{\Rightarrow} \forall i \in \{1, \ldots, N_{J_k}\} : \alpha_i = \mu_i \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad a_1 = \mu_1, \ldots, a_r = \mu_r \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.25 *Es sei $\widetilde{I}_k = \emptyset$. Wenn $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ nicht leer ist, sei $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \left\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{J_k}}\right\}$ wie im Beweis zu Satz 7.20 auf Seite 226. Darüber hinaus sei $\mathcal{D}_\alpha = \{r_1, \ldots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, falls $\mathcal{D}_\alpha$ nicht leer ist. In jedem der folgenden drei Fälle ist $\widetilde{\mathcal{B}}^{\emptyset}_{\mathbb{Q}}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von Kern$G^{\mathbb{Q}}_{\widetilde{J}_{k+1}}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_k \cup \mathcal{D}_\alpha$ aus Satz 7.21.1. auf Seite 228 eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$:*

1. $\mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset, \widetilde{\mathcal{B}}_k \neq \emptyset \quad : \quad \mathcal{B}^{\emptyset}_{\mathbb{Q}} := \left\{j_{k+1}\left(\widetilde{y}_1\right), \ldots, j_{k+1}\left(\widetilde{y}_{N_{J_k}}\right), j_{k+1}(r_1), \ldots, j_{k+1}(r_n)\right\}.$
2. $\mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset, \widetilde{\mathcal{B}}_k = \emptyset \quad : \quad \mathcal{B}^{\emptyset}_{\mathbb{Q}} := \left\{j_{k+1}(r_1), \ldots, j_{k+1}(r_n)\right\}.$
3. $\mathcal{D}_\alpha = \emptyset, \widetilde{\mathcal{B}}_k \neq \emptyset \quad : \quad \mathcal{B}^{\emptyset}_{\mathbb{Q}} := \left\{j_{k+1}\left(\widetilde{y}_1\right), \ldots, j_{k+1}\left(\widetilde{y}_{N_{J_k}}\right)\right\}.$

Wenn sowohl $\mathcal{D}_\alpha$ als auch $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ leer sind, ist $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) = 0$.

Beweis Wenn $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_k\right) \neq 0$ ist, ist $\widetilde{\mathcal{B}}_k \neq \emptyset$ eine Basis. Aus $\widetilde{\mathcal{B}}_k = \emptyset$ und $\mathcal{D}_\alpha = \emptyset$ folgt daher mit 7.21.2. auf Seite 228, dass der Rang von $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$ Null ist. Also ist auch $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right) = 0$. Zum Nachweis der ersten drei Aussagen, kann der Beweis zu Satz 7.24 benutzt werden. Zunächst gilt $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}^{\emptyset} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ in allen drei Fällen, so dass die Aussagen (a) und (b) von Seite 231 für $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}^{\emptyset}$ gelten. Bis auf die Definition der z_i kann der Beweis zu (c) wörtlich übernommen werden. Je nachdem welcher Fall betrachtet wird, müssen die Festlegungen

1. $z_i := \widetilde{y}_i$ für $1 \leq i \leq N_{J_k}$ und $z_i := r_{i-N_{J_k}}$ für $N_{J_k} + 1 \leq i \leq N_{J_k} + n =: r$,

2. $z_i := r_i$ für $1 \leq i \leq n =: r$,

3. $z_i := \widetilde{y}_i$ für $1 \leq i \leq N_{J_k} =: r$

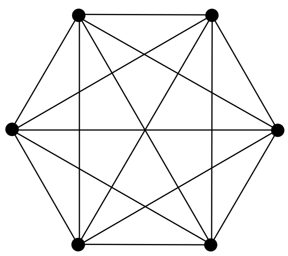
verwendet werden. Dann ist nämlich $\{z_1, \ldots, z_r\}$ nach Satz 7.21 auf Seite 228 linear unabhängig in $\mathcal{G}\left(\widetilde{J}_{k+1}\right)$.

Dass $\widetilde{\mathcal{B}}_{k+1}$ ein Erzeugendensystem ist, lässt sich ebenfalls wie im Beweis zu Satz 7.24 ab Seite 233 zeigen. Man setzt $m = 0$ in (7.45) auf Seite 233, verzichtet auf die Aussagen (a1) und (b1) auf Seite 233 und übernimmt den Rest des Beweises. □

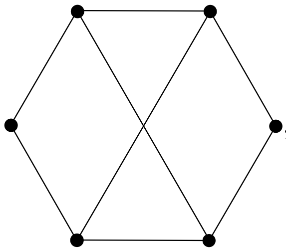
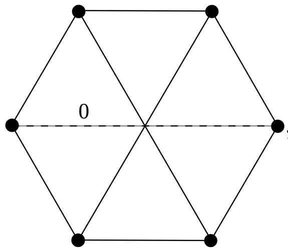
7.4 Beispiele zu Kapitel 7

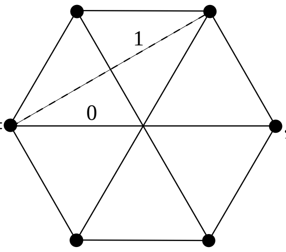
7.4.1 Der vollständige Graph K_6

Die untenstehende Abbildung zeigt den unorientierten Graphen $\mathrm{K}_6 = (V_{K_6}, E_{K_6}, g_{K_6})$. Für diesen gilt $|E_{K_6}| = 15, |V_{K_6}| = 6$ und $\beta_{K_6} = 15 - 6 + 1 = 10$. Mit Satz 7.14 auf Seite 214 ergibt sich $2 \cdot \text{Rang}\,(\mathcal{G}\,(K_6)) = 10 \cdot 11 + 4 \cdot 15 - 6 \cdot 5^2 = 110 + 60 - 150 = 20$.

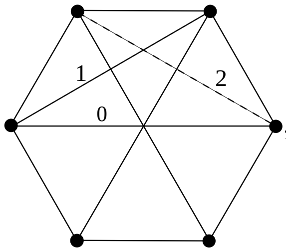


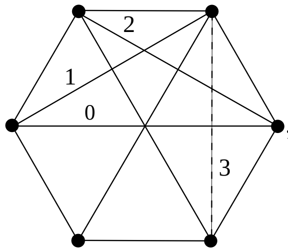
Betrachte die folgenden Teilgraphen J_i, $i \in \{0, \ldots, 7\}$ von K_6. Dabei bestehen die Kantenmengen der einzelnen Graphen sowohl aus den durchgezogenen *als auch* aus den gestrichelten Linien. Die Zahlen $0, \ldots, 6$ symbolisieren Kanten $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_6 \in E_{K_6}$.

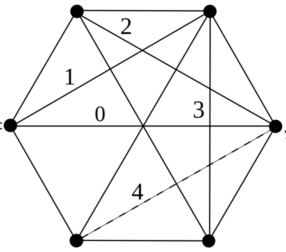
$J_0 :=$ , $J_1 :=$ 

, $J_2 :=$ 

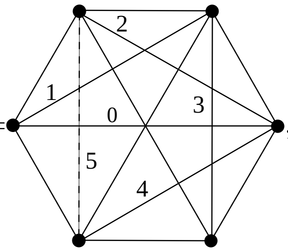
,

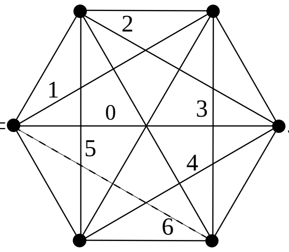
$J_3 :=$ 

, $J_4 :=$ 

, $J_5 :=$ 

,

$J_6 :=$ 

, $J_7 :=$ 

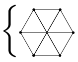
.

Offenbar ist $J_0 < J_1 < J_2 < J_3 < J_4 < J_5 < J_6 < J_7 = K_6$ eine Kette gemäß Satz 7.1 auf Seite 187. Nun wird schrittweise eine Basis von $\mathcal{G}(J_7)$ konstruiert. Da alle Graphen der Kette keine zweiwertigen Ecken haben, müssen keine Graphen $\widetilde{J}_i$ gebildet werden.

In den folgenden sieben Schritten werden Elemente von Verschlingungsmoduln durch die Graphen symbolisiert, von denen sie induziert werden.

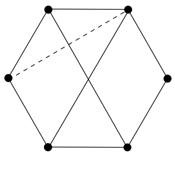
1. Schritt: $k = 0$. Basisergänzung von J_0 nach J_1.

Sei $W := \{\epsilon_0\}$, also $J_1 = J_0 \cup W$. Eine Kette für J_0 besteht nur aus $G_0 := J_0$. Also ist $q = 0$. Nach 7.11, S.200 ist daher $I_0 = \emptyset$. Deshalb ist sowohl $X = \emptyset$ (7.13, S.203) als auch $\widetilde{I}_0 = \emptyset$ (7.23 auf Seite 217). Wegen $G_0 \cup W = J_0 \cup W = K_{3,3}$ tritt Fall 1b aus Satz 7.4, S.189 ein. Da $\mathcal{B}_0$ wegen $\mathcal{G}(J_0) = 0$ leer ist, erhält man

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{D}_{1b} = \Big\{$$  $$\Big\}.$$

2. Schritt: $k = 1$. Basisergänzung von J_1 nach J_2.

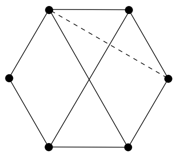
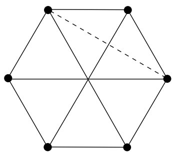
Sei $W := \{\epsilon_1\}$, also $J_2 = J_1 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 := J_1$ für J_1 besteht aus $G_0 := J_0$, $E_{P_0} := \{\epsilon_0\}$. Also ist $q = 1$. Da

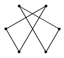
$$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$$ 

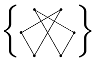
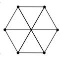
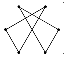
sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach ist, gelten $I_1 = \{0\}, X = \{(G_0, G_1)\}$. Da $V_{P_0} \cap V_W \neq \emptyset$ gilt, ist $\widetilde{I}_1 = \emptyset$. Außerdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 2b aus Satz 7.4. Aus $\widetilde{I}_1 = \emptyset = \mathcal{D}_{2b}$ ergibt sich demnach $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1$.

3. Schrit: $k = 2$. Basisergänzung von J_2 nach J_3.

Sei $W := \{\epsilon_2\}$, also $J_3 = J_2 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 < G_2 := J_2$ für J_2 lässt sich mittels $G_i := J_i$ für $i \in \{0,1,2\}$ und $E_{P_i} := \{\epsilon_i\}$ für $i \in \{0,1\}$ definieren. Also ist $q = 2$. Da

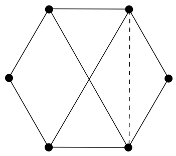
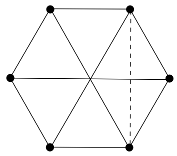
$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$  und $G_1 \cup W = J_1 \cup W =$ 

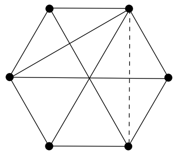
topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach sind, gelten $I_2 = \{0,1\}$ und $X = \{(G_0, G_1), (G_1, G_2)\}$. Wegen $V_{P_0} \cap V_W \neq \emptyset$ und $V_{P_1} \cap V_W = \emptyset$ gilt $\widetilde{I}_2 = \{1\}$ und man kann $\widetilde{T}_1 :=$  zur Basisergänzung verwenden. Ausserdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 2b aus Satz 7.4. Man erhält

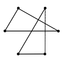
$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{D}_{2b} \cup \{$  $\} = \{$  ,  $\}$.

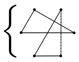
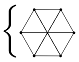
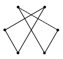
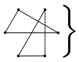
4. Schritt: $k = 3$. Basisergänzung von J_3 nach J_4.

Sei $W := \{\epsilon_3\}$, also $J_4 = J_3 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 < G_2 < G_3 := J_3$ für J_3 lässt sich mittels $G_i := J_i$ für $i \in \{0,1,2,3\}$ und $E_{P_i} := \{\epsilon_i\}$ für $i \in \{0,1,2\}$ definieren. Also ist $q = 3$. Die Graphen

$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$  , $G_1 \cup W = J_1 \cup W =$ 

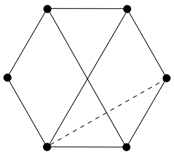
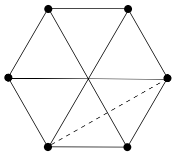
und $G_2 \cup W = J_2 \cup W =$ 

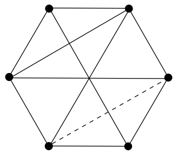
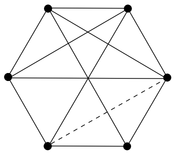
sind alle außer $G_0 \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach. Daher gelten $I_3 = \{1,2\}$ und $X = \{(G_1, G_2), (G_2, G_3)\}$. Wegen $V_{P_1} \cap V_W \neq \emptyset$ und $V_{P_2} \cap V_W = \emptyset$ gilt $\widetilde{I}_3 = \{2\}$ und man kann $\widetilde{T}_2 :=$  zur Basisergänzung verwenden. Ausserdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 3 aus Satz 7.4. Man erhält

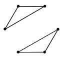
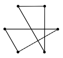
$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{D}_3 \cup \{$  $\} = \{$  ,  ,  $\}$.

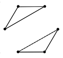
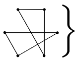
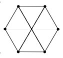
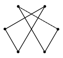
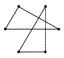
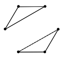
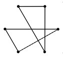
5. Schritt: $k = 4$. Basisergänzung von J_4 nach J_5.

Sei $W := \{\epsilon_4\}$, also $J_5 = J_4 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 < G_2 < G_3 < G_4 := J_4$ für J_4 lässt sich mittels $G_i := J_i$ für $i \in \{0,1,2,3,4\}$ und $E_{P_i} := \{\epsilon_i\}$ für $i \in \{0,1,2,3\}$ definieren. Also ist $q = 4$. Die Graphen

$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$  , $G_1 \cup W = J_1 \cup W =$ 

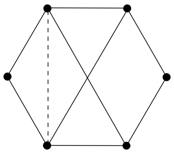
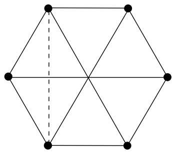
$G_2 \cup W = J_2 \cup W =$  und $G_3 \cup W = J_3 \cup W =$ 

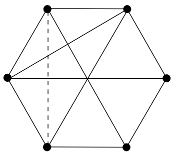
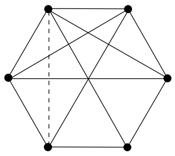
sind alle topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach. Daher gelten $I_4 = \{0,1,2,3\}$ und $X = \{(G_i, G_{i+1}) \mid i \in \{0,1,2,3\}\}$. Wegen $V_{P_0} \cap V_W \neq \emptyset$, $V_{P_1} \cap V_W = \emptyset$, $V_{P_2} \cap V_W \neq \emptyset$ und $V_{P_3} \cap V_W = \emptyset$ gilt $\widetilde{I}_4 = \{1,3\}$ und man kann $\widetilde{T}_1 :=$  und $\widetilde{T}_3 :=$  zur Basisergänzung verwenden. Ausserdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 2b aus Satz 7.4. Man erhält

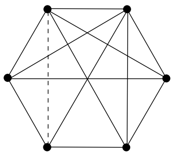
$\mathcal{B}_5 \;=\; \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{D}_{2b} \cup \{$  ,  $\} = \{$  ,  ,  ,  ,  $\}$.

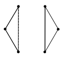
6. Schritt: $k = 5$. Basisergänzung von J_5 nach J_6.

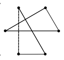
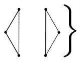
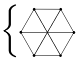
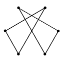
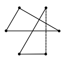
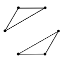
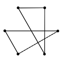
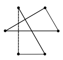
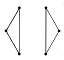
Sei $W := \{\epsilon_5\}$, also $J_6 = J_5 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 < G_2 < G_3 < G_4 < G_5 := J_5$ für J_5 lässt sich mittels $G_i := J_i$ für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ und $E_{P_i} := \{\epsilon_i\}$ für $i \in \{0,1,2,3,4\}$ definieren. Also ist $q = 5$. Die Graphen

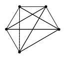
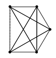
$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$  , $G_1 \cup W = J_1 \cup W =$ 

$G_2 \cup W = J_2 \cup W =$  , $G_3 \cup W = J_3 \cup W =$ 

und $G_4 \cup W = J_4 \cup W =$ 

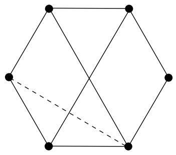
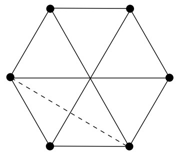
sind alle außer $G_0 \cup W$ topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach. Daher gelten $I_5 = \{1,2,3,4\}$ und $X = \{(G_i, G_{i+1}) \mid i \in \{1,2,3,4\}\}$. Wegen $V_{P_1} \cap V_W = \emptyset$, $V_{P_2} \cap V_W \neq \emptyset$, $V_{P_3} \cap V_W = \emptyset$ und $V_{P_4} \cap V_W \neq \emptyset$ gilt $\widetilde{I}_4 = \{1,3\}$ und man kann $\widetilde{T}_1 :=$  und $\widetilde{T}_3 :=$  zur Basisergänzung verwenden. Ausserdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 3 aus Satz 7.4. Man erhält

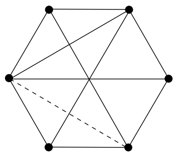
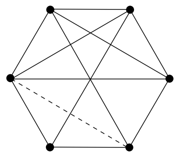
$\mathcal{B}_6 \;=\; \mathcal{B}_5 \cup \mathcal{D}_3 \cup \{$  ,  $\} = \{$  ,  ,  ,  ,  ,  ,  $\}$.

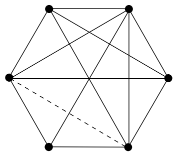
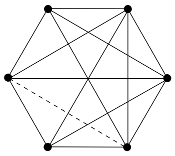
Bemerkung Man kann hier auch mittels $\widetilde{T}_1 :=$  und/oder $\widetilde{T}_3 :=$  ergänzen.

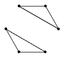
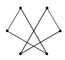
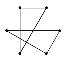
7. Schritt: $k = 6$. Basisergänzung von J_6 nach J_7.

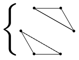
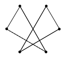
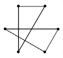
Sei $W := \{\epsilon_6\}$, also $J_7 = J_6 \cup W$. Eine Kette $G_0 < G_1 < G_2 < G_3 < G_4 < G_5 < G_6 := J_6$ für J_6 lässt sich mittels $G_i := J_i$ für $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ und $E_{P_i} := \{\epsilon_i\}$ für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ definieren. Also ist $q = 6$. Die Graphen

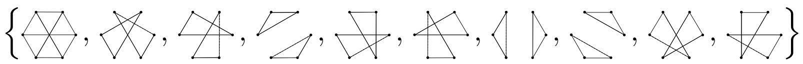
$G_0 \cup W = J_0 \cup W =$  , $G_1 \cup W = J_1 \cup W =$ 

$G_2 \cup W = J_2 \cup W =$  , $G_3 \cup W = J_3 \cup W =$ 

$G_4 \cup W = J_4 \cup W =$  und $G_5 \cup W = J_5 \cup W =$ 

sind alle topologisch 3-zusammenhängend und topologisch einfach. Daher gelten $I_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ und $X = \{(G_i, G_{i+1}) \mid i \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$. Wegen $V_{P_0} \cap V_W \neq \emptyset$ $V_{P_1} \cap V_W \neq \emptyset$, $V_{P_2} \cap V_W = \emptyset$, $V_{P_3} \cap V_W \neq \emptyset$, $V_{P_4} \cap V_W = \emptyset$ und $V_{P_5} \cap V_W = \emptyset$ gilt $\widetilde{I}_4 = \{2,4,5\}$ und man kann $\widetilde{T}_2 :=$ , $\widetilde{T}_4 :=$  und $\widetilde{T}_5 :=$  zur Basisergänzung verwenden. Ausserdem erfüllt $G_0 \cup W$ Fall 2b aus Satz 7.4. Man erhält

$\mathcal{B}_7 = \mathcal{B}_6 \cup \mathcal{D}_{2b} \cup \{$ , ,  $\}$

$=$ .

□

7.4.2 Die Möbiusleiter

Lemma 7.26 *Es sei $G = (V, E, g)$ ein trivalenter orientierter Graph. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $|V| = 2k$, $|E| = 3k$ und $\beta_G = k + 1$ erfüllt sind. Ist G zusätzlich bijektiv nummeriert, topologisch 3-zusammenhängend und einfach, so gelten:*

1. $2 \cdot \mathit{Rang}(\mathcal{G}(G)) = (k-1)(k-2)$.

2. $\mathit{Rang}(\mathcal{G}(G)) + |E| = \frac{1}{2}\beta_G(\beta_G + 1)$.

Beweis Da der Eckengrad jeder Ecke 3 ist, gilt $3|V| = 2|E|$. Daher ist $\frac{3}{2}|V|$ eine natürliche Zahl, also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|V| = 2k$. Daraus folgt $|E| = 3k$ und

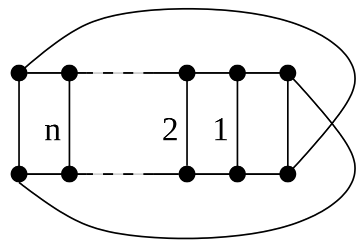
$\beta_G = |E| - |V| + 1 = k + 1.$

Zu 1.:

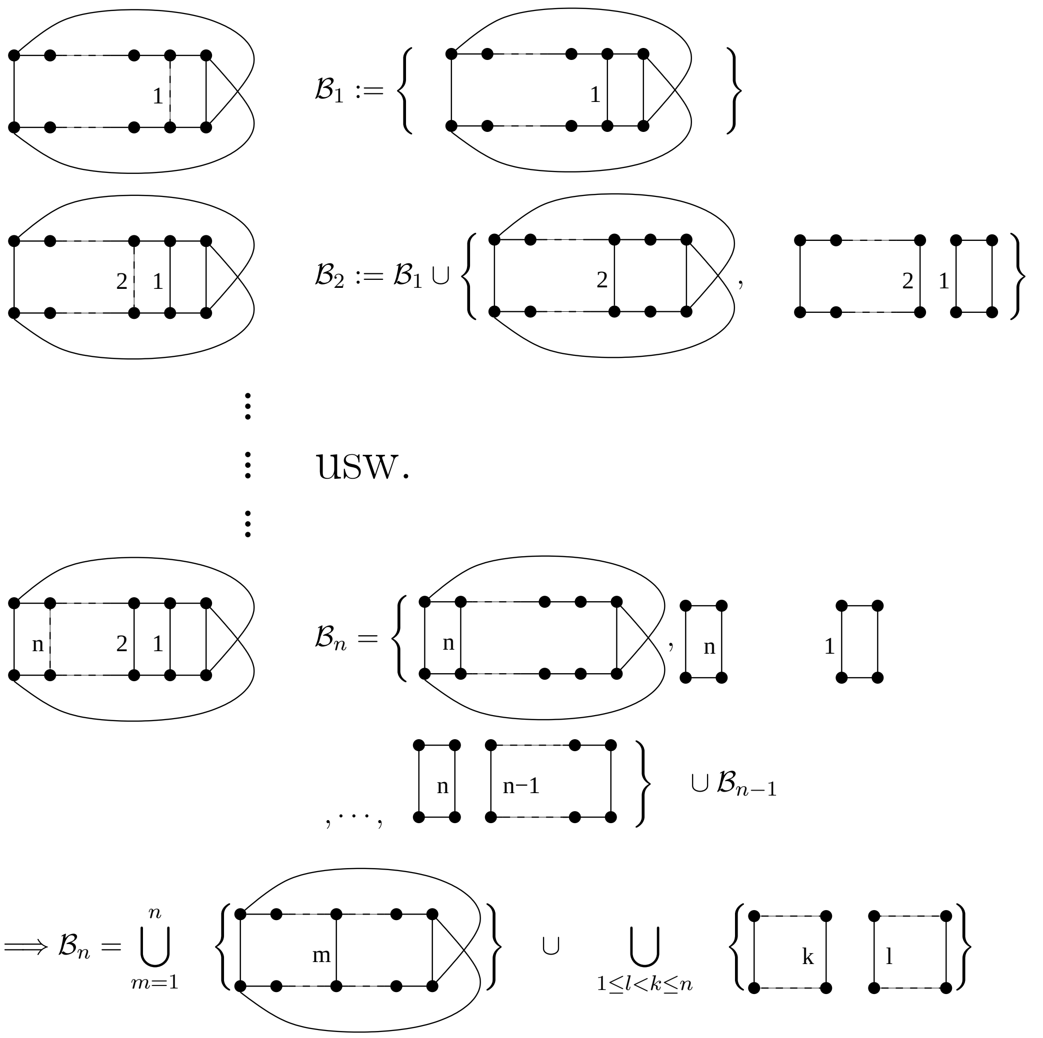
$$\begin{aligned} 2 \cdot \operatorname{Rang}(\mathcal{G}(G)) &\overset{7.14,\ S.214}{=} (k+1)(k+2) + 4 \cdot 3k - 2k \cdot 9 = (k+1)(k+2) - 6k \\ &= (k-1)(k-2). \end{aligned}$$

Zu 2.: $2 \cdot \operatorname{Rang}(\mathcal{G}(G)) + 2 \cdot |E| \overset{1.}{=} (k-1)(k-2) + 2 \cdot 3k = (k+1)(k+2) = \beta(\beta+1).$ □

Die folgende Abbildung zeigt eine Möbiusleiter $\mathcal{M}_{n+2}$ mit $k := n+2$ Sprossen. Sie hat $2k = 2n+4$ Ecken und $3k = 3n+6$ Kanten. Ihre Bettizahl $\beta_{\mathcal{M}_k}$ ist gleich $n+3$.



Eine Kette für $\mathcal{M}_{n+2}$ erhält man, indem, wie in der linken Spalte der folgenden Abbildung illustriert, zu einer Unterteilung von K_4 nacheinander die Sprossen 1 bis n hinzugefügt werden. Aus dieser Konstruktion folgt im Übrigen, dass $\mathcal{M}_{n+2}$ 3-zusammenhängend und einfach ist, siehe [27], Theorem IV.18., S. 79. Die Unterteilung des K_4 zusammen mit der Kante 1 ergibt den Graphen $K_{3,3}$. Auf diese Weise tritt bei jedem Schritt der Basisergänzung Fall 1b in Satz 7.4 auf Seite 189 ein. Da eine hinzugefügte Sprosse k niemals eine Ecke mit einer der Sprossen $1, 2, \ldots, k-1$ gemeinsam hat, gilt jeweils $I_k = \widetilde{I}_k$.



Für die Anzahl der Basiselemente gilt $|\mathcal{B}_n| = n + \frac{1}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)$. Dies stimmt mit 1. aus Lemma 7.26 überein.

Teil II

Bandflächen eingebetteter Graphen

Kapitel 8

Konstruktion von Bandflächen mithilfe der GL-Form

8.1 Vorbereitungen

Es sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter eindimensionaler endlicher Zellenkomplex, $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung, $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ eine reguläre Projektion und (D, o_D) ein orientiertes Graphendiagramm zu $\mathcal{Z}$. Darüber hinaus seien (w, γ) und (w_D, γ_D) bijektive Nummerierungen von $\mathcal{Z}$ bzw. D, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(\mathcal{Z}) \arrow[r, "{(w,\gamma)}"] \arrow[d, "{\left(\pi|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0} \circ \Gamma|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\pi)|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1} \circ \mathcal{P}(\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}\right)}"'] & \left(\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_{G(\mathcal{Z})}\right) =: H \\ G(D) \arrow[ur, "{(w_D,\gamma_D)}"'] & \end{tikzcd} \tag{8.1}$$

von Graphenisomorphismen kommutativ ist. Wenn es nicht anders vereinbart wird, sollen ab nun orientierte nummerierte Graphendiagramme stets so vorgelegt sein, dass ein Diagramm wie (8.1) kommutativ ist. Die auftretenden Graphen $G(\mathcal{Z})$ sind zusammenhängend und haben nur Ecken vom Grad 2 oder 3. Da es sich im folgenden stets um bijektive Nummerierungen handelt, wird die Verdrillungszahl zweier Kanten durch

$$w_{s,t}^{D,o_D} := w_{\gamma_D^{-1}(e_s), \gamma_D^{-1}(e_t)}^{D,o_D}$$

abgekürzt.

Alle auftretenden Homologiegruppen haben Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kanten von $G(\mathcal{Z})$. Für jedes $l \in \{1, \ldots, m\}$ ist $\gamma^{-1}(e_l) = e \in \mathcal{Z}_1$ das Bild einer charakteristischen Abbildung $F_e : \left(D^1, S^0\right) \to \left(\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^0\right)$. Diese induziert einen Homomorphismus $H_1(F_e) : H_1\left(D^1, S^0\right) \to H_1\left(\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^0\right) =: C_1(\mathcal{Z})$ in die

1-te zelluläre Kettengruppe von $\mathcal{Z}$. Es sei c_l das Bild eines erzeugenden Elementes von $H_1\left(D^1, S^0\right)$. Die Elemente $c_1, \ldots, c_m$ bilden nach [21], 9.6.4 eine Basis von $C_1(\mathcal{Z})$, also lässt sich jedes $x \in C_1(\mathcal{Z})$ darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^{m} v_l(x) c_l. \tag{8.2}$$

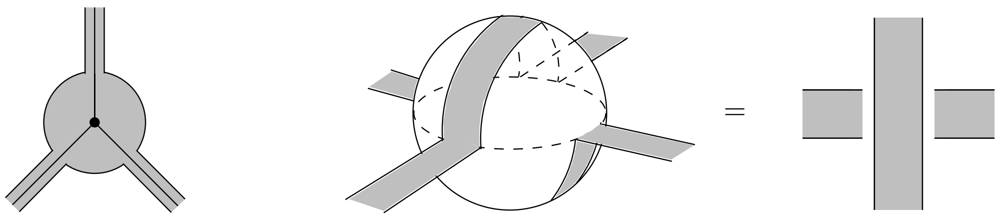
Die Koeffizienten werden als $v(x) := (v_1(x), \ldots, v_m(x)) \in \mathbb{Z}^m$ notiert. Eine solche Darstellung hängt von der Orientierung und der Nummerierung von $G(\mathcal{Z})$ ab. Wegen $\mathcal{Z}^2 = \mathcal{Z}^1 = \mathcal{Z}$ gilt $C_2(\mathcal{Z}) = H_2\left(\mathcal{Z}^2, \mathcal{Z}^1\right) = 0$. Bezeichnet $\partial_1 : C_1(\mathcal{Z}) \to C_0(\mathcal{Z})$ den zellulären Randoperator, so folgt $\operatorname{Kern} \partial_1 = H_1\left(C(\mathcal{Z})\right) \subset C_1(\mathcal{Z})$ für die erste zelluläre Homologiegruppe. Verwendet man eine Darstellung wie in (8.2), ergibt sich $x = y \Leftrightarrow v(x) = v(y)$ für Elemente $x, y \in H_1\left(C(\mathcal{Z})\right)$.

Für CW-Räume sind die zellulären Homologiegruppen nach [21], 9.6.9 zu den singulären Homologiegruppen isomorph. Wie in [21], 9.6.9 wird dieser Isomorphismus auch hier mit T bezeichnet.

Aus einem Diagramm D lässt sich das Bild einer zu Γ äquivalenten Einbettung Γ' gewinnen, indem man geeignete Umgebungen von Kreuzungspunkten mithilfe von Bällen wie in [10], Figure 4.1 (links), Seite 33 modifiziert.

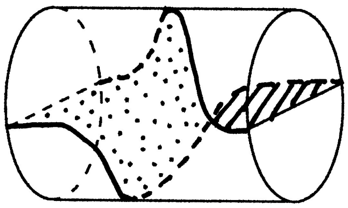
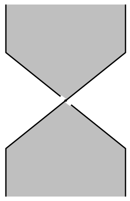
Eine **Bandfläche** für einen topologischen Graphen $\Gamma(\mathcal{Z})$ ist eine im $\mathbb{R}^3$ eingebettete berandete Fläche, die $\Gamma(\mathcal{Z})$ als starken Deformationsretrakt enthält, siehe [19], p.1 und [32], p.173 für orientierbare Flächen.

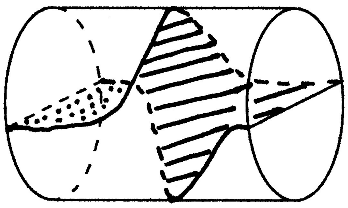
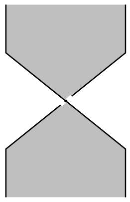
Seien nun (w, γ), (w_D, γ_D) bijektive Nummerierungen, so dass (8.1) kommutativ ist. Zu $\Gamma'(\mathcal{Z})$ kann man wie folgt eine Bandfläche realisieren: Jeder Ecke $w^{-1}(v_i)$ wird eine Einbettung $d_i : D^2 \to P$ mit $d_i(0,0) = w_D^{-1}(v_i)$ und jeder Kante $\gamma^{-1}(e_j)$ wird eine Einbettung $b_j : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $b_j\left(\frac{1}{2} \times [0,1]\right) = \Gamma'\left(\gamma^{-1}(e_j)\right)$ zugeordnet, so dass die Bilder von d_i bzw. b_j in geeigneten Umgebungen von $d_i(0,0)$ bzw. jedes Kreuzungspunktes des Diagramms eine Gestalt wie in Abbildung (8.3) links (für eine Ecke vom Grad 3) bzw. rechts haben.



(8.3)

Außerhalb solcher Umgebungen für die Kreuzungspunkte gelte $\operatorname{Bild} b_j \subset P$. Zu jeder Einbettung b_j sei zusätzlich eine ganze Zahl N_j gegeben. An jedes Band $\operatorname{Bild} b_j$ werden außerhalb der Umgebungen aus (8.3) $|N_j|$ positive bzw. negative Verdrillungen angefügt, je nachdem ob N_j positiv oder negativ ist. Für $N_j = 0$ werden keine Verdrillungen erzeugt. Ein auf diese Art verdrilltes Band lässt sich als Bild einer Einbettung $b'_j : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$ charakterisieren, so dass außerhalb der Verdrillungen b'_j mit b_j übereinstimmt. Abbildung (8.4) illustriert eine positive, (8.5) eine negative Verdrillung eines Bandes.

 =  (8.4)

 =  (8.5)

Die Fläche, die aus der Vereinigung der Bilder der Einbettungen d_i, $i \in \{1,\ldots,|\mathcal{Z}_0|\}$ und $b'_j, j \in \{1,\ldots,m\}$ entsteht, wird mit $F\,(D,\gamma_D,N)$ bezeichnet. Dabei sei $N := (N_1,\ldots, N_m) \in M\,(\{1,\ldots,m\},\mathbb{Z})$ das Tupel der anzubringenden Verdrillungen. Wie in (8.3), (8.4) und (8.5) angedeutet lassen sich Bandflächen durch „reguläre Diagramme“ beschreiben, siehe dazu auch [32], Seite 176.

Zur Konstruktion von gewissen Bandflächen wird im folgenden die Gordon-Litherland-Form (GL-Form) $\mathcal{G}(F) : H_1(F)\times H_1(F) \to \mathbb{Z}$, $\mathcal{G}(F)([x],[y]) := lk(\tau_*[x],[y]) =: \langle x,y\rangle$, einer Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ verwendet. Eine exakte Definition sowie eine geometrische Interpretation dieser symmetrischen Bilinearform kann in [5],2. sowie [28], Seite 134 nachgelesen werden.

Vorgelegt sei nun ein orientiertes nummeriertes Diagramm (D,γ_D,o_D) von $\mathcal{Z}$. Zu gegebenen Verdrillungen $N = (N_1,\ldots,N_m) \in \mathbb{Z}^m$ lässt sich dann die GL-Form der Bandfläche $F(D,\gamma_D,N)$ berechnen. Ist umgekehrt die GL-Form durch eine symmetrische Matrix $G \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ gegeben, stellt sich die Frage, ob dadurch die Verdrillungen N einer zum Diagramm gehörigen Bandfläche $F(D,\gamma_D,N)$ bereits eindeutig festgelegt sind. Für den Theta-Graphen sowie für die Graphen K_4 und $K_{3,3}$ wird diese Frage im folgenden positiv beantwortet. Die so konstruierten Bandflächen liefern Invarianten für Umgebungsisotopie dieser Graphen zum Beispiel durch die Randverkettungen der Flächen.

8.2 Bandflächen trivalenter Diagramme

Definition 8.1 *Es seien $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter eindimensionaler endlicher Zellenkomplex, $G(\mathcal{Z})$ der zugehörige abstrakte orientierte Graph, (w, γ) eine bijektive Nummerierung von $\mathcal{Z}$, $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_n]\} \neq \emptyset$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}))$, deren Repräsentanten wie in (8.2) dargestellt seien, $m := |Z_1(\mathcal{Z})|$ und (D, γ_D, o_D) ein nummeriertes orieniertes reguläres Graphendiagramm von $\mathcal{Z}$. Die Mengen $M(\mathcal{Z}) := Sym(m)$ und $B(\mathcal{Z}) := Sym(n)$ seien lexikographisch geordnet. Für deren Kardinalitäten gelten $|M(\mathcal{Z})| = \frac{1}{2}m(m+1)$ sowie $|B(\mathcal{Z})| = \frac{1}{2}n(n+1)$. Es werden die folgenden Bezeichnungen festgelegt:*

1. **M-Matrix** *: $M(\mathcal{B}, \gamma, o) \in M_{\frac{1}{2}m(m+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)}(M(\mathcal{Z}), B(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ definiert durch*
$$M(\mathcal{B}, \gamma, o)_{(s,t),(i,j)} := v_s(a_i)v_t(a_j) + v_t(a_i)v_s(a_j)$$
für $(s,t) \in M(\mathcal{Z})$ und $(i,j) \in B(\mathcal{Z})$.

2. **X-Matrix** *: $X(\mathcal{B}, \gamma, o) \in M_{\frac{1}{2}n(n+1)\times m}(B(\mathcal{Z}), \{1, \ldots, m\}, \mathbb{Z})$ definiert durch*
$$X(\mathcal{B}, \gamma, o)_{(i,j),l} := \tfrac{1}{2}M(\mathcal{B}, \gamma, o)_{(l,l),(i,j)} \text{ für } l \in \{1, \ldots, m\} \text{ und } (i,j) \in B(\mathcal{Z}).$$

3. **T-Matrix** *: $T(M(\mathcal{B}, \gamma, o), D, \gamma_D, o_D) := \left(T_{(1,1)}, T_{(1,2)}, \ldots, T_{(n,n)}\right)^{tr} \in M^{tr}(B(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ definiert durch*
$$T_{(i,j)} := T_{(i,j)}(M(\mathcal{B}, \gamma, o), D, \gamma_D, o_D) := \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} M(\mathcal{B}, \gamma, o)_{(s,t),(i,j)} \cdot w_{s,t}^{D,o_D}$$
für $(i,j) \in B(\mathcal{Z})$.

□

Definition 8.2 *Ein Graph mit genau einer Ecke und mindestens einer Kante wird* **Bouqet** *genannt. Ein eindimensionaler endlicher Zellenkomplex, dessen zugehöriger abstrakter Graph isomorph zu einem Bouqet ist, wird* **topologisches Bouqet** *genannt.*

Satz 8.3 *Vorgelegt sei ein bijektiv nummeriertes orientiertes Diagramm (D, γ_D, o_D) zu einem mittels (w, γ) bijektiv nummerierten orientierten Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ mit $m := |\mathcal{Z}_1|$ Kanten. Es sei Γ eine Einbettung zu $\mathcal{Z}$, $F := F(D, \gamma_D, N)$ eine Bandfläche mit Verdrillungen $N := (N_1, \ldots, N_m)$ und $i : \Gamma(\mathcal{Z}) \to F$ eine Inklusion, so dass die Abbildungen $\mathcal{Z} \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(\mathcal{Z}) \xrightarrow{i} F$ Isomorphismen*
$$H_1(C(\mathcal{Z})) \xrightarrow{T} H_1(\mathcal{Z}) \xrightarrow{H_1(\Gamma)} H_1(\Gamma(\mathcal{Z})) \xrightarrow{H_1(i)} H_1(F)$$
induzieren. Bezüglich der Nummerierungen liege eine Situation wie in (8.1) vor.

Nun seien Elemente $x', y' \in H_1(F)$ gegeben. Die Urbilder $T^{-1}\left(H_1(i \circ \Gamma)^{-1}(x')\right)$ und $T^{-1}\left(H_1(i \circ \Gamma)^{-1}(y')\right)$ seien in $H_1(C(\mathcal{Z}))$ repräsentiert durch $x = \sum_{l=1}^{m} v_l(x)c_l$ bzw. $y = \sum_{l=1}^{m} v_l(y)c_l$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(F)(x', y') &= \sum_{1 \leq s \leq t \leq m} [v_s(x)v_t(y) + v_s(y)v_t(x)] \cdot w_{s,t}^{D,o_D} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m} v_l(x)v_l(y) \cdot N_l. \end{aligned}$$

Beweis Zunächst soll gezeigt werden, dass es für $i \in \{1, \ldots, n :=\text{Rang}(H_1(\mathcal{Z}))\}$ Kreise

$$(d_i, D_i) : J'_{n_i} \to G(\mathcal{Z}), \quad n_i \in \mathbb{N}, \tag{8.6}$$

gibt, die eine Basis für $H_1(\mathcal{Z})$ induzieren. Das Bild $\mathcal{D}_i < G(\mathcal{Z})$ eines Kreises (d_i, D_i) lässt sich als zu S^1 homöomorpher Teilkomplex von $\mathcal{Z}$ auffassen und repräsentiert daher eine Homologieklasse, die als $[\mathcal{D}_i] \in H_1(\mathcal{Z})$ notiert wird. Ist $\mathcal{Z}$ bereits ein topologisches Bouqet, so erhält man die geforderte Basis aus den Schlaufen des Bouqets. Falls $\mathcal{Z}$ kein topologisches Bouqet ist, gibt es eine Folge von Kontraktionen $L_{i+1} := C_{p_i,e_i,q_i}(L_i)$, $0 \leq i \leq j-1$, $j \in \mathbb{N}$, $L_0 := G(\mathcal{Z})$, so dass L_j ein Bouqet ist. Dazu gibt es homotopieäquivalente Zellenkomplexe $\mathcal{Z}'_0 := \mathcal{Z}, \mathcal{Z}'_1, \ldots, \mathcal{Z}'_j$ sowie Isomorphismen $(w_i, \gamma_i) : G(\mathcal{Z}'_i) \to L_i$, $0 \leq i \leq j$ derart, dass $\mathcal{Z}'_i$ aus $\mathcal{Z}_i$ durch Zusammenziehen der Zelle $\gamma_i^{-1}(e_i)$ hervorgeht. Da L_j ein Bouqet ist, gibt es eine Basis aus Kreisen, die mithilfe von 4.18 auf Seite 88 sukzessive zu Kreisen (8.6) hochgehoben werden können, die vermöge der Homotopieäquivalenzen eine Basis $\{[\mathcal{D}_1], \ldots, [\mathcal{D}_n]\}$ für $H_1(\mathcal{Z})$ induzieren. Für

$$T^{-1}([\mathcal{D}_i]) =: [a_i] = a_i = \sum_{l=1}^{m} v_l(a_i)c_l \in H_1(C(\mathcal{Z})) \subset C_1(\mathcal{Z}) \tag{8.7}$$

gilt dann

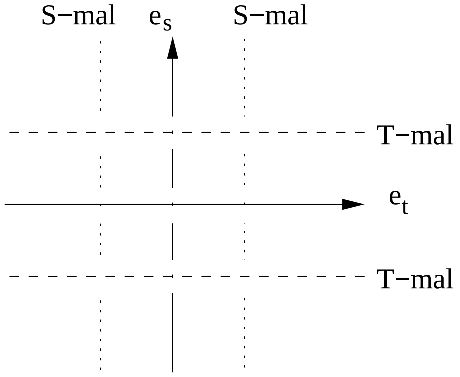
$$v_l(a_i) \in \{\pm 1\} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}(e_l) \in \text{Bild}\, D_i. \tag{8.8}$$

Nun wird der Satz für Basiselemente $[b_1], \ldots, [b_n] \in H_1(F)$, die durch

$$[b_i] := H_1(i \circ \Gamma)([\mathcal{D}_i]\}, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{8.9}$$

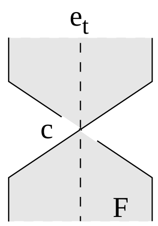
gegeben sind, nachgewiesen. Ein Basiselement $[b_i]$ kann in der singulären Homologie von einer zu S^1 homöomorphen Kreislinie $i\Gamma(\mathcal{D}_i)$ repräsentiert werden. Diese wird hier ebenfalls mit b_i notiert. Es wird $\langle b_i, b_j \rangle$ lokal bezüglich gewisser Kreuzungen c berechent und dementsprechend mit $\langle b_i, b_j \rangle_c$ bezeichent. Diese Vorgehensweise wurde in [28] im Abschnitt 6.1 ausführlich behandelt.

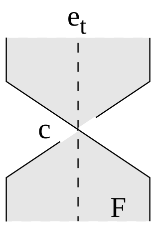
1. Fall : Sei c eine Kreuzung von D, an der die Kanten e_s und e_t, $(s,t) \in M(\mathcal{Z})$, beteiligt sind. Wegen (8.8) gilt $v_s(a_i), v_t(a_i), v_s(a_j), v_t(a_j) \in \{0, \pm 1\}$. Das Basiselement $[b_i]$ wird von einer Kreislinie repräsentiert. Daher liefert $\tau_*([b_i]) = [\tau(b_i)]$ für $S := |v_s(a_i)|$ und $T := |v_t(a_i)|$ die nebenstehende lokale Situation (für $\epsilon(c) = +1$).



Somit berechnet man $2\langle b_i, b_j\rangle_c = 2\epsilon(c)v_s(a_j)v_t(a_i) + 2\epsilon(c)\ v_t(a_j)v_s(a_i)$.

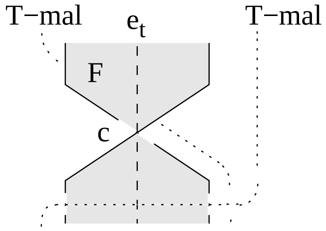
2. Fall : Sei c eine Kreuzung eines Diagramms der Randkomponenten der Bandfläche für $N_t > 0$ bzw. $N_t < 0$ wie folgt:



bzw.


.

Wie im ersten Fall gilt $v_s(a_i), v_t(a_i), v_s(a_j), v_t(a_j) \in \{0, \pm 1\}$, daher erhält man für $N_t > 0$ die lokale Situation

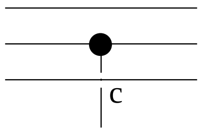


. (8.10)

Der Diagrammausschnitt für $N_t < 0$ ergibt sich aus (8.10) durch Spiegelung, d.h. durch Vertauschen sämtlicher Kreuzungsinformationen. Daher berechnet man:

$$\begin{aligned} 2\langle b_i, b_j\rangle_c &= \operatorname{sign}(N_t)\,(v_t(a_j)v_t(a_i) + v_t(a_j)v_t(a_i)) \\ &= 2\operatorname{sign}(N_t)v_t(a_j)v_t(a_i). \end{aligned} \tag{8.11}$$

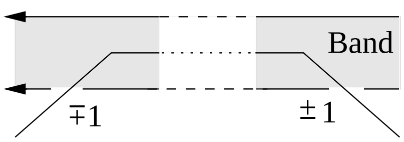
3. Fall : Wie in (8.12) angedeutet, gibt es noch weitere Kreuzungen c in der Nähe der Ecken des Graphendiagramms, die durch $\tau(b_i)$ und b_j erzeugt werden.



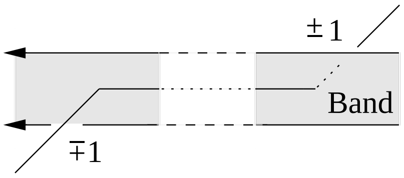
(8.12)

Diese liefern aber insgesamt den Beitrag Null zu $\langle b_i, b_j\rangle$, denn eine Kreislinie, die $[\tau(b_i)]$

repräsentiert, berandet ein orientierbares oder nicht orientierbares Band in $\mathbb{R}^3$, auf das die zu b_j gehörige Kreislinie transversal trifft:



oder



Mithilfe der obigen drei Fälle lässt sich nun folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
\langle b_i, b_j\rangle &= \sum_{c \text{ Kreuzung aus Fall 1}} \langle b_i, b_j\rangle_c + \sum_{c \text{ Kreuzung aus Fall 2}} \langle b_i, b_j\rangle_c \\
&= \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} \sum_{c \text{ an } e_s \text{ und } e_t \text{ beteiligt}} \langle b_i, b_j\rangle_c + \sum_{l=1}^{m} N_l v_l(a_i) v_l(a_j) \\
&= \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} \sum_{c \text{ an } e_s \text{ und } e_t \text{ beteiligt}} \epsilon(c)\left[v_s(a_i)v_t(a_j) + v_s(a_j)v_t(a_i)\right] + \sum_{l=1}^{m} N_l v_l(a_i) v_l(a_j) \\
&= \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} w_{s,t}^{D,o_D}\left[v_s(a_i)v_t(a_j) + v_s(a_j)v_t(a_i)\right] + \sum_{l=1}^{m} N_l v_l(a_i) v_l(a_j).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Es sei $x' = \sum_{i=1}^n x_i[b_i]$ und $y' = \sum_{i=1}^n y_i[b_i]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i v_l(a_i) c_l\right] &= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i [a_i] \\
&\overset{(8.7),\ \text{S.249}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i T^{-1}\left([\mathcal{D}_i]\right) = T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \left[\mathcal{D}_i\right]\right) \\
&\overset{(8.9),\ \text{S.249}}{=} T^{-1}\left(H_1\left(i\circ\Gamma\right)^{-1}(x')\right) \overset{\text{Vor.}}{=} [x] \overset{\text{Vor.}}{=} \left[\sum_{l=1}^{m} v_l(x) c_l\right]
\end{aligned}$$

Da es sich um Repräsentanten aus $C_1(\mathcal{Z})$ handelt, folgt, dass

$$v_l(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_l(a_i) \tag{8.14}$$

für jedes $l \in \{1, \ldots, m\}$ erfüllt ist. Analoges gilt für $y' \in H_1(F)$. Aus der Bilinearität von $\mathcal{G}(F)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(F)\left(x', y'\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \cdot \mathcal{G}(F)\left([b_i], [b_j]\right) \\
&\overset{(8.13)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left(\sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} w_{s,t}^{D,o_D}\left[v_s(a_i)v_t(a_j) + v_s(a_j)v_t(a_i)\right] + \sum_{l=1}^{m} N_l v_l(a_i) v_l(a_j)\right) \\
&= \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \cdot w_{s,t}^{D,o_D}\left[v_s(a_i)v_t(a_j) + v_s(a_j)v_t(a_i)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad + \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \cdot N_l \cdot v_l(a_i) v_l(a_j) \\
= & \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_s(a_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j v_t(a_j) + \sum_{j=1}^{n} y_j v_s(a_j) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i v_t(a_i) \right) w_{st}^{D,o(D)} \\
& \qquad + \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_l(a_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j v_l(a_j) \right) N_l \\
\overset{(8.14)}{=} & \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} \left(v_s(x)v_t(y) + v_t(x)v_s(y)\right) w_{st}^{D,o(D)} + \sum_{l=1}^{m} v_l(x) v_l(y) N_l
\end{aligned}
$$

□

Satz 8.4 *Wie in Satz 8.3 auf Seite 248 sei ein mittels (w, γ) bijektiv nummerierter orientierter und zusätzlich trivalenter Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$, ein Diagramm (D, γ_D, o_D), eine Bandfläche $F := F(D, \gamma_D, N)$ zu $\Gamma(\mathcal{Z})$, eine Basis $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_n]\}$ von $H_1(C(\mathcal{Z}))$ aus (8.7) sowie die Basis $[b_1], \ldots, [b_n] \in H_1(F)$ aus (8.9) vorgelegt.*

(a) Sei $g \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$. Für die X-Matrix $X := X(\mathcal{B}, \gamma, o)$ und die T-Matrix $T := T(M(\mathcal{B}, \gamma, o), D, \gamma_D, o_D)$ gilt:

$$XN^{tr} = g - T \iff \forall (i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}) : \mathcal{G}(F)([b_i],[b_j]) = g_{(i,j)}.$$

(b) Die X-Matrix sei quadratisch und $|\det X| = 1$. Dann gilt

$$XN^{tr} = g - T \iff N^{tr} = X^{-1}(g - T) \in \mathbb{Z}^m.$$

(c) Es sei X wie in (b), $g \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ ein weiteres Diagramm mit einer Bandfläche $F' := F(D', \gamma_{D'}, N')$ wie in Satz 8.3. Dabei seien die Verdrillungen N und N' durch die rechte Formel in (b) gegeben. Sind (D, γ_D, o_D) und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ äquivalent, so sind F und F' isotop in $\mathbb{R}^3$.

Beweis **Zu (a):** Es sei $M := M(\mathcal{B}, \gamma, o)$. Für $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ berechnet man:

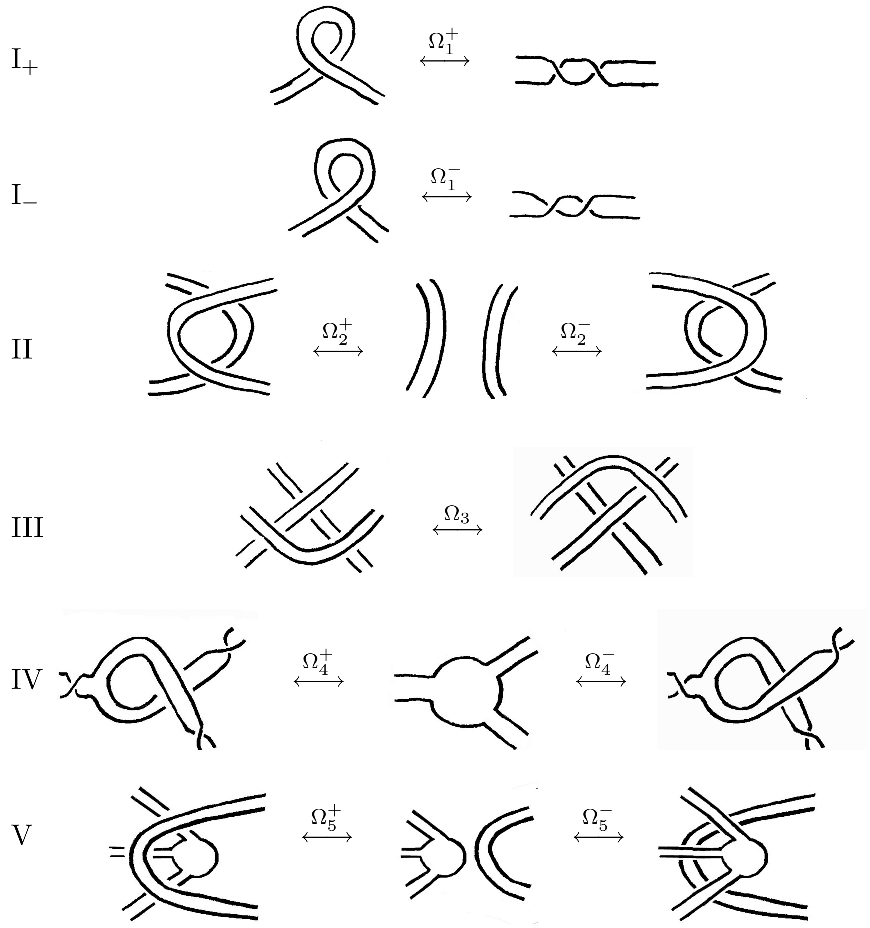
$$
\begin{aligned}
\left(XN^{tr}\right)_{(i,j)} &= \sum_{l=1}^{m} X_{(i,j),l} N_l = \sum_{l=1}^{m} \tfrac{1}{2} M_{(l,l),(i,j)} N_l = \sum_{l=1}^{m} v_l(a_i) v_l(a_j) N_l \\
&\overset{8.3}{=} \mathcal{G}(F)([b_i],[b_j]) - \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)} w_{s,t}^{D,o_D} = \mathcal{G}(F)([b_i],[b_j]) - T_{(i,j)}.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich sofort die behauptete Äquivalenz.

Zu (b): Wegen $|\det X| = 1$ ist offenbar $X^{-1} \in M^{tr}(\{1, \ldots, m\}, \mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$.

Zu (c): Es seien Γ und Γ' Einbettungen von $\mathcal{Z}$ zu D bzw. D', so dass $\Gamma(\mathcal{Z}) \subset F$ und

$\Gamma'(\mathcal{Z}) \subset F'$ gilt. Da D und D' äquivalent sind, gibt es eine Isotopie $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass zum einen $\Gamma'(\mathcal{Z}) = I\left(\Gamma(\mathcal{Z})\right)$ gilt und zum anderen $I(F) =: S$ eine durch eindeutig bestimmte Verdrillungen $N'' := (N''_1, \ldots, N''_m)$ gegebene Bandfläche $S = F\left(D', \gamma_{D'}, N''\right)$ zu $\Gamma'(\mathcal{Z})$ ist. Eine solche Isotopoie lässt sich wie folgt mithilfe der Reidemeisterbewegungen realisieren:



Da die Verdrillungen N von F durch (b) gegeben sind, gilt

$$g_{(i,j)} \overset{\text{(a)}}{=} \mathcal{G}(F)\left([b_i], [b_j]\right) = \mathcal{G}\left(I(F)\right)\left(H_1(I)\left([b_i]\right), H_1(I)\left([b_j]\right)\right) = \mathcal{G}(S)\left(\left[b'_i\right], \left[b'_j\right]\right).$$

Mit $[b'_i] := H_1(I)\left([b_i]\right) \in H_1(S)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $[b'_1], \ldots, [b'_n]$ eine Basis von $H_1(S)$, für die $[b'_i] = H_1(\Gamma')\left(T\left([a_i]\right)\right)$ gilt. Daher kann man (a) auf das Diagramm $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$, die Bandfläche S und $g \in M^{tr}\left(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z}\right)$ anwenden. Es ergibt sich

$$\left(N''\right)^{tr} \overset{\text{(a)}}{=} X^{-1}\left(g - T\left(M, D', \gamma_{D'}, o_{D'}\right)\right) \overset{\text{Vor.}}{=} \left(N'\right)^{tr}.$$

Insgesamt gilt also $I(F) = S = F'$. □

Satz 8.5 *Sei $G(\mathcal{Z})$ trivalent, 3-zusammenhängend und einfach. Die X-Matrix ist genau dann quadratisch, wenn $L(\mathcal{Z}) = 0$ ist.*

Beweis Nach [27], (I.1.1), Seite 4 gilt zunächst:

$$3\,|\mathcal{Z}_0| = \sum_{v\in\mathcal{Z}_0} \deg_{G(\mathcal{Z})}(v) = 2\,|\mathcal{Z}_1|\,. \tag{8.15}$$

Sei $n :=\text{Rang}\, H_1(\mathcal{Z})$. Die X-Matrix ist genau dann quadratisch, wenn $|\mathcal{Z}_1| = |\mathcal{B}(\mathcal{Z})| = \frac{1}{2}n(n+1)$ gilt. Aus Satz 7.13 auf Seite 214 ergibt sich die Rechnung

$$\begin{aligned} 2\,L(\mathcal{Z}) \quad &= \quad n(n+1) + 4\,|\mathcal{Z}_1| - \sum_{v\in\mathcal{Z}_0}\Big(\deg_{G(\mathcal{Z})}(v)\Big)^2 = n(n+1) + 4\,|\mathcal{Z}_1| - 9\,|\mathcal{Z}_0| \\ &\overset{(8.15)}{=} \quad n(n+1) - 2\,|\mathcal{Z}_1| \end{aligned} \tag{8.16}$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung Nach [23], Corollary 5.2. auf Seite 227 ist $L(\mathcal{Z}) = 0$ gleichbedeutend damit, dass $G(\mathcal{Z})$ planar ist und keine disjunkten Kreise enthält.

8.3 Ein Zusammenhang zwischen der Verschlingungsinvariante und der GL-Form

Satz 8.6 *Vorgelegt seien die Voraussetzungen aus Satz 8.4 auf Seite 252. Darüber hinaus sei y im Kern der Abbildung $f_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}$ aus 2.28 auf Seite 46. Wenn es ein $x \in M^{tr}(B(\mathcal{Z}),\mathbb{Z})$ gibt, so dass für die M-Matrix $M := M(\mathcal{B},\gamma,o)$ die Gleichung $y = M\cdot x$ erfüllt ist, dann gilt*

$$L_y(D,\gamma_D,o_D) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} x_{(i,j)}\cdot\langle b_i, b_j\rangle.$$

Beweis Sei m die Anzahl der Kanten von $G(\mathcal{Z})$. Aus $y = Mx$ folgt

$$y_{(s,t)} = \sum_{(i,j)\in B(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)}\cdot x_{(i,j)} \tag{8.17}$$

für jedes $(s,t) \in M(\mathcal{Z})$. Wegen $(l,l) \in N_\cup(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)$ für jedes $l \in \{1,\ldots,m\}$ gilt außerdem $y_{(l,l)} = 0$. Nun berechnet man:

$$\begin{aligned} &\sum_{(i,j)\in B(\mathcal{Z})} x_{(i,j)}\langle b_i, b_j\rangle \\ &\overset{8.3}{=} \sum_{(i,j)\in B(\mathcal{Z})} x_{(i,j)}\left(\sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)}\cdot w_{s,t}^{D,o_D} + \sum_{l=1}^{m} N_l v_l(a_i)v_l(a_j)\right) \\ &= \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} w_{s,t}^{D,o_D}\left(\sum_{(i,j)\in B(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)}\cdot x_{(i,j)}\right) + \sum_{l=1}^{m} N_l\left(\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in B(\mathcal{Z})} M_{(l,l),(i,j)}\cdot x_{(i,j)}\right) \end{aligned}$$

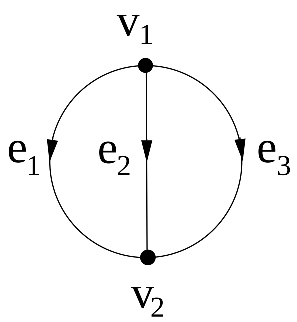
$$\overset{(8.17)}{=} \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} w_{s,t}^{D,o_D} \cdot y_{(s,t)} + 0 = L_y\left(D, \gamma_D, o_D\right).$$

$\square$

8.4 Bandflächen spezieller Graphen

8.4.1 Der Theta-Graph

Es sei nun $(\mathcal{Z}, o) = (\Theta, o)$ der topologische Theta-Graph. Der Graph $H = \left(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_3, h_{G(\Theta)}\right)$ aus (8.1) auf Seite 245 sei gegeben durch $V_H := \{v_1, v_2\}$, $E_H := \{e_1, e_2, e_3\}$ und $h_{G(\Theta)}(e_i) := (v_1, v_2)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Als Basis $\mathcal{B}_\Theta := \{[a_1], [a_2]\}$ von $H_1\left(C\left(\Theta\right)\right)$ werden Repräsentanten a_1 und a_2 mit den Koordinaten $v(a_1) := (0, 1, -1)$ bzw. $v(a_2) := (-1, 1, 0)$ gewählt.



Die X-Matrix $X := X\left(\mathcal{B}_\Theta, \gamma, o\right)$ berechnet sich zu

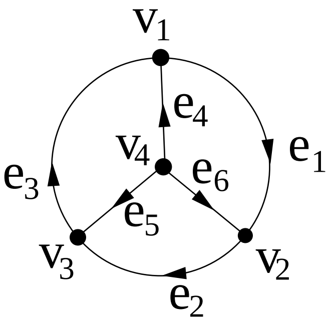
$$X = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline (1,1) & 0 & 1 & 1 \\ (1,2) & 0 & 1 & 0 \\ (2,2) & 1 & 1 & 0 \end{array} .$$

Offenbar gilt $\det X = -1$, daher lässt sich Satz 8.4 (c) auf Seite 252 auf Diagramme von Θ anwenden, siehe Abschnitt 8.5.1 ab Seite 260. Für die Inverse gilt

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

8.4.2 Der Graph K_4

In diesem Abschnitt sei der topologische Graph $\mathcal{K}_4$ vorgelegt. Der Graph $H = (\mathcal{V}_4, \mathcal{E}_6, h_{K_4})$ aus (8.1) sei gegeben durch $V_H := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E_H := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ und $h_{K_4}(e_1) := (v_1, v_2)$, $h_{K_4}(e_2) := (v_2, v_3)$, $h_{K_4}(e_3) := (v_3, v_1)$, $h_{K_4}(e_4) := (v_4, v_1)$, $h_{K_4}(e_5) := (v_4, v_3)$ $h_{K_4}(e_6) := (v_4, v_2)$. Als Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_4} := \{[a_1], [a_2], [a_3]\}$ von $H_1(C(\mathcal{K}_4))$ werden Repräsentanten a_1, a_2 und a_3 mit den Koordinaten $v(a_1) := (1, 0, 0, 1, 0, -1) =$ , $v(a_2) := (0, 1, 0, 0, -1, 1) =$ , bzw. $v(a_3) := (0, 0, 1, -1, 1, 0) =$ , gewählt.



Die X-Matrix $X := X(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_4}, \gamma, o)$ berechnet sich zu

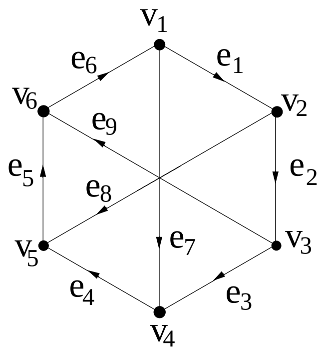
$$X = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline (1,1) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ (1,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (1,3) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ (2,2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (2,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ (3,3) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad .$$

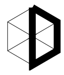
Man berechnet $\det X = 1$, daher lässt sich Satz 8.4 (c) auf Seite 252 auf Diagramme von $\mathcal{K}_4$ anwenden. Für die inverse Matrix gilt

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

8.4.3 Der Graph $\mathbf{K_{3,3}}$

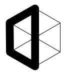
Nun sei der topologische Graph $\mathcal{K}_{3,3}$ vorgelegt. Der Graph $H = \left(\mathcal{V}_6, \mathcal{E}_9, h_{K_{3,3}}\right)$ aus (8.1) sei analog zu 8.4.1 und 8.4.2 gemäß der nebenstehenden Abbildung gegeben. Als Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}} := \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4]\}$ von $H_1\left(C\left(\mathcal{K}_{3,3}\right)\right)$ werden Repräsentanten a_1, a_2, a_3 und a_4 mit den Koordinaten



$$v(a_1) := (1,1,1,0,0,0,-1,0,0) =$$ 

$$v(a_2) := (0,1,1,1,0,0,0,-1,0) =$$ 

$$v(a_3) := (0,0,1,1,1,0,0,0,-1) =$$ 

$$v(a_4) := (0,0,0,1,1,1,1,0,0) =$$ 

gewählt.

Lemma 8.7 *Gegeben sei in (8.1) eine bijektive Nummerierung (w, γ) des orientierten Zellenkomplexes $(\mathcal{K}_{3,3}, o)$ und das erzeugende Element $y \in \operatorname{Kern} G_{(K_{3,3},w,\gamma)}$ aus Satz 6.6 auf Seite 183. Sei $\kappa(y) \in \operatorname{Kern} f_{(K_{3,3},w,\gamma)}$ gemäß Satz 2.39 auf Seite 56. Für die M-Matrix $M := M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, o\right)$ gilt:*

$$\kappa(y) = M \cdot x \quad \Longleftrightarrow \quad x = (0,0,1,0,0,-1,1,0,0,0)^{tr} \in M\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right), \mathbb{Z}\right). \tag{8.18}$$

Beweis Das Bild von y unter κ hat die Gestalt

$$\begin{aligned}\kappa(y) = {} & (0,0,1,1,1,0,0,0,-1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,\\ & 0,0,1,0,0,1,0,0,-1,0,0,0,0,-1,0,0,-1,1,0,-1,0)^{tr}.\end{aligned}$$

Auf Seite 258 ist die M-Matrix $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, o\right)$ abgebildet. Dabei stehen in der ersten Zeile bzw. in der ersten Spalte die jeweiligen Indizes. Mit diesen Daten lässt sich die Behauptung nachrechnen. □

Satz 8.8 *Vorgelegt seien die Voraussetzungen aus Satz 8.4 auf Seite 252 für $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_{3,3}$. Es seien x und $\kappa(y)$ die Elemente aus (8.18) und $g \in M^{tr}\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right), \mathbb{Z}\right)$ mit*

$$g_{(1,3)} := \tfrac{1}{x_{(1,3)}} \left[L_{\kappa(y)}\left(D, \gamma_D, o_D\right) - \sum_{1 \le i \le j \le 4, (i,j) \ne (1,3)} x_{(i,j)} \cdot g_{(i,j)} \right]. \tag{8.19}$$

M-Matrix $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, o\right)$:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,3)	(3,4)	(4,4)
(1,1)	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,2)	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3)	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(1,4)	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
(1,5)	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
(1,6)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(1,7)	-2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(1,8)	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,9)	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
(2,2)	2	2	0	0	2	0	0	0	0	0
(2,3)	2	2	1	0	2	1	0	0	0	0
(2,4)	0	1	1	1	2	1	1	0	0	0
(2,5)	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
(2,6)	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
(2,7)	-2	-1	0	1	0	0	1	0	0	0
(2,8)	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0
(2,9)	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
(3,3)	2	2	2	0	2	2	0	2	0	0
(3,4)	0	1	1	1	2	2	1	2	1	0
(3,5)	0	0	1	1	0	1	1	2	1	0
(3,6)	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
(3,7)	-2	-1	-1	1	0	0	1	0	1	0
(3,8)	0	-1	0	0	-2	-1	0	0	0	0
(3,9)	0	0	-1	0	0	-1	0	-2	0	0
(4,4)	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
(4,5)	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2
(4,6)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
(4,7)	0	-1	-1	-1	0	0	1	0	1	2
(4,8)	0	0	0	0	-2	-1	-1	0	0	0
(4,9)	0	0	0	0	0	-1	0	-2	-1	0
(5,5)	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
(5,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
(5,7)	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	2
(5,8)	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
(5,9)	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0
(6,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
(6,7)	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
(6,8)	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
(6,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
(7,7)	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2
(7,8)	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0
(7,9)	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
(8,8)	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
(8,9)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(9,9)	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0

Darüber hinaus seien die Matrizen $X' \in M_{9\times 9}\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right) \setminus \{(1,3)\}, \{1,\ldots,9\}, \mathbb{Z}\right)$ *und* $g', T' \in M^{tr}\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right) \setminus \{(1,3)\}, \mathbb{Z}\right)$ *für jedes* $(i,j) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right) \setminus \{(1,3)\}$ *wie folgt definiert:* $X'_{(i,j),l} := X\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, o\right)_{(i,j),l}$ *für* $l \in \{1,\ldots,9\}$, $T'_{(i,j)} := T\left(M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, o\right), D, \gamma_D, o_D\right)_{(i,j)}$ *und* $g'_{(i,j)} := g_{(i,j)}$.

(a) *Für die Matrix* X' *und die Matrix* T' *gilt:*

$$X' N^{tr} = g' - T' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_{3,3}) : \mathcal{G}(F)\left([b_i],[b_j]\right) = g_{(i,j)}.$$

(b) $\det X' = -1 \qquad$ *und* $\qquad X' N^{tr} = g' - T' \Longleftrightarrow N^{tr} = X'^{-1}(g' - T') \in \mathbb{Z}^m.$

(c) *Es sei* $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ *ein weiteres Diagramm zu* $\mathcal{K}_{3,3}$ *mit einer Bandfläche* $F' := F\left(D', \gamma_{D'}, N'\right)$ *wie in Satz 8.4. Dabei seien die Verdrillungen* N *und* N' *durch die rechte Formel in (b) gegeben. Sind* (D, γ_D, o_D) *und* $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ *äquivalent, so sind* F *und* F' *isotop in* $\mathbb{R}^3$.

Beweis **Zu (a):** Wie in (a) von Satz 8.4 lässt sich für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{K}_{3,3}\right) \setminus \{(1,3)\}$ die Gleichung

$$\left(X' N^{tr}\right)_{(i,j)} = \mathcal{G}(F)\left([b_i],[b_j]\right) - T'_{(i,j)} \tag{8.20}$$

nachweisen. Daraus folgt sofort $\Leftarrow$ der Behauptung. Es bleibt $\Rightarrow$ zu zeigen. Für $(i,j) \neq (1,3)$ gilt

$$\mathcal{G}(F)\left([b_i],[b_j]\right) \overset{(8.20)}{=} \left(X' N^{tr}\right)_{(i,j)} + T'_{(i,j)} = g'_{(i,j)} - T'_{(i,j)} + T'_{(i,j)} = g'_{(i,j)} = g_{(i,j)} \tag{8.21}$$

und für $(i,j) = (1,3)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(F)\left([b_1],[b_3]\right) \quad &= \quad \langle b_1, b_3 \rangle \overset{8.6}{=} \frac{1}{x_{(1,3)}} \left[L_{\kappa(y)}\left(D, \gamma_D, o_D\right) - \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{K}_{3,3})\setminus\{(1,3)\}} x_{(i,j)} \cdot \langle b_i, b_j \rangle \right] \\ &\overset{(8.21)}{=} \frac{1}{x_{(1,3)}} \left[L_{\kappa(y)}\left(D, \gamma_D, o_D\right) - \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{K}_{3,3})\setminus\{(1,3)\}} x_{(i,j)} \cdot g_{(i,j)} \right] \overset{\text{Vor.}}{=} g_{(1,3)}. \end{aligned}$$

Zu (b): Für die Matrix X' ergibt sich

$$X' = \begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline (1,1) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1,2) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ (2,2) & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (2,3) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2,4) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3,3) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (3,4) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (4,4) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} . \tag{8.22}$$

Man berechnet $\det X' = -1$.

Zu (c): Man beweist diese Aussage genau wie in (c) aus Satz 8.4 auf Seite 252. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass $g_{(1,3)}$ nicht von dem Diagramm abhängt, denn aus der Äquivalenz von (D, γ_D, o_D) und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ folgt $L_{\kappa(y)}(D, \gamma_D, o_D) = L_{\kappa(y)}(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$.

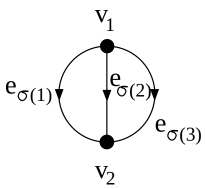
□

8.5 Minimal verschiedene Einbettungen

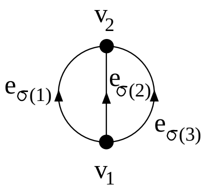
Zwei Einbettungen $\Gamma, \Gamma' : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ heißen **minimal verschieden**, wenn sie nicht äquivalent sind, aber für jeden Teilkomplex $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ die Einschränkungen $\Gamma\big|_{\mathcal{Y}}$ und $\Gamma'\big|_{\mathcal{Y}}$ äquivalent sind. Siehe [25], p. 56 sowie [16], p. 413. für planare Graphen.

8.5.1 Der Theta-Graph

Vorgelegt sei die Situation aus Abschnitt 8.4.1 auf Seite 255 sowie ein Diagramm D von Θ. Zu jedem $\sigma \in S_3$ seien bijektive Nummerierungen (w, γ_σ) und (w', γ_σ) von D gegeben, so dass sich orientierte Diagramme (D, o_D) und (D, o'_D) der Art



bzw.



(8.23)

ergeben. Zu jedem so nummerierten Diagramm gibt es Einbettungen Γ_σ bzw. Γ'_σ, so dass jeweils Diagramme wie in (8.1) auf Seite 245 kommutieren. Offenbar ist die T-Matrix zu o_D

aus Satz 8.4 auf Seite 252 dieselbe wie zu o'_D, da sich die Orientierungen sämtlicher Pfeile im Diagramm (D, o_D) umkehren. Daher kann man sich zur Berechnung der Verdrillungen $N_\sigma^{tr} = X^{-1}(g - T_\sigma)$ gemäß 8.4(b) auf das orientierte Diagramm (D, o_D) berschränken. Für die M-Matrix gilt

$$M(\mathcal{B}_\Theta, \gamma, o) = \begin{array}{c|rrr} & (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ \hline (1,1) & 0 & 0 & 2 \\ (1,2) & 0 & -1 & -2 \\ (1,3) & 0 & 1 & 0 \\ (2,2) & 2 & 2 & 2 \\ (2,3) & -2 & -1 & 0 \\ (3,3) & 2 & 0 & 0 \end{array} ,$$

deshalb erhält man

$$\begin{aligned} (T_\sigma)_{(1,1)} &= 2w^\sigma_{(2,2)} - 2w^\sigma_{(2,3)} + 2w^\sigma_{(3,3)}, \\ (T_\sigma)_{(1,2)} &= -w^\sigma_{(1,2)} + w^\sigma_{(1,3)} + 2w^\sigma_{(2,2)} - w^\sigma_{(2,3)}, \\ (T_\sigma)_{(2,2)} &= 2w^\sigma_{(1,1)} - 2w^\sigma_{(1,2)} + 2w^\sigma_{(2,2)}, \end{aligned}$$

wobei $w^\sigma_{(s,t)}$ für $w^{D,o_D}_{(\gamma_\sigma)^{-1}(e_s),(\gamma_\sigma)^{-1}(e_t)}$ steht. Für $g := \left(g_{(1,1)}, g_{(1,2)}, g_{(2,2)}\right)$ ergibt sich mithilfe der X-Matrix:

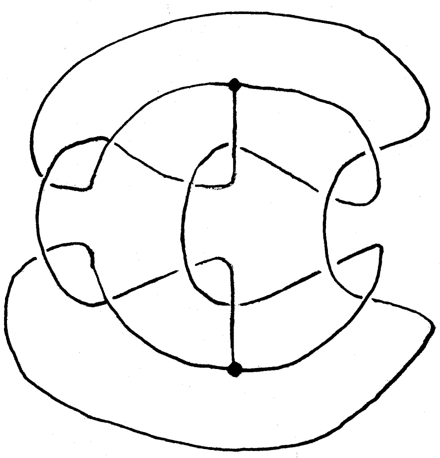
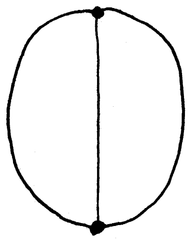
$$N_\sigma^{tr} - \begin{pmatrix} g_{(2,2)} - g_{(1,2)} \\ g_{(1,2)} \\ g_{(1,1)} - g_{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^\sigma_{(1,2)} + w^\sigma_{(1,3)} - w^\sigma_{(2,3)} - 2w^\sigma_{(1,1)} \\ w^\sigma_{(1,2)} - w^\sigma_{(1,3)} - 2w^\sigma_{(2,2)} + w^\sigma_{(2,3)} \\ w^\sigma_{(2,3)} - 2w^\sigma_{(3,3)} - w^\sigma_{(1,2)} + w^\sigma_{(1,3)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} (S_\sigma)_1 \\ (S_\sigma)_2 \\ (S_\sigma)_3 \end{pmatrix} =: S_\sigma. \tag{8.24}$$

Da für jedes $\sigma \in S_3$ und jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ die Beziehung $\gamma_\sigma^{-1}(e_i) = \gamma_{id}^{-1}\left(e_{\sigma(i)}\right)$ erfüllt ist (siehe (8.23)), erkennt man an (8.24), dass $(S_\sigma)_i = (S_{id})_{\sigma(i)}$ gilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in S_3 : N_\sigma = N_{id} \quad &\Leftrightarrow \quad g_{(2,2)} - g_{(1,2)} = g_{(1,2)} = g_{(1,1)} - g_{(1,2)} \\ &\Leftrightarrow \quad g_{(1,1)} = g_{(2,2)} = 2g_{(1,2)}. \end{aligned}$$

Somit erhält man für jede gerade Zahl $2n$, $n \in \mathbb{Z}$ eine eindeutig bestimmte orientierbare Bandfläche zu einem Diagramm von Θ mit GL-Form $\binom{2n\ n}{n\ 2n}$. Für $n = 0$ sind die Verdrillungen in (8.24) genau diejenigen, die sich in [8] aus dem Gleichungssystem auf Seite 199 ergeben.

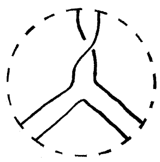
Als Beispiel soll nachgewiesen werden, dass die folgenden Diagramme D und D' minimal verschieden sind, also dass

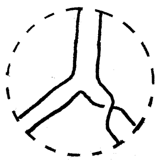
$D' :=$  $\neq$  $=: D$ (8.25)

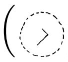
gilt. Wählt man Nummerierungen und passende Orientierungen der Diagramme D, D' berechnet sich $w_{s,t}^{D,o_D} = w_{s,t}^{D',o_{D'}} = 0$ für alle $1 \leq s \leq t \leq 3$. Es folgt $N = (n, n, n)$ aus (8.24) für $g := (2n, n, 2n)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für ungerade n erhält man als Randverkettungen Knoten, für gerade n Verkettungen mit drei Komponenten. Allerdings erweisen sich die jeweiligen Alexanderpolynome als gleich und somit als nicht geeignet zum Beweis der Ungleichung (8.25).

Daher werden die Nummerierungen im Einzelnen betrachtet. Für jedes $\sigma \in S_3$ ergibt sich zu D' eine Bandfläche $B\big(L\big)$ der Gestalt (8.26). Es wird nun $g := \big(g_{(1,1)}, g_{(1,2)}, g_{(2,2)}\big)$ $:= (0, 0, 1)$ gewählt, so dass $B\big(L\big)$ die Form

$L_1 :=$  für $\sigma \in \{id, (23)\}$

$L_2 :=$  für $\sigma \in \{(12), (132)\}$

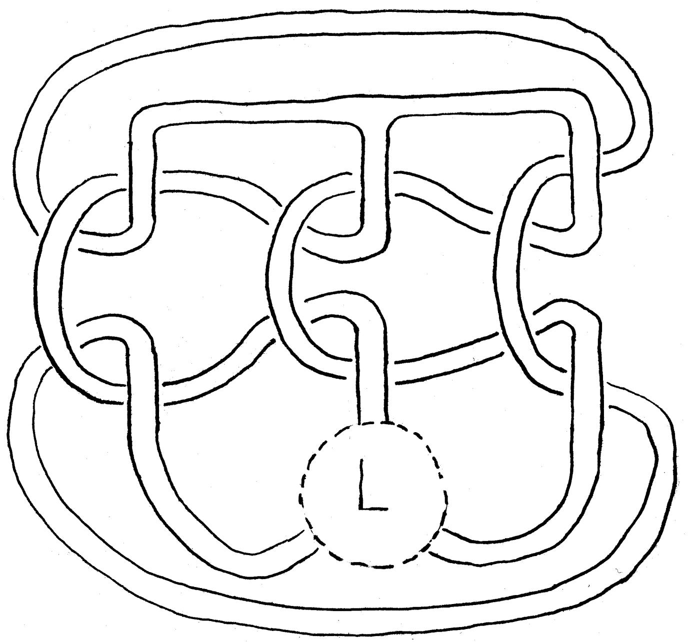
$L_3 :=$  für $\sigma \in \{(13), (123)\}$

annimmt. Nun lässt sich $B\big(L\big)$ überführen in ein Diagramm der Form (8.27). Dieses wiederum ist äquivalent zu $B\Big($  $\Big)$. Daher sind die zugehörigen Randverkettungen $K\Big($  $\Big)$ auch äquivalent und man folgert $K\,(L_1) = K\,(L_2) = K\,(L_3)$. Also genügt es, sich auf die Verkettung $K\,(L_1)$ zu beschränken. Sie enthält als Komponente den Knoten K aus (8.28), dessen Alexanderpolynom sich zu $\Delta_K(x) = x^8 - 4x^7 + 4x^6 + 4x^5 - 11x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ berechnet. Dieses Polynom ist die Determinate der Matrix $M_K :=$

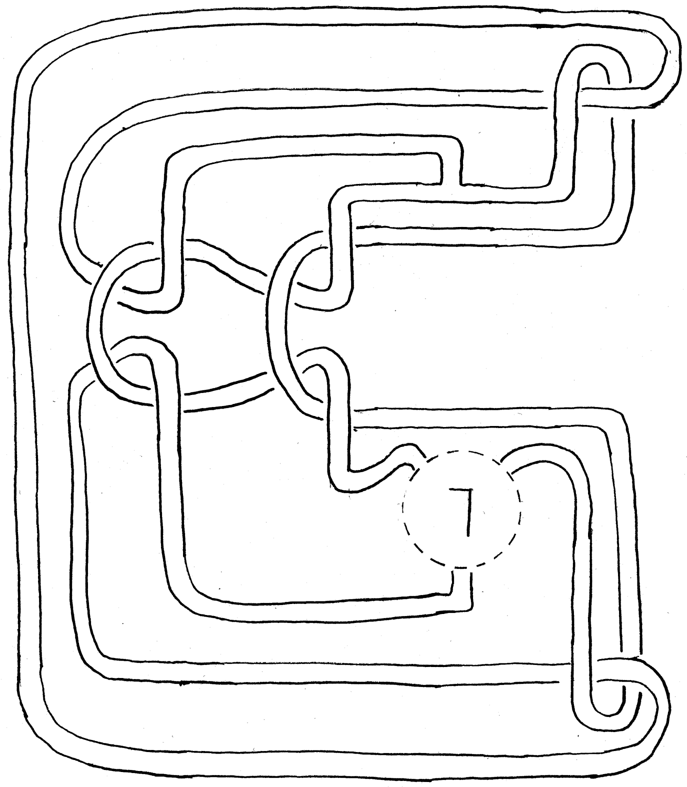
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	x	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	x	0	x	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	x	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	x
5	0	0	1	0	1	0	x	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0	x	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	x	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	x	0
8	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	x	0	1	0	0	0	1	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	x	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	x	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	x	0	1	0	x	0
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	x	0	0	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	x	0	0
15	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0
16	0	0	x	0	x	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	x	0	x	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0
20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	x	0	x	0	0
21	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	x	0	0

und wurde mit MAPLE berechnet. In M_K sind die Zeilen mit den Kreuzungen aus (8.28) und die Spalten mit den Gebieten a_i aus (8.28) nummeriert. Das Gebiet a_{22} bleibt unberücksichtigt. Die Matrix ergibt sich dann aus dem Verfahren von Alexander in [1] oder auch [2], Seite 5.

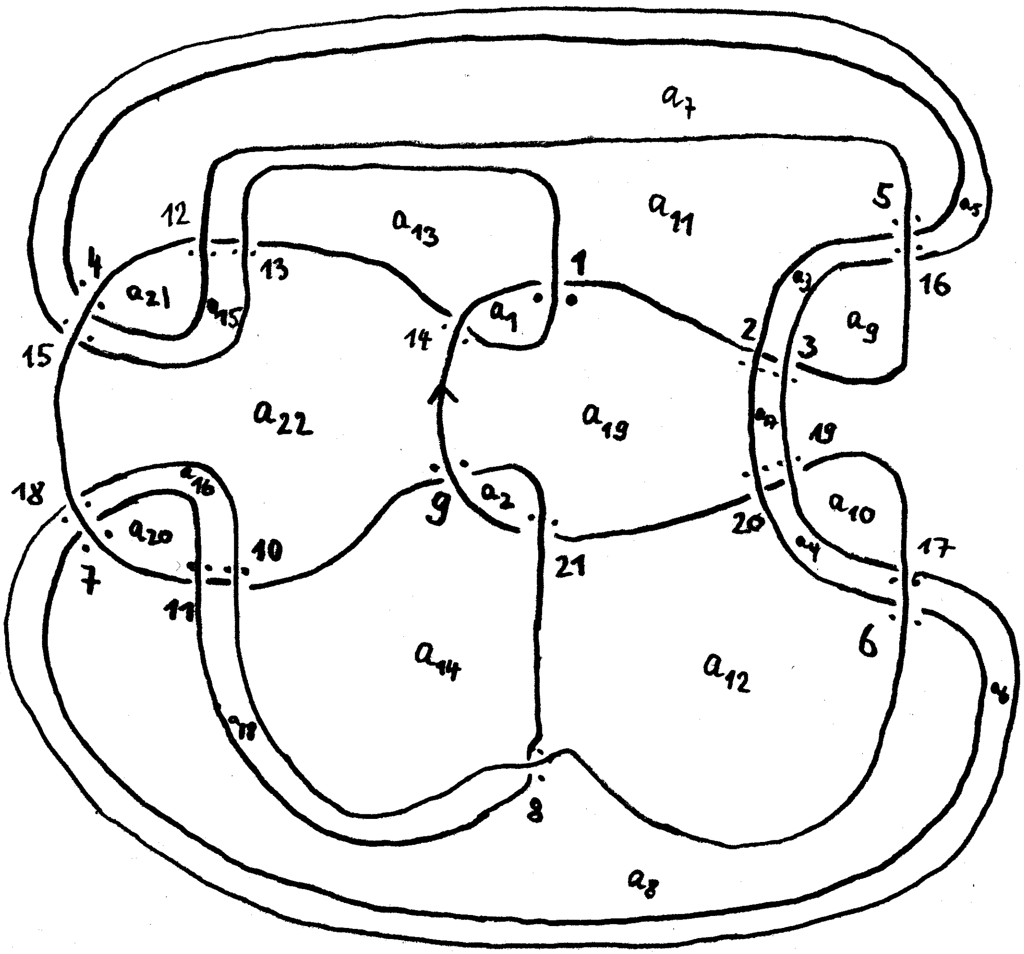
Da die Bandfläche zu D in (8.25) auf Seite 262 nur triviale Knoten als Komponenten der Randverkettung enthält, ist die Ungleichung 8.25 gezeigt.



(8.26)



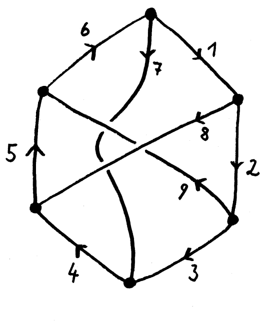
(8.27)



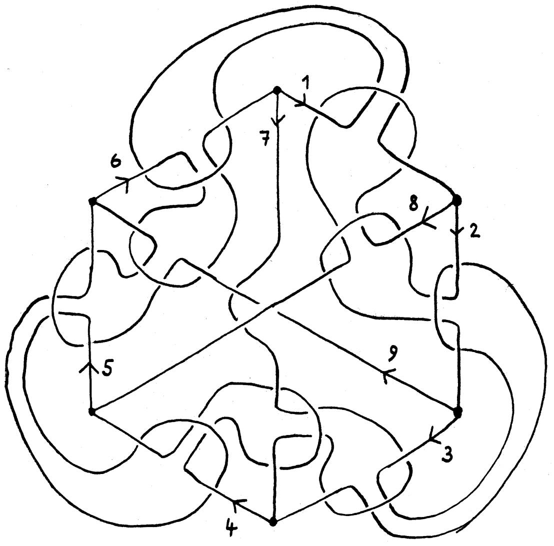
(8.28)

8.5.2 Der Graph $\mathbf{K_{3,3}}$

Vorgelegt seien $\mathcal{K}_{3,3}$, H und $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}$ wie in Abschnitt 8.4.3 sowie Diagramme (D, γ_D, o_D) und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ wie in (8.29) bzw. (8.30).



(8.29)



(8.30)

Es wird gezeigt, dass D und D' bezüglich der gewählten Nummerierung minimal verschieden sind. Dazu werden die jeweiligen Randverkettungen der Bandflächen untersucht. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} L &:= L_{\kappa(y)}\left(D', \gamma_{D'}, o_{D'}\right) = L_{\kappa(y)}\left(D, \gamma_D, o_D\right) = y_{(7,8)} w_{7,8} + y_{(7,9)} w_{7,9} + y_{(8,9)} w_{8,9} \\ &= -w_{(7,8)} + w_{(7,9)} - w_{(8,9)} = -1 + 1 + 1 = 1. \end{aligned}$$

In 8.8 auf Seite 257 sei

$$g' := (4\lambda - 2L, 2\lambda - L, -\lambda + L, 4\lambda - 2L, 2\lambda - L, \lambda, 4\lambda - 2L, 2\lambda - L, 4\lambda - 2L)^{tr} \qquad (8.31)$$

für ein zunächst beliebiges $\lambda \in \mathbb{Z}$. Aus (8.18) auf Seite 257 und (8.19) auf Seite 257 ergibt sich somit $g_{(1,3)} = L - g_{(2,3)} + g_{(2,4)} = \lambda$. Nun lassen sich sowohl für $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ als auch für (D, γ_D, o_D) die Verdrillungen

$$N^{tr} = \left(X'\right)^{-1}\left(g' - T'\right) = (0, -2, -2, 0, -2, -2, -2, -2, -2)^{tr}$$

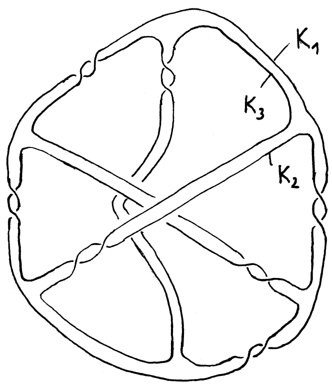
berechnen: Dabei sei $\lambda := -1$. Es gilt $T'_{(i,j)} = M_{(7,8),(i,j)} + M_{(7,9),(i,j)} - M_{(8,9),(i,j)}$ für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_{3,3})$. Mithilfe der unterstrichenen Zeilen auf Seite 258 stellt man $T' = (0, 1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, 0)^{tr}$ und somit

$$\begin{aligned} g' - T' &= (4\lambda - 2L, 2\lambda - L - 1, -\lambda + L, 4\lambda - 2L, 2\lambda - L + 1, \lambda + 1, 4\lambda - 2L, \\ &\qquad 2\lambda - L + 1, 4\lambda - 2L)^{tr} \\ &\overset{\lambda := -1}{=} (-6, -4, 2, -6, -2, 0, -6, -2, -6)^{tr} \end{aligned}$$

fest. Für die Matrix $(X')^{-1}$ ergibt sich

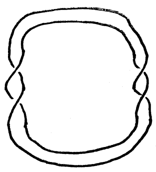
$$\left(X'\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mithilfe von MAPLE. Die Bandfläche F zu D hat somit die Gestalt

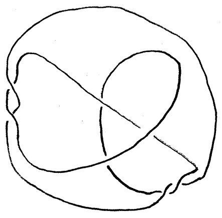
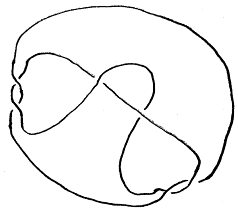
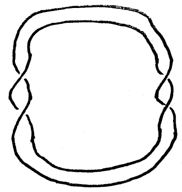
$$F := F(D, \gamma_D, N) \quad = $$  . (8.32)

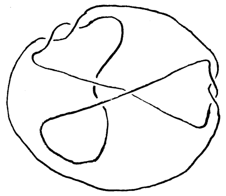
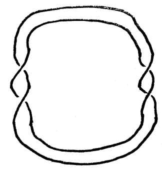
Ganz analog erhält man die Bandfläche $F' := F(D', \gamma_{D'} N)$. Die Randverkettungen K und K' von F bzw. F' bestehen aus jeweils drei Komponenten. Diese seien mit K_1, K_2, K_3 bzw. K_1', K_2', K_3' bezeichnet. Dabei sollen die K_i' den K_i entsprechen. Nun wird gezeigt, dass die Verkettung $K_2' \sqcup K_3'$ auf Seite 269, die aus den beiden Komponenten K_2' und K_3' besteht, nicht in K enthalten ist.

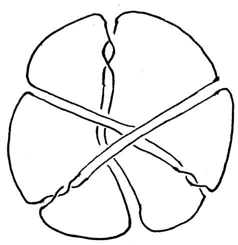
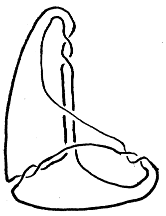
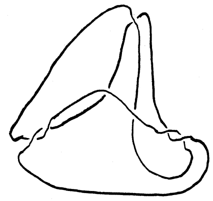
Die Teilverkettungen $K_i \sqcup K_j$, $1 \leq i < j \leq 3$ von K mit je zwei Komponenten sind jeweils äquivalent zu

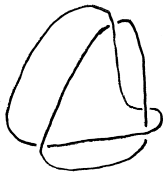
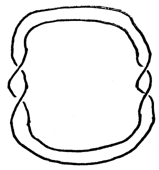
 , (8.33)

wie die folgenden Umformungen zeigen:

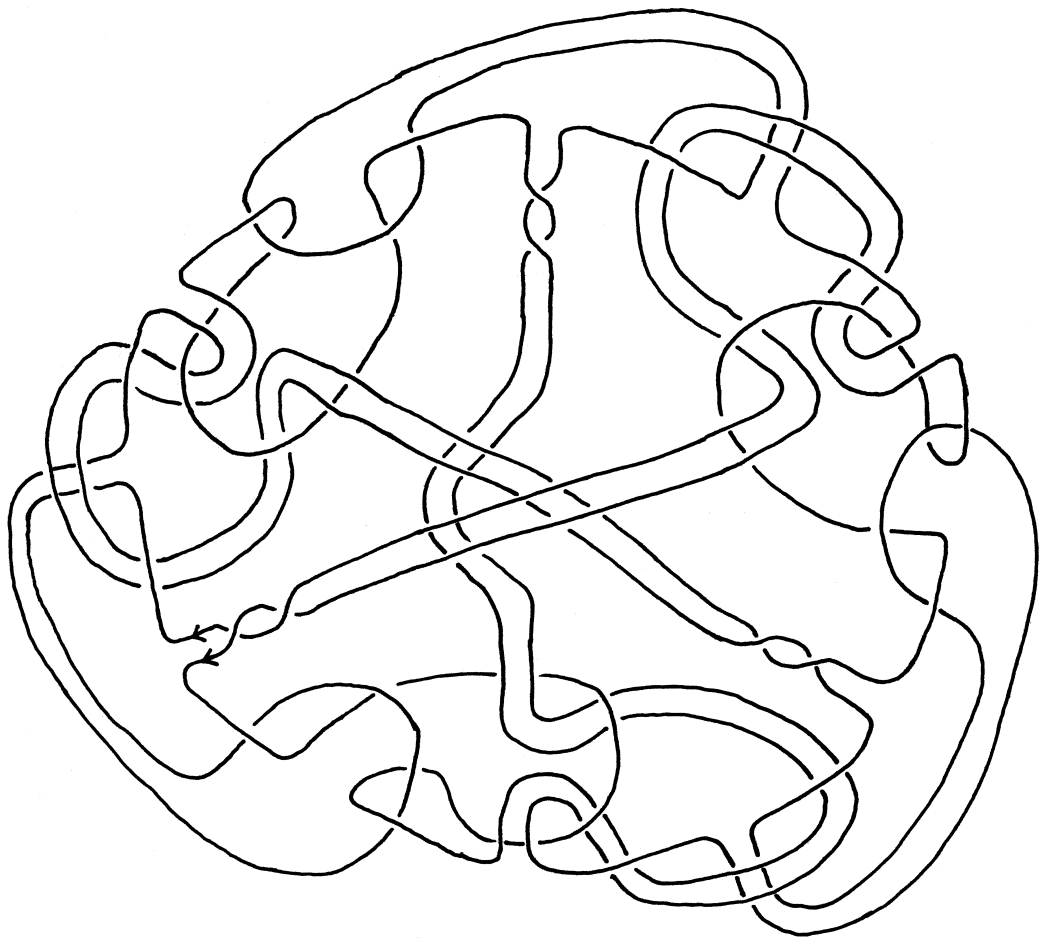
$K_1 \sqcup K_3$ =  =  = 

$K_1 \sqcup K_2$ =  = 

$K_2 \sqcup K_3$ =  =  = 

=  = 

Das Alexander-Polynom der wie in (8.34) orientierten Verkettung $K_2' \sqcup K_3'$ lautet: $2 - 26x + 144x^2 - 416x^3 + 524x^4 + 468x^5 - 2848x^6 + 3952x^7 + 342x^8 - 8398x^9 + 10336x^{10} - 12922x^{12} + 12922x^{13} - 10336x^{15} + 8398x^{16} - 342x^{17} - 3952x^{18} + 2848x^{19} - 468x^{20} - 524x^{21} + 416x^{22} - 144x^{23} + 26x^{24} - 2x^{25}$. Aus Gradgründen ist dies verschieden von den Alexander-Polynomen der Verkettung aus (8.33) mit beliebig gewählten Orientierungen.



(8.34)

Bemerkung Ein Diagramm von $\mathcal{K}_{3,3}$ wie zum Beispiel das in (8.30) auf Seite 266 lässt sich auf 72 verschiedene Arten bijektiv nummerieren. Das ist die Anzahl der Elemente in der Automorphismengruppe von $\mathrm{K}_{3,3}$. Für die Hälfte von diesen wechselt die Verschlingungsinvariante des Diagramms das Vorzeichen. Für die anderen 36 Nummerierungen bleibt sie gleich. Wählt man g' wie in (8.31) auf Seite 266, so ergeben sich für jede dieser 36 Nummerierungen dieselbe Bandfläche. Allerdings wird auf diese Thematik in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen.

Kapitel 9

Die M-Matrix

In diesem Kapitel wird die M-Matrix aus Definition 8.1 auf Seite 248 studiert. Es wird untersucht, welche Auswirkungen das Umorientieren einer Kante (9.3 ab Seite 272), eine Umnummerierung der Kanten (9.5 ab Seite 275), ein Basiswechsel in der Homologie (9.6 ab Seite 276) und eine Kontraktion (9.7 ab Seite 277) auf die M-Matrix bzw. auf eine Gleichung der Art „$Mx = y$“ aus (8.18) auf Seite 257 hat. Aus diesen Resultaten ergibt sich im Satz 9.9 ab Seite 280, dass der Verschlingungsmodul im Bild der M-Matrix enthalten ist.

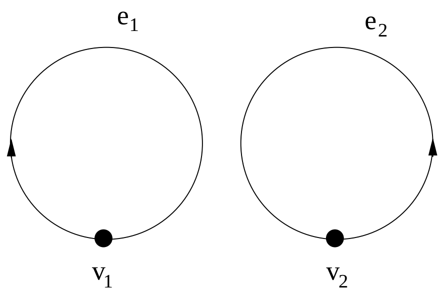
Die Ergebnisse dieses Kapitels werden im nächsten Kapitel zur Konstruktion einer eindeutigen Bandfläche verwendet.

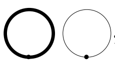
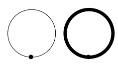
9.1 M-Matrizen von $\mathbf{Z_2}$ und $\mathbf{K_5}$

Für die Graphen Z_2 und K_5 gelten zu Satz 8.7 auf Seite 257 analoge Aussagen:

9.1.1 Der Graph $\mathbf{Z_2}$

Nun sei der topologische Graph $\mathcal{Z}_2$ vorgelegt. Der Graph $H = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2, h_{Z_2})$ aus (8.1) sei wie in Abschnitt 8.4 gemäß der nebenstehenden Abbildung gegeben. Als Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}_2} := \{[a_1], [a_2]\}$ von $H_1(C(\mathcal{Z}_2))$ werden Repräsentanten a_1, a_2 mit den Koordinaten



$v(a_1) := (1, 0) \quad =$ , $\quad v(a_2) := (0, 1) \quad =$ 

gewählt.

Satz 9.1 *Gegeben sei in (8.1) eine bijektive Nummerierung (w, γ) des orientierten Zellenkomplexes $(\mathcal{Z}_2, o)$ und das erzeugende Element $y \in \mathit{Kern}\, G_{(Z_2,w,\gamma)}$ aus Satz 6.2 auf Seite 181. Sei $\kappa(y) \in \mathit{Kern}\, f_{(Z_2,w,\gamma)}$ gemäß Satz 2.39 auf Seite 56. Für die M-Matrix $M := M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}_2}, \gamma, o\right)$ gilt:*

$$\kappa(y) = M \cdot x \quad \Longleftrightarrow \quad x = (0,1,0)^{tr} \in M^{tr}\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{Z}_2\right), \mathbb{Z}\right). \tag{9.1}$$

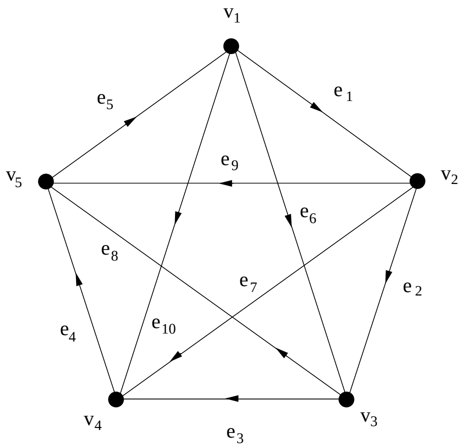
Beweis Das Bild von y unter κ hat die Gestalt $\kappa(y) = (0,1,0)^{tr}$. Die M-Matrix $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}_2}, \gamma, o\right)$ hat die Gestalt

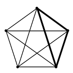
$$M = \begin{array}{c|ccc} & (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ \hline (1,1) & 2 & 0 & 0 \\ (1,2) & 0 & 1 & 0 \\ (2,2) & 0 & 0 & 2 \end{array} .$$

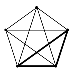
Die Behauptung ergibt sich als Lösung des Systems $Mx = \kappa(y)$. □

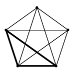
9.1.2 Der Graph $\mathbf{K_5}$

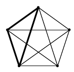
Nun sei der topologische Graph $\mathcal{K}_5$ vorgelegt. Der Graph $H = (\mathcal{V}_5, \mathcal{E}_{10}, h_{K_5})$ aus (8.1) sei analog zu 8.4 gemäß der nebenstehenden Abbildung gegeben. Als Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_5} := \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4], [a_5], [a_6]\}$ von $H_1\left(C\left(\mathcal{K}_5\right)\right)$ werden Repräsentanten a_i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ mit den Koordinaten

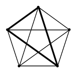


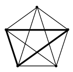
$v(a_1) := (1,1,0,0,0,-1,0,0,0,0) =$ 

$v(a_2) := (0,1,1,0,0,0,-1,0,0,0) =$ 

$v(a_3) := (0,0,0,1,0,0,0,-1,0,0) =$ 

$v(a_4) := (0,0,0,1,1,0,0,0,0,1) =$ 

$v(a_5) := (0,0,0,0,1,1,0,1,0,0) =$ 

$v(a_6) := (0,0,0,1,0,0,1,0,-1,0) =$ 

gewählt.

Satz 9.2 *Gegeben sei in (8.1) eine bijektive Nummerierung (w,γ) des orientierten Zellenkomplexes $(\mathcal{K}_5, o)$ und das erzeugende Element $y \in Kern\, G_{(K_5,w,\gamma)}$ aus Satz 6.8 auf Seite 184. Sei $\kappa(y) \in Kern\, f_{(K_5,w,\gamma)}$ gemäß Satz 2.39 auf Seite 56. Für die M-Matrix $M := M(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_5}, \gamma, o)$ gilt:*

$$\kappa(y) = M \cdot x \quad \Longleftrightarrow \quad x = (0,0,-1,0,0,0,0,1,-1,0,0,-1,1,-1,1,0,0,-1,0,1,0)^{tr}. \tag{9.2}$$

Beweis Das Bild von y unter κ hat die Gestalt

$$\begin{aligned}\kappa(y) \;=\;& (0,0,-1,-1,0,0,0,1,0,0,0,0,-1,-1,0,0,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,\\ & 0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,1,0,0,0,0,-1,0,1,0)^{tr}.\end{aligned}$$

Auf Seite 273 ist die M-Matrix $M(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_5}, \gamma, o)$ abgebildet. Dabei stehen in der ersten Zeile bzw. in der ersten Spalte die jeweiligen Indizes. Mit diesen Daten lässt sich die Behauptung nachrechnen. □

9.2 Umorientierung

Satz 9.3 *Der orientierte Graph G' gehe aus G durch Umorientieren der Kante e hervor. Bezüglich einer bijektiven Nummerierung (w,γ) von G bzw. G' gelte $\gamma(e) = e_k$.*

Es seien $(\mathcal{Z}, o), (\mathcal{Z}, o')$ orientierte Zellenkomplexe, so dass G der zu $(\mathcal{Z}, o)$ und G' der zu $(\mathcal{Z}, o')$ induzierte orientierte Graph ist. Eine Basis $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_n]\}$ von $H_1(C(\mathcal{Z}))$ sei bezüglich der Orientierung o durch

$$a_i = \sum_{l=1}^{m} v_l(a_i) c_l, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{9.3}$$

und bezüglich der Orientierung o' durch

$$a_i = \sum_{l=1}^{m} v'_l(a_i) c_l, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{9.4}$$

dargestellt. Dabei sei m die Anzahl der Kanten von G bzw. G'. Dann gilt

$$M(\mathcal{B}, \gamma, o) \cdot x = y \quad \Leftrightarrow \quad M\left(\mathcal{B}, \gamma, o'\right) \cdot x = o^{(G',w,\gamma)}_{(G,w,\gamma)}(y)$$

für jedes $y \in Kern\, f_{(G,w,\gamma)}$.

Beweis Zur Abkürzung seien $M := M(\mathcal{B}, \gamma, o)$, $M' := M(\mathcal{B}, \gamma, o')$ und $o := o^{(G',w,\gamma)}_{(G,w,\gamma)}$. Zunächst gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ offenbar

$$v'_l(a_i) = \begin{cases} -v_l(a_i) & : \quad l = k \\ v_l(a_i) & : \quad l \neq k \end{cases}.$$

M-Matrix $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_5}, \gamma, o\right)$:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(5,5)	(5,6)	(6,6)
(1,1)	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,2)	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3)	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,4)	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,5)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,6)	-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,7)	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,8)	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,9)	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,10)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,2)	2	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3)	0	1	1	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,4)	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,5)	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,6)	-2	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,7)	0	-1	0	0	0	1	-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,8)	0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,9)	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,10)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,3)	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,4)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
(3,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(3,6)	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
(3,7)	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(3,8)	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
(3,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
(3,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2	2	0	2	0	0	2
(4,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	1	1	0	1	0
(4,6)	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
(4,7)	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
(4,8)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	1	-1	0	1	0	0	1	0
(4,8)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2
(4,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0
(5,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	0
(5,6)	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0
(5,7)	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
(5,8)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	2	0	0
(5,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
(5,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0
(6,6)	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
(6,7)	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
(6,8)	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2	0	0
(6,9)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
(6,10)	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(7,7)	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
(7,8)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0
(7,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2
(7,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(8,8)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	2	0	0
(8,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0
(8,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
(9,9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
(9,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
(10,10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0

Daraus folgt sofort

$$M_{(s,t),(i,j)} = \begin{cases} M'_{(s,t),(i,j)} & : \ (s \neq k \ \wedge \ t \neq k) \ \vee \ (s = t = k) \qquad (9.5) \\ -M'_{(s,t),(i,j)} & : \ (s = k \ \vee \ t = k) \ \wedge \ s \neq t \qquad (9.6) \end{cases}$$

für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ und $(s,t) \in Sym(m)$. In (9.5) gilt $o(y)_{(s,t)} = \epsilon y_{(s,t)}$ mit $\epsilon = 1$, daher beweist die Gleichung

$$y_{(s,t)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)} x_{(i,j)} = \epsilon \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M'_{(s,t),(i,j)} x_{(i,j)} = \epsilon o(y)_{(s,t)} \qquad (9.7)$$

die Behauptung. Für (9.6) gilt $o(y)_{(s,t)} = \epsilon y_{(s,t)}$ mit $\epsilon = -1$ und (9.7) liefert die Behauptung. $\square$

Satz 9.4 *Der orientierte Graph G' mit $k \in \mathbb{N}$ Ecken und $l \in \mathbb{N}$ Kanten gehe aus G durch Umorientieren der Kante e hervor. Bezüglich einer bijektiven Nummerierung (w,γ) von G bzw. G' gelte $\gamma(e) = e_m$.*

Es seien $(\mathcal{Z}, o), (\mathcal{Z}, o')$ orientierte Zellenkomplexe, so dass G der zu $(\mathcal{Z}, o)$ und G' der zu $(\mathcal{Z}, o')$ induzierte orientierte Graph ist.

Darüber hinaus sei $\Gamma : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung, $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ eine reguläre Projektion und D ein Diagramm zu $\mathcal{Z}$. Zu Orientierungen o_D bzw. o'_D von D seien G_D bzw. G'_D die induzierten orientierten Graphen zu D, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(w,\gamma)}"] \arrow[d, "{\left((\pi\Gamma)|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\pi\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}\right)}"'] & (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_G) \\ G_D \arrow[ur, "{(w_D,\gamma_D)}"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{und} \quad \begin{tikzcd} G' \arrow[r, "{(w,\gamma)}"] \arrow[d, "{\left((\pi\Gamma)|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\pi\Gamma)|_{\mathcal{Z}_1}\right)}"'] & (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h_{G'}) \\ G'_D \arrow[ur, "{(w_D,\gamma_D)}"'] & \end{tikzcd}$$

orientierter Graphenisomorphismen kommutieren. Dabei ist (w_D, γ_D) eine bijektive Nummerierung von G_D bzw. G'_D.

Eine Basis $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_n]\}$ von $H_1(C(\mathcal{Z}))$ sei bezüglich der Orientierung o durch (9.3) sowie bezüglich o' durch (9.4) dargestellt. Dann gilt

$$X(\mathcal{B}, \gamma, o) \cdot N^{tr} = g - T(M(\mathcal{B}, \gamma, o), D, \gamma_D, o_D)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X(\mathcal{B}, \gamma, o') \cdot N^{tr} = g - T(M(\mathcal{B}, \gamma, o'), D, \gamma_D, o'_D)$$

für $N \in M(\{1, \ldots, l\}, \mathbb{Z})$ und $g \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$.

Beweis Zur Abkürzung seien $X := X(\mathcal{B}, \gamma, o), M := M(\mathcal{B}, \gamma, o), T := (M, D, \gamma_D, o_D)$ sowie $X' := X(\mathcal{B}, \gamma, o'), M' := M(\mathcal{B}, \gamma, o'), T' := (M', D, \gamma_D, o'_D)$. Sei $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$.

⇒:

$$\begin{aligned}\left(X'N^{tr}\right)_{(i,j)} &= \sum_{r=1}^{l} X'_{(i,j),r}N_r \overset{(9.5)}{=} \sum_{r=1}^{l} X_{(i,j),r}N_r \overset{\text{Vor.}}{=} g_{(i,j)} - \sum_{(s,t)\in M(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)}w_{s,t}^{D,o_D} \\ &\overset{(9.5),(9.6)}{=} g_{(i,j)} - \left(\sum_{(s,t)\text{ aus }(9.5)} M'_{(s,t),(i,j)}w_{s,t}^{D,o'_D} + \sum_{(s,t)\text{ aus }(9.6)} -M'_{(s,t),(i,j)}\cdot\left(-w_{s,t}^{D,o'_D}\right)\right) \\ &= g_{(i,j)} - T'_{(i,j)}.\end{aligned}$$

⇐: Analog zu ⇒. □

Bemerkung Sind zwei äquivalente kantennummerierte Diagramme (D, γ_D) und $(D', \gamma_{D'})$ vorgelegt, so gibt es Eckennummerierungen w_D, $w_{D'}$ und Orientierungen o_D und $o_{D'}$ von D bzw. D', so dass (D, γ_D, o_D) und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ orientiert nummeriert äquivalent sind und dieselben Verschlingungsinvarianten besitzen. Handelt es sich um Diagramme von $\mathcal{K}_{3,3}$, so sind nach Satz 8.8(c) die Flächen $F := F(D, \gamma_D, N)$ und $F' := F(D', \gamma_{D'}, N')$ isotop. Nach Satz 9.4 hängen die Verdrillungen nicht von den Orientierungen o_D und $o_{D'}$ ab. Daher sind F und F' bezüglich beliebiger Orientierungen isotop.

Sind beispielsweise die Randverkettungen der mittels Satz 8.8(b) und beliebig gewählten Orientierungen von D und D' konstruierten Flächen F und F' nicht äquivalent, so sind die zugrundeliegenden Diagramme (D, γ_D) und $(D', \gamma_{D'})$ nicht nummeriert äquivalent. □

9.3 Umnummerierung

Satz 9.5 *Es sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein sowohl mittels (w, γ) als auch (w', γ') bijektiv nummerierter orientierter Zellenkomplex und $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_m]\}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}))$, wobei die Repräsentanten $a_i = \sum_{l=1}^{|\mathcal{Z}_1|} v_l(a_i)c_l, i \in \{1, \ldots, m\}$ bezüglich γ dargestellt seien. Die Abbildung $\Phi := \gamma' \circ \gamma^{-1}$ sei wie in 2.23 auf Seite 41 gegeben durch $\Psi : \{1, \ldots, |\mathcal{Z}_1|\} \to \{1, \ldots, |\mathcal{Z}_1|\}$. Für die Permutationsmatrix $P(S(\Psi))$ aus Satz 2.29 auf Seite 46 gilt dann*

$$P(S(\Psi)) \cdot M\left(\mathcal{B}, \gamma', o\right) = M(\mathcal{B}, \gamma, o).$$

Beweis Es wird $P := P(S(\Psi))$, $M := M(\mathcal{B}, \gamma, o)$ und $M' := M(\mathcal{B}, \gamma', o)$ notiert. In der Darstellung $a_i = \sum_{l=1}^{|\mathcal{Z}_1|} v_l(a_i)c_l$ entspricht c_l der Kante $\gamma^{-1}(e_l)$. Bezüglich γ' entspricht c_l der Kante $\gamma'^{-1}(\Phi(e_l))$. Daher ist der Wert von $v_{\Psi(l)}(a_i)$ bezüglich γ' gleich dem Wert von $v_l(a_i)$ bezüglich γ. Also gilt $M'_{\rho(\Psi(s),\Psi(t)),(i,j)} = M_{(s,t),(i,j)}$ für $(s,t) \in Sym(|\mathcal{Z}_1|)$ und $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$. Somit berechnet man

$$\left(P \cdot M'\right)_{(s,t),(i,j)} = \sum_{(p,q)\in Sym(|\mathcal{Z}_1|)} P_{(s,t),(p,q)} \cdot M'_{(p,q),(i,j)} \overset{\text{S.17}}{=} M'_{\rho(\Psi(s),\Psi(t)),(i,j)} = M_{(s,t),(i,j)}.$$

□

9.4 Basiswechsel

Satz 9.6 *Vorgelegt sei ein mittels (w, γ) bijektiv nummerierter Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ mit m Kanten. Es sei sowohl $\mathcal{B} := \{[b_1], \ldots, [b_n]\}$ als auch $\mathcal{D} := \{[d_1], \ldots, [d_n]\}$ eine Basis für $H_1(C(\mathcal{Z}))$ dargestellt wie in (8.2) auf Seite 246. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelte $[b_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}[d_i]$ mit $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Zu einem Element $x \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ wird $x' \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ definiert durch*

$$x'_{(s,t)} := \begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} (\lambda_{s,i}\lambda_{t,j} + \lambda_{t,i}\lambda_{s,j})\, x_{(i,j)} & : \quad s < t \\ \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} \lambda_{s,i}\lambda_{s,j} x_{(i,j)} & : \quad s = t \end{cases}.$$

Dann gilt $M(\mathcal{B}, \gamma, o) \cdot x = M(\mathcal{D}, \gamma, o) \cdot x'$.

Beweis Für die Repräsentanten seien die Darstellungen $b_j = \sum_{l=1}^{m} v_l(b_j)c_l$ und $d_j = \sum_{l=1}^{m} v_l(d_j)c_l$ vorgelegt. Daraus ergibt sich nach Voraussetzung $v_l(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} v_l(d_i)$ für jedes $l \in \{1, \ldots, m\}$. Man errechnet

$$\begin{aligned}
&[M(\mathcal{B}, \gamma, o) \cdot x]_{(\sigma,\tau)} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M(\mathcal{B}, \gamma, o)_{(\sigma,\tau),(i,j)}\, x_{(i,j)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} [v_\sigma(b_i)v_\tau(b_j) + v_\tau(b_i)v_\sigma(b_j)]\, x_{(i,j)} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} \left[\left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,i} v_\sigma(d_s)\right)\left(\sum_{t=1}^{n} \lambda_{t,j} v_\tau(d_t)\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,i} v_\tau(d_s)\right)\left(\sum_{t=1}^{n} \lambda_{t,j} v_\sigma(d_t)\right)\right] x_{(i,j)} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \lambda_{s,i}\lambda_{t,j} v_\sigma(d_s)v_\tau(d_t) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \lambda_{s,i}\lambda_{t,j} v_\tau(d_s)v_\sigma(d_t)\right) x_{(i,j)} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} \left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} (\lambda_{s,i}\lambda_{t,j})\,(v_\sigma(d_s)v_\tau(d_t) + v_\tau(d_s)v_\sigma(d_t))\right] x_{(i,j)} \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \left(\underbrace{[v_\sigma(d_s)v_\tau(d_t) + v_\tau(d_s)v_\sigma(d_t)]}_{=:w_{s,t}=w_{t,s}} \cdot \underbrace{\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} \lambda_{s,i}\lambda_{t,j} x_{(i,j)}}_{=:z_{s,t}}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n} w_{s,t}z_{s,t} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{s-1} w_{s,t}z_{s,t} \quad = \quad \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n} w_{s,t}z_{s,t} + \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{t-1} w_{t,s}z_{t,s} \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n} w_{s,t}z_{s,t} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s+1}^{n} w_{s,t}z_{t,s} \quad = \quad \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{t=s}^{n} w_{s,t}z_{s,t} + \sum_{t=s+1}^{n} w_{s,t}z_{t,s}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\left(w_{s,s}z_{s,s} + \sum_{t=s+1}^{n} w_{s,t}\,(z_{s,t} + z_{t,s})\right) \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} w_{s,s}x'_{s,s} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s+1}^{n} w_{s,t}x'_{(s,t)} \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n} w_{s,t}x'_{(s,t)} \quad = \quad \sum_{(s,t)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} w_{s,t}x'_{(s,t)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(s,t)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M(\mathcal{D},\gamma,o)_{(\sigma,\tau),(s,t)} \cdot x'_{(s,t)} \quad = \quad \left[M(\mathcal{D},\gamma,o)\cdot x'\right]_{(\sigma,\tau)}.$$

□

9.5 Kontraktionen

Satz 9.7 *Gegeben sei ein orientierter Graph G mit $n+1$ Kanten und eine (p,e,q)-Kontraktion H von G mit $\deg_G(p) = 2$. Die Graphen G und H seien mittels (w_G,γ_G) bzw. (w_H,γ_H) bijektiv nummeriert und $j(e,E_G)$ sei in Generalvoraussetzung 4.10 auf Seite 79 gegeben durch $(\Xi;\xi;n+1)$, so dass $\xi = id_{\{1,\ldots,n\}}$ gilt.*

In dem Diagramm

$$Kern\, f_{(G,w_G,\gamma_G)} \xleftarrow{\kappa_1} Kern\, G_{(G,w_G,\gamma_G)} \xrightarrow{po(p,e,q)} Kern\, G_{(H,w_H,\gamma_H)} \xrightarrow{\kappa_2} Kern\, f_{(H,w_H,\gamma_H)}$$

seien die Gruppen nichttrivial, κ_1, κ_2 die Isomorphismen aus 2.39 auf Seite 56 und $po(p,e,q)$ der Isomorphismus aus 4.29 auf Seite 103. Zu $y \in Kern\, f_{(G,w_G,\gamma_G)}$ sei $y' := \kappa_2 po(p,e,q)\kappa_1^{-1}(y)$.

Darüber hinaus seien $(\mathcal{Z},o)$ und $(\mathcal{Z}',o')$ orientierte homotopieäquivalente Zellenkomplexe, so dass $G(\mathcal{Z}) = G$ und $G(\mathcal{Z}') = H$ gelten. Eine Homotopieäquivalenz h von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{Z}'$ sei auf allen Zellen von $\mathcal{Z}$ außer auf e und p stationär, derart dass $\overline{e}$ zu dem Punkt q zusammengezogen wird.

Zu jedem $i \in \{1,\ldots,m\}$, $m :=Rang\, H_1(C(\mathcal{Z}))$ seien Ketten $a_i \in C_1(\mathcal{Z})$ in der Darstellung $a_i = \sum_{l=1}^{n+1} v_l(a_i)c_l$ wie in (8.2) vorgelegt und $a'_i \in C_1(\mathcal{Z}')$ definiert durch $a'_i := \sum_{l=1}^{n} v_l(a_i)c_l$. Es gelten:

(a) Genau dann ist $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}} := \{[a_1],\ldots,[a_m]\}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}))$, wenn $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'} := \{[a'_1],\ldots,[a'_m]\}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}'))$ ist.

(b) $M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}},\gamma_G,o)\cdot x = y \;\Leftrightarrow\; M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'},\gamma_H,o')\cdot x = y'$.

Beweis **Zu (a):** Da h auf $\mathcal{Z}_1 \setminus \{e\}$ stationär ist, gilt $H_1(h)([a_i]) = [a'_i]$.

Zu (b): Zur Abkürzung seien $M := M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}},\gamma_G,o)$, $M' := M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'},\gamma_H,o')$ sowie $IE(X) := IE(X,w_X,\gamma_X)$ für $X \in \{G,H\}$. Zunächst sei bemerkt, dass $\mathcal{B}(\mathcal{Z}) = \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$ und $Sym(n) \subset Sym(n+1)$ gilt. Es sei $f \neq e$ inzident zu p, $\gamma_G(f) =: e_z$ und $w_G(p) =: v_b$. Nach Definition von a'_i gilt $v_l(a_i) = v_l(a'_i) \Leftrightarrow l \in \{1,\ldots,n\}$. Damit gilt $M_{(s,t),(i,j)} = M'_{(s,t),(i,j)}$ für $(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ und $(s,t) \in Sym(n)$. Aus $v_{n+1}(a_i) = -I(G)_{b,n+1}I(G)_{b,z}v_z(a_i)$ erhält man $M_{(s,n+1),(i,j)} = -I(G)_{b,n+1}I(G)_{b,z}M'_{\rho(s,z),(i,j)}$ für $(s,n+1) \in Sym(n+1)$.

Nun wird $y_{(s,t)} = y'_{(s,t)}$ für $(s,t) \in Sym(n)$ nachgewiesen. Nach 4.21.1. auf Seite 94 gilt $IE(H) \subset IE(G)$. Falls $(s,t) \in IE(G) \setminus IE(H)$ gilt, haben die Kanten $\alpha := \gamma_G^{-1}(e_s) = \gamma_H^{-1}(e_s)$ und $\beta := \gamma_G^{-1}(e_t) = \gamma_H^{-1}(e_t)$ in H eine gemeinsame Ecke v, in G jedoch nicht. Daher gilt $v = q$ und o.B.d.A. $\alpha = f$, also $z = s$. Es folgt $(s,t) \in IE(G)$ und $(n+1,t) \notin IE(G)$. Somit ergibt sich $y_{(s,t)} = 0$ nach 4.27.2. auf Seite 100. Insgesamt erhält man

$$y_{(s,t)} = \begin{cases} 0 & : \ (s,t) \notin IE(G) \\ y_{(s,t)} & : \ (s,t) \in IE(G) \end{cases} = \begin{cases} 0 & : \ (s,t) \notin IE(G) \\ 0 & : \ (s,t) \in IE(G) \setminus IE(H) \\ y_{(s,t)} & : \ (s,t) \in IE(H) \end{cases}.$$

Für y' errechnet man

$$\begin{aligned} y'_{(s,t)} &= \kappa_2\left(po\left(\kappa_1^{-1}(y)\right)\right)_{(s,t)} \overset{\xi\,=\,id}{=} \begin{cases} 0 & : \ (s,t) \notin IE(H) \\ \kappa_1^{-1}(y)_{(s,t)} & : \ (s,t) \in IE(H) \subset IE(G) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & : \ (s,t) \notin IE(H) \\ y_{(s,t)} & : \ (s,t) \in IE(H) \end{cases}. \end{aligned}$$

Dies zeigt $y_{(s,t)} = y'_{(s,t)}$ für jedes $(s,t) \in Sym(n)$. Die daraus resultierende Gleichung

$$y_{(s,t)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M_{(s,t),(i,j)} \cdot x_{(i,j)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z}')} M'_{(s,t),(i,j)} \cdot x_{(i,j)} = y'_{(s,t)}$$

beweist die behauptete Äquivalenz für $(s,t) \in Sym(n)$. Zu zeigen bleibt $\Leftarrow$ für $(s,n+1) \in Sym(n+1)$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} [Mx]_{(s,n+1)} &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})} M_{(s,n+1),(i,j)} x_{(i,j)} = -I(G)_{b,n+1} I(G)_{b,z} \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{Z}')} M'_{\rho(s,z),(i,j)} x_{(i,j)} \\ &= -I(G)_{b,n+1} I(G)_{b,z} y'_{\rho(s,z)} \\ &= \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & : & \rho(s,z) \notin IE(H) \\ -I(G)_{b,n+1} I(G)_{b,z} y_{\rho(s,z)} & : & \rho(s,z) \in IE(H) \end{array} \right\} =: (*). \end{aligned}$$

In der folgenden Fallunterscheidung wird der Ausdruck $(*)$ berechnet:

1. Fall: $(s,n+1) \in IE(G)$ und $\rho(s,z) \in IE(H)$. Satz 4.27.1. auf Seite 100 liefert $y_{(s,n+1)} = -I(G)_{b,n+1} I(G)_{b,z} y_{\rho(s,z)} = (*)$.

2. Fall: $(s,n+1) \notin IE(G)$ und $\rho(s,z) \in IE(H)$. 4.27.2. liefert $(*) = y_{(s,n+1)} = 0 = y_{\rho(s,z)}$.

3. Fall: $(s,n+1) \notin IE(G)$ und $\rho(s,z) \notin IE(H)$. Es folgt sofort $y_{(s,n+1)} = 0 = (*)$.

4. Fall: $(s,n+1) \in IE(G)$ und $\rho(s,z) \notin IE(H)$. Ist $\rho(s,z) \in IE(G) \setminus IE(H)$ schließt man wie im ersten Fall. Ansonsten gilt $y_{(s,n+1)} = 0 = (*)$ nach 4.27.3. □

Satz 9.8 *Sei $X \in \{K_{3,3}, K_5, Z_2\}$, $T := (V, E, g) \in sub(X)$ orientiert, (w, γ) eine bijektive Nummerierung und t ein erzeugendes Element von Kern $G_{(T,w,\gamma)}$ gemäß 6.9 auf Seite 186. Sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein orientierter Zellenkomplex, so dass $G(\mathcal{Z}) = T$ gilt und $\mathcal{B}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}))$ dargestellt wie in (8.2) auf Seite 246. Dann gibt es ein $x \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$ mit $M(\mathcal{B}, \gamma, o)\, x = \kappa(t)$. Dabei ist κ der Isomorphismus aus 2.39 auf Seite 56.*

Beweis Es seien T', T'' und (w'', γ'') wie in 6.9 auf Seite 186 definiert. Es gilt also $E_{T''} = E' \subset E = E_T$. Eine weitere bijektive Nummerierung $(\bar{w}, \bar{\gamma})$ von T sei so vorgelegt, dass $\bar{\gamma}(e) = \gamma''(e)$ für jedes $e \in E'$ und $\bar{w}(v) = w(v)$ für jedes $v \in V'$ gilt. Man erhält ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\langle \kappa(t'') \rangle = \text{Kern}\, f_{(T'',w'',\gamma'')} \arrow[r, "2.32{,}S.49"] & \text{Kern}\, f_{(T',w'',\gamma'')} = \langle t' \rangle \arrow[dl, "4.29{,}S.103/2.39{,}S.56"'] \arrow[d, "\text{aus 6.9, S.186}"] \\
\text{Kern}\, f_{(T,\bar{w},\bar{\gamma})} = \langle \bar{t} \rangle \arrow[r, "2.29{,}S.46"'] & \text{Kern}\, f_{(T,w,\gamma)} = \langle \kappa(t) \rangle
\end{tikzcd},$$

in dem alle Abbildungen Isomorphismen sind und die erzeugenden Elemente jeweils aufeinander abgebildet werden.

Sei nun $(\mathcal{Z}', o')$ ein orientierter Zellenkomplex, so dass $G(\mathcal{Z}') = T'$ gilt, $\mathcal{Z}'$ durch Zusammenziehen der an der Kontraktion beteiligten eindimensionalen Zellen homotopieäquivalent zu $\mathcal{Z}$ ist, und o' durch o induziert wird. Eine Orientierung o'' von $\mathcal{Z}'$ sei so gewählt, dass T'' der zu $(\mathcal{Z}', o'')$ induzierte orientierte Graph ist. Außerdem sei eine Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'}$ von $H_1(C(\mathcal{Z}'))$ in der Darstellung (8.2) vorgelegt. Nach 8.7 auf Seite 257, 9.1 auf Seite 271 bzw. 9.2 auf Seite 272 gibt es ein Element $x \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}'), \mathbb{Z})$ mit $M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'}, \gamma'', o'')\, x = \kappa(t'')$. Satz 9.3 auf Seite 272 liefert $M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'}, \gamma'', o')\, x = t'$ und eine mehrmalige Anwendung von Satz 9.7 auf Seite 277 liefert dann $M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}, \bar{\gamma}, o)\, x = \bar{t}$. Dabei ergibt sich die Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ schrittweise aus $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}'}$ wie in Satz 9.7. Aus einer Umnummerierung hin zu $(\overline{w}, \overline{\gamma})$ erhält man die Gleichung $M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}, \gamma, o)\, x = P(S(\Psi))\, M(\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}, \bar{\gamma}, o)\, x = \kappa(t)$ nach Satz 9.5 auf Seite 275. Satz 9.6 auf Seite 276 liefert dann die Behauptung $M(\mathcal{B}, \gamma, o)\, x' = \kappa(t)$ für die ursprüngliche Basis $\mathcal{B}$ aus der Voraussetzung. $\square$

9.6 Der Verschlingungsmodul als Bild der M-Matrix

Der Beweis des nächsten Satzes erzwingt die folgende Vorbemerkung. Gegeben sei ein Zellenkomplex $\mathcal{Z}$ und ein Teilkomplex $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$. Eine Basis von $H_1(\mathcal{Y})$ lässt sich wie folgt zu einer Basis von $H_1(\mathcal{Z})$ ergänzen: Vermöge einer Homotopieäquivalenz h kann $\mathcal{Z}$ zu einem topologischen Bouqet $B_\mathcal{Z}$ zusammengezogen werden. Dies enthält ein topologisches Bouqet $B_\mathcal{Y}$ als Teilkomplex, der von der Einschränkung von h auf $\mathcal{Y}$ stammt. Die Schlaufen von $B_\mathcal{Z}$, die nicht zu $B_\mathcal{Y}$ gehören liefern eine Basisergänzung von $H_1(B_\mathcal{Y}) \cong H_1(\mathcal{Y})$ nach $H_1(B_\mathcal{Z}) \cong H_1(\mathcal{Z})$.

Satz 9.9 *Sei $(\mathcal{Z}, o)$ ein mittels (w, γ) bijektiv nummerierter orientierter Zellenkomplex, $\mathcal{B} := \{[a_1], \ldots, [a_n]\}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Z}))$ und y ein Element von Kern $f_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}$. Zusätzlich sei $G(\mathcal{Z})$ 3-zusammenhängend und einfach. Dann gibt es ein $x \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z})$, so dass $M(\mathcal{B}, \gamma, o) \cdot x = y$ gilt.*

Beweis Nach Satz 7.5 auf Seite 195 gibt es eine Basis $\{y_1, \ldots, y_p\}$ von Kern $f_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}$, so dass jedes Element y_i durch einen Teilgraphen $T_i \in sub(K_{3,3}) \cup sub(K_5) \cup sub(Z_2)$ von $G(\mathcal{Z})$ induziert wird. Für jedes $i \in \{1, \ldots, p\}$ sei dazu (w_i, γ_i) eine bijektive Nummerierung von T_i, t_i ein Erzeugendes von Kern $f_{(T_i,w_i,\gamma_i)}$ und $\Phi_i : \mathcal{E}_{|E_{T_i}|} \to \mathcal{E}_{|E_{G(\mathcal{Z})}|}$, $\Phi_i(x) := \gamma\left(\gamma_i^{-1}(x)\right)$ gegeben durch $\Psi_i : \{1, \ldots, |E_{T_i}|\} \to \left\{1, \ldots, \left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right\}$, so dass $(\Psi_i)_* :$ Kern $f_{(T_i,w_i,\gamma_i)} \to$ Kern $f_{(G(\mathcal{Z}),w,\gamma)}$ das Erzeugende t_i auf y_i abbildet. Betrachte nun eine weitere Kantennummerierung $\gamma_i' : E_{G(\mathcal{Z})} \to \mathcal{E}_{|E_{G(\mathcal{Z})}|}$, für die $\gamma_i'(e) = \gamma_i(e)$ für jede Kante e von T_i gilt. Die Abbildung $\Phi_i' := \gamma_i' \circ \gamma^{-1}$ sei gegeben durch $\Psi_i' : \left\{1, \ldots, \left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right\} \to \left\{1, \ldots, \left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right\}$. Dann gilt $\Psi_i'(\Psi_i(s)) = s$ für jedes $s \in \{1, \ldots, |E_{T_i}|\}$. Somit berechnet man für $(p, q) \in Sym\left(\left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right)$:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\left(\Psi_i'\right)^*\right)^{-1}\left(\left(\Psi_i\right)_*(x)\right)\right]_{(p,q)} &= \left[\left(\Psi_i\right)_*(x)\right]_{\rho\left(\Psi_i'^{-1}(p), \Psi_i'^{-1}(q)\right)} \\
&= \begin{cases} x_{(p,q)} & : \ \left(\Psi_i'\right)^{-1}(p) \in \operatorname{Bild} \Psi_i \ \wedge \ \left(\Psi_i'\right)^{-1}(q) \in \operatorname{Bild} \Psi_i \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_{(p,q)} & : \ p \in \operatorname{Bild}\left(\Psi_i' \circ \Psi_i\right) \ \wedge \ q \in \operatorname{Bild}\left(\Psi_i' \circ \Psi_i\right) \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \\
&= \left[\left(id_i\right)_*(x)\right]_{(p,q)}
\end{aligned}$$

mit $id_i : \{1, \ldots, |E_{T_i}|\} \to \left\{1, \ldots, \left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right\}$, $s \mapsto id_i(s) := s$.

Zu jedem T_i gibt es einen orientierten Teilkomplex $(\mathcal{Y}_i, o_i)$ von $(\mathcal{Z}, o)$, so dass $T_i = G(\mathcal{Y}_i)$ gilt. Sei $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}_i}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{Y}_i))$ und $x_i \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{Y}_i), \mathbb{Z})$ gemäß Satz 9.8

auf Seite 279 mit $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}_i}, \gamma_i, o_i\right) x_i = t_i$. Nun lässt sich $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}_i}$ zu einer Basis $\mathcal{B}_i$ von $H_1\left(C\left(\mathcal{Z}\right)\right)$ ergänzen, so dass $\mathcal{B}\left(\mathcal{Y}_i\right) \subset \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ erfüllt ist. Man definiert $x_i' \in M^{tr}\left(\mathcal{B}(\mathcal{Z}), \mathbb{Z}\right)$ durch

$$\left(x_i'\right)_{(s,t)} := \begin{cases} \left(x_i\right)_{(s,t)} & : \quad (s,t) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{Y}_i\right) \\ 0 & : \quad (s,t) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \setminus \mathcal{B}\left(\mathcal{Y}_i\right) \end{cases}.$$

Da o_i von o induziert wird und $\gamma_i'(e) = \gamma_i(e)$ für $e \in E_{G(\mathcal{Y}_i)}$ gilt, ist $M\left(\mathcal{B}_i, \gamma_i', o\right)_{(s,t),(p,q)} = M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}_i}, \gamma_i, o_i\right)_{(s,t),(p,q)}$ für $(s,t) \in Sym\left(\left|E_{G(\mathcal{Z})}\right|\right)$ und $(p,q) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{Y}_i\right)$ erfüllt. Man errechnet

$$\begin{aligned} \left[M\left(\mathcal{B}_i, \gamma_i', o\right) \cdot x_i'\right]_{(s,t)} &= \sum_{(p,q) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})} M\left(\mathcal{B}_i, \gamma_i', o\right)_{(s,t),(p,q)} \cdot \left(x_i'\right)_{(p,q)} \\ &= \sum_{(p,q) \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}_i)} M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}_i}, \gamma_i, o_i\right)_{(s,t),(p,q)} \cdot \left(x_i\right)_{(p,q)} \\ &= \left\{ \begin{array}{rcl} \left(t_i\right)_{(s,t)} & : & (s,t) \in Sym\left(\left|E_{G(\mathcal{Y}_i)}\right|\right) \\ 0 & : & (s,t) \notin Sym\left(\left|E_{G(\mathcal{Y}_i)}\right|\right) \end{array} \right\} = \left[\left(id_i\right)_* \left(t_i\right)\right]_{(s,t)}. \end{aligned}$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ beweist die Gleichung

$$\begin{aligned} y_i &= \left(\Psi_i\right)_* \left(t_i\right) = \left(\Psi_i'\right)^* \left(id_i\right)_* \left(t_i\right) = \left(\Psi_i'\right)^* \left(M\left(\mathcal{B}_i, \gamma_i', o\right) x_i'\right) \\ &\overset{9.5,\ \underline{S.275}}{=} M\left(\mathcal{B}_i, \gamma, o\right) x_i' \overset{9.6,\ \underline{S.276}}{=} M\left(\mathcal{B}, \gamma, o\right) \cdot \left(x_i'\right)' \end{aligned}$$

die Behauptung. □

Kapitel 10

Bandflächen für Möbiusleitern

Der Graph $K_{3,3}$ ist eine Möbiusleiter mit drei Sprossen. Nun soll ein Resultat wie in Satz 8.8 auf Seite 257 für eine Möbiusleiter mit endlich vielen Sprossen erzielt werden. Dazu beschäftigt sich der Satz 10.1 ab Seite 283 mit der Möbiusleiter als abstrakten Graphen und Satz 10.2 ab Seite 292 mit deren Diagrammen. Wie bei $K_{3,3}$ wird in 10.1 die X-Matrix durch Streichen gewisser Zeilen quadratisch gemacht, so dass die Streichungsmatrix invertierbar über $\mathbb{Z}$ ist. Dabei benutzt man den Algorithmus aus Kapitel 7 zur Bestimmung einer Basis des Verschlingungsmoduls einer Möbiusleiter.

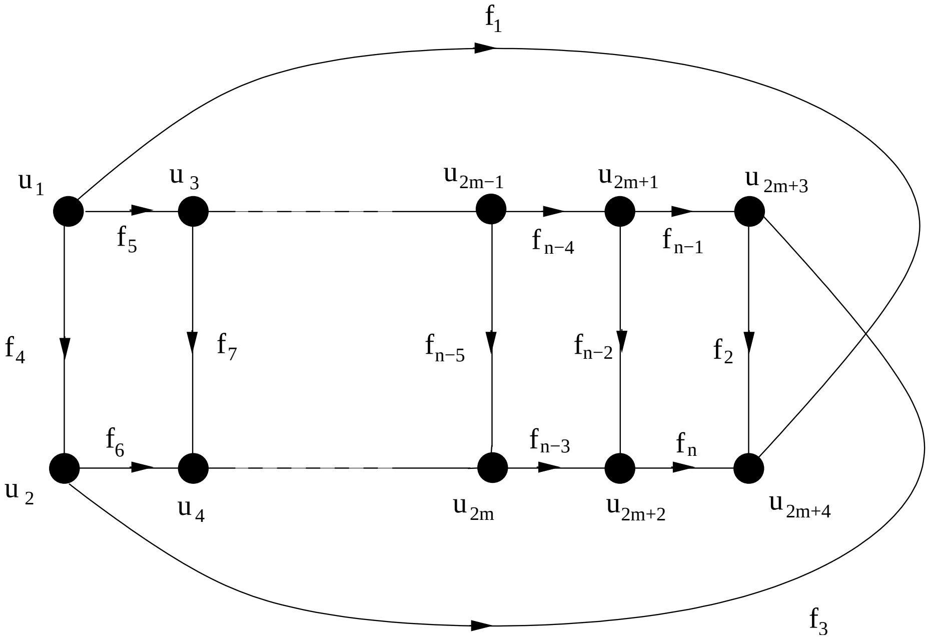
Satz 10.2 verallgemeinert die Methode aus Satz 8.8. Die Darstellungsmatrix der GL-Form einer Bandfläche enthält einige „feste" Zahlen, die zu den Verschlingungsinvarianten des Graphen gehören.

Um die Notation zu verkürzen, wird im folgenden ein orientierter abstrakter Graph $G(\mathcal{Z})$ zu einem orientierten Zellenkomplex $(\mathcal{Z}, o)$ mit dem Zellenkomplex selbst identifiziert. Dabei wird für die Orientierung o die Orientierung des Graphen benutzt. Ein gegebener Graph $G = (V, E, g)$ soll also zugleich für $G(\mathcal{Z})$ und für $\mathcal{Z}$ stehen, so dass z.B. für die Homologie $H_1(G) = H_1(\mathcal{Z})$ und für die M-Matrix $M(\mathcal{B}, \gamma, o) = M(\mathcal{B}, \gamma, g)$ wohldefiniert ist. Wenn es aus dem Zusammenhang klar ist, welche Kantennummerierung und welche Orientierung benutzt wird, wird auch $M(\mathcal{B})$ anstatt $M(\mathcal{B}, \gamma, o)$ geschrieben.

Sämtliche Graphen G seien mittels (w_G, γ_G) bijektiv nummeriert.

10.1 Möbiusleitern als abstrakte Graphen

Satz 10.1 *Vorgelegt sei eine Möbiusleiter* $\mathcal{M}_{m+2} =: G = (V_G, E_G, g_G)$, $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m+2$ *Sprossen, Kantenmenge* $f_1, \ldots, f_n$ *und Eckenmenge* $u_1, \ldots, u_{2m+4}$. *Es gilt dann* $n = 3m+6$. *Die folgende Abbildung illustriert, wie die Inzidenzabbildung* g_G *gewählt wird.*

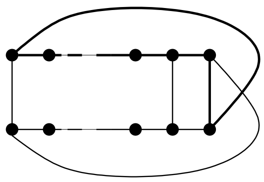


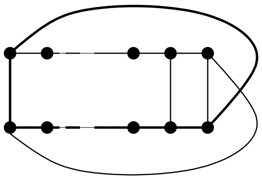
Sei $k \in \{0, \ldots, m\}$. *Es seien* $J_k := G - \bigcup_{i=k}^{m-1} \{f_{3i+7}\} < G$ *und* $W_k < G$ *der aus der Kante* f_{3k+4} *bestehende Graph. Für* $k \leq m-1$ *entstehe der Graph* $\mathcal{J}_k$ *aus* J_k *durch Kontraktion der Kanten* f_{3j+8} *und* f_{3j+9} *für jedes* $j \in \{k, \ldots, m-1\}$ *an den Ecken* $V_2(J_k)$. *Ist* $k = m$ *so definert man* $\mathcal{J}_m := J_m = G$. *Für jedes* $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ *sei* $G_i := \mathcal{J}_k - \bigcup_{j=i}^{k-1} \{f_{3j+7}\} < \mathcal{J}_k$. *Dazu siehe die Abbildungen auf Seite 285.*

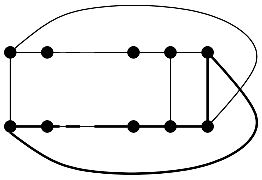
Mit diesen Festlegungen gelten die folgenden Aussagen für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$:

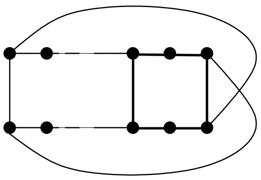
(a) $G_0 < G_1 < \cdots < G_{k-1} < \mathcal{J}_k$ *ist eine Kette, so dass* $\mathcal{J}_k - \{f_{3k+4}\} = G_{k-1}$ *gilt und* $G_i \cup W_k$ *für jedes* $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ *sowohl topologisch 3-zusammenhängend als auch topologisch einfach ist. Dabei sind die Ecken von* W_k *Ecken von* G_0.

(b) Wie folgt seien Elemente aus $C_1(\mathcal{J}_k)$ *mithilfe von Kanten gegeben:*

$a_1 =$  *durch* $K(a_1) := \{f_1, f_2, f_{3i+5} \mid i \in \{0, \ldots, k\}\}$,

$a_2 =$  *durch* $K(a_2) := \{f_1, f_4, f_{3i+6} \mid i \in \{0, \ldots, k\}\}$,

$a_3 =$  *durch* $K(a_3) := \{f_2, f_3, f_{3i+6} \mid i \in \{0, \ldots, k\}\}$,

$a_j =$  *durch* $K(a_j) := \{f_{3j-5}, f_2, f_{3i+6}, f_{3i+5} \mid i \in \{j-3, \ldots, k\}\}$

für $j \in \{4, \ldots, k+3\}$. *Die Koeffizienten dieser Elemente sind gegeben durch:*

$$v_l(a_i) := \begin{cases} 1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) \in K(a_i) \setminus \{f_1\} \\ -1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) = f_1 \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases} \qquad \textit{für} \quad i \in \{1, 2\},$$

$$v_l(a_3) := \begin{cases} 1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) \in K(a_3) \setminus \{f_2, f_3\} \\ -1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) \in \{f_2, f_3\} \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases},$$

$$v_l(a_j) := \begin{cases} 1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) \in \{f_{3j-5}, f_{3i+6} \mid i \in \{j-3, \ldots, k\}\} \\ -1 & : \gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_l) \in \{f_2, f_{3i+5} \mid i \in \{j-3, \ldots, k\}\} \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases}$$

für $j \in \{4, \ldots, k+3\}$.

Dann bilden die $a_i := \sum_{j=1}^{3k+6} v_l(a_i) c_l$ *eine Basis* $\mathcal{B}_k := \{[a_1], \ldots, [a_{k+3}]\}$ *von* $H_1(C(\mathcal{J}_k))$.

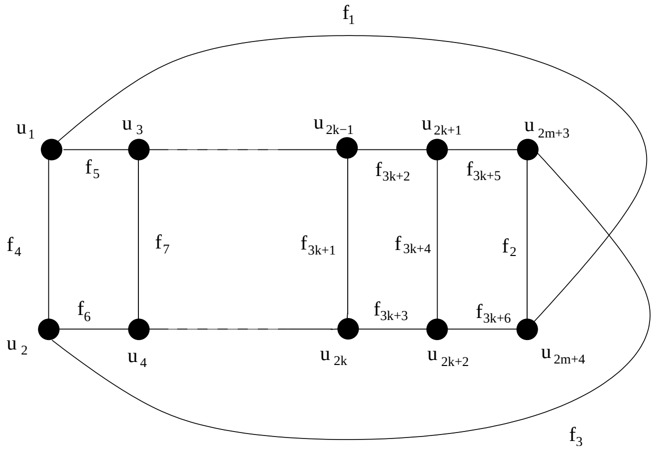
(c) *Es gibt eine Basis* $B_k := \{y_1, \ldots, y_{p_k}\}$ *von Kern* $f_{(\mathcal{J}_k, w_{\mathcal{J}_k}, \gamma_{\mathcal{J}_k})}$ *sowie eine Zuordnung* $\phi_k : B_k \to \mathcal{B}(\mathcal{J}_k)$ *und Elemente* $x_1, \ldots, x_{p_k} \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{J}_k), \mathbb{Z})$, *so dass für jedes* $s \in \{1, \ldots, p_k\}$ *die folgenden Aussagen gelten:*

1. $M(\mathcal{B}_k, \gamma_{\mathcal{J}_k}, g_{\mathcal{J}_k}) \cdot x_s = y_s$.
2. *Definiert man* $(a,b) <' (c,d)$ *durch* $(b < d) \lor (b = d \land a < c)$, *so gelten:*
   (a) $s < t \Rightarrow \phi_k(y_s) <' \phi_k(y_t)$.
   (b) $(a,b) \in \mathit{Bild}\,\phi_k \land \phi_k(y_s) <' (a,b) \Rightarrow (x_s)_{(a,b)} = 0$.
   (c) $(x_s)_{\phi_k(y_s)} \in \{1, -1\}$.

3. *Die Matrix* $X'(\mathcal{B}_k, \gamma_{\mathcal{J}_k}, g_{\mathcal{J}_k})$, *die aus der X-Matrix* $X(\mathcal{B}_k, \gamma_{\mathcal{J}_k}, g_{\mathcal{J}_k})$ *durch Streichen der Zeilen mit den Indizes* $\phi_k(y_s)$, $s \in \{1, \ldots, p_k\}$ *hervorgeht, ist quadratisch und invertierbar über* $\mathbb{Z}$.

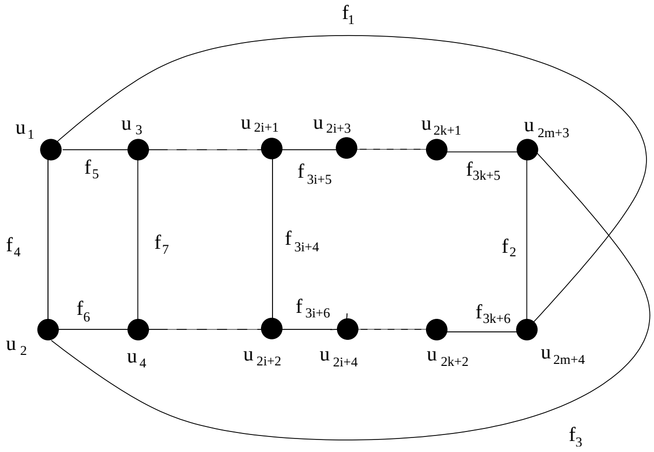
Beweis **Zu (a) und (b):** An den untenstehenden Abbildungen der Graphen $\mathcal{J}_k$ und G_i erkennt man, dass (a) und (b) offenbar erfüllt sind.

$\mathcal{J}_k =$



,

$G_i =$

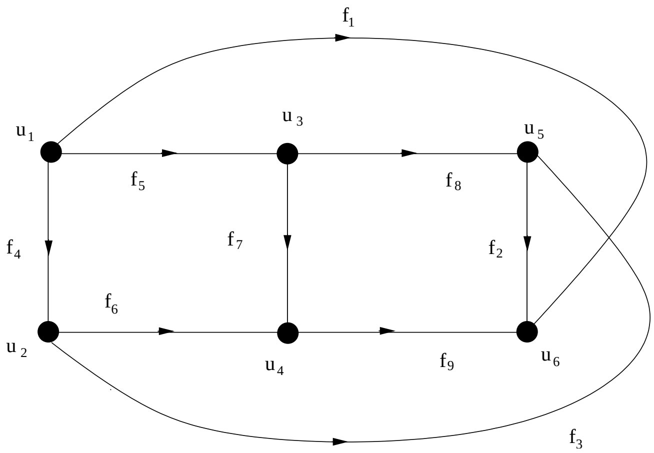


.

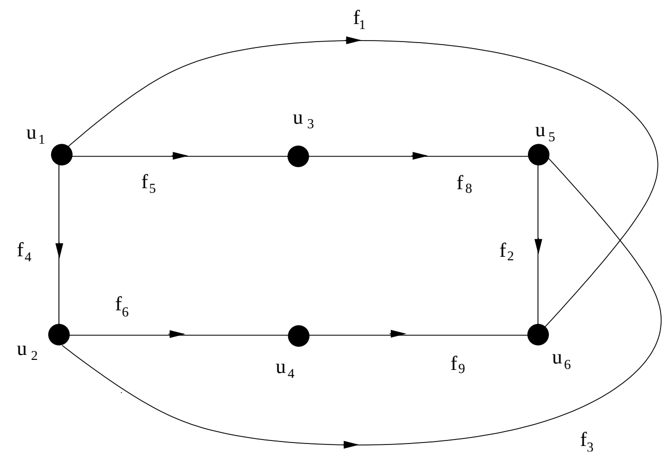
Zu (c): Der Beweis wird induktiv über k geführt.

$\boldsymbol{k = 1}$ **:** Für $\mathcal{J}_1$ und G_0 ergeben sich die Abbildungen

$\mathcal{J}_1 =$



,

$G_0 =$ 

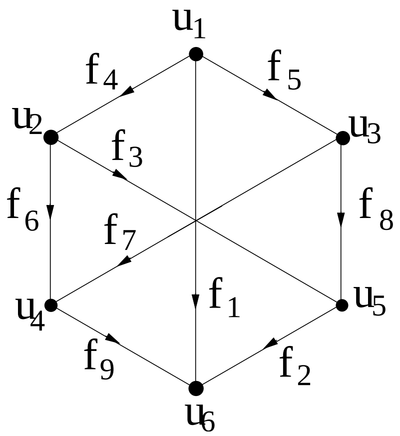
sowie $K(a_1) = \{f_1, f_2, f_5, f_8\}$, $K(a_2) = \{f_1, f_4, f_6, f_9\}$, $K(a_3) = \{f_2, f_3, f_6, f_9\}$ und $K(a_4)$ $= \{f_7, f_8, f_9, f_2\}$. Daran erkennt man, dass (a) und (b) erfüllt sind. Definiert man eine bijektive Nummerierung $w : V_{\mathcal{J}_1} \to \mathcal{V}_6$ und $\gamma : E_{\mathcal{J}_1} \to \mathcal{E}_9$ durch

f_i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
$\gamma(f_i)$	e_7	e_3	e_9	e_6	e_1	e_5	e_8	e_2	e_4

,

u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$w(u_i)$	v_1	v_6	v_2	v_5	v_3	v_4

und $\mathcal{J}_1' := \left(V_{\mathcal{J}_1}, E_{\mathcal{J}_1}, g_{\mathcal{J}_1'}\right)$ als den Graphen, der aus $\mathcal{J}_1$ durch Umorientieren der Kanten $K := \{f_3, f_4, f_6, f_9\}$ hervorgeht, so ergibt sich aus der Abbildung

$\mathcal{J}_1 =$  ,

dass $\mathcal{J}_1'$ wie in Abschnitt 8.4.3 auf Seite 257 nummeriert und orientiert ist. Also gibt es ein erzeugendes Element $\kappa(y) \in \operatorname{Kern} f_{(\mathcal{J}_1', w, \gamma)}$ und $x \in M^{tr}\left(\mathcal{B}\left(\mathcal{J}_1'\right), \mathbb{Z}\right)$ aus 8.7 auf Seite 257, so dass $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, g_{\mathcal{J}_1'}\right) x = \kappa(y)$ gilt. Dabei ist $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}} := \{[b_1], [\ldots, [b_4]\}$ die Basis aus 8.4.3 auf Seite 257. Durch Umorientieren der Kanten aus K erhält man $M\left(\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}, \gamma, g_{\mathcal{J}_1}\right) x = y'$ mit $\langle y' \rangle = \operatorname{Kern} f_{(\mathcal{J}_1, w, \gamma)}$ aus Satz 9.3 auf Seite 272. Bezüglich der Orientierung $g_{\mathcal{J}_1}$ schreibt sich die Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}$ als $b_1 = a_1, b_2 = -a_4, b_3 = -a_3$ und $b_4 = -a_2$. Satz 9.6 auf Seite 276 liefert $M\left(\mathcal{B}_1, \gamma, g_{\mathcal{J}_1}\right) x' = y'$ mit

$$x' = \left(x_{(1,1)}, -x_{(1,4)}, -x_{(1,3)}, -x_{(1,2)}, x_{(4,4)}, x_{(3,4)}, x_{(2,4)}, x_{(3,3)}, x_{(2,3)}, x_{(2,2)}\right)^{tr}. \qquad (10.1)$$

Bezüglich einer beliebigen Nummerierung $(w_{\mathcal{J}_1}, \gamma_{\mathcal{J}_1})$ erhält man $M(\mathcal{B}_1, \gamma_{\mathcal{J}_1}, g_{\mathcal{J}_1})\, x' = y''$ mit $\langle y'' \rangle = \operatorname{Kern} f_{(\mathcal{J}_1, w_{\mathcal{J}_1}, \gamma_{\mathcal{J}_1},)}$ nach Satz 9.5 auf Seite 275. Man definiert $B_1 := \{y''\}$ und somit ist 1. gezeigt. Die Abbildung $\phi_1 : B_1 \to \mathcal{B}(\mathcal{J}_1)$ wird nun festgelegt durch $y'' \mapsto (1,3)$. Für 2.(a) und 2.(b) ist nichts zu zeigen, da B_1 nur ein Element enthält. Die Gestalt von x aus (8.18) auf Seite 257 ergibt die Gleichung $(x')_{\phi_1(y'')} = (x')_{(1,3)} \overset{(10.1)}{=} -x_{(1,3)} \in \{\pm 1\}$, also gilt 2.(c). Um 3. nachzuweisen notiert man zunächst die Matrix $X := X(\mathcal{B}_1, \gamma, g_{\mathcal{J}_1})$ bezüglich der Nummerierung (w, γ):

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
(1,1) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
(1,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
(1,3) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1,4) & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2,2) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
(2,3) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2,4) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(3,3) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(3,4) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(4,4) & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\;.
$$

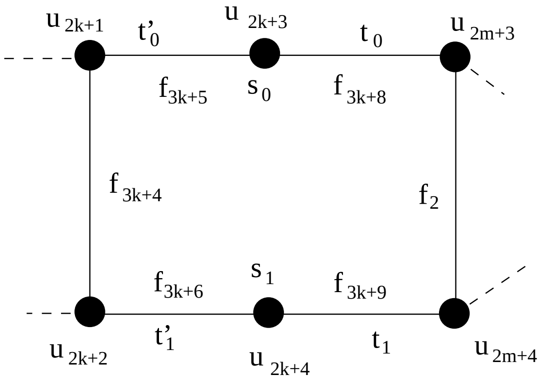
Sei X' die Matrix, die aus X durch Streichen der Zeile zum Index $(1,3)$ hervorgeht. Sie lässt sich durch Zeilenvertauschungen und Multiplizieren gewisser Zeilen mit -1 in die Matrix (8.22) auf Seite 260 überführen. Daher gilt $|\det X'| = 1$. Bezüglich der Nummerierung $(w_{\mathcal{J}_1}, \gamma_{\mathcal{J}_1})$ geht $X(\mathcal{B}_1, \gamma_{\mathcal{J}_1}, g_{\mathcal{J}_1})$ aus X durch Spaltenvertauschungen hervor, denn die X-Matrix ist durch die M-Matrix gegeben. Dass eine Umnummerierung Zeilenvertauschungen in der M-Matrix bewirkt, ist in Satz 9.5 auf Seite 275 bewiesen worden.

$\boldsymbol{k \mapsto k+1 \le m :}$ Wie in (a) sei $\mathcal{J}_{k+1}$ zusammen mit einer Kette $G'_0 < G'_1 < \cdots < G'_k < \mathcal{J}_{k+1}$ vorgelegt. Gemäß (b) sei $\mathcal{B}_{k+1} := \{[a_1], \ldots, [a_{k+4}]\}$ eine Basis von $H_1(C(\mathcal{J}_{k+1}))$.

Für $i \in \{0, \ldots, k\}$ seien die Inklusionshomomorphismen $G'_i \to \mathcal{J}_{k+1}$ und $G''_i := G'_i \cup W_{k+1} \to \mathcal{J}_{k+1}$ in 2.1 auf Seite 27 gegeben durch $(\Delta_i; \delta_i)$ bzw. $(\Lambda_i; \lambda_i)$. Der Graph $\mathcal{J}_k$ ensteht aus G'_k durch Kontraktion der Kanten f_{3k+8} und f_{3k+9} an den Ecken $V_2(G'_k)$.

Bezüglich dieser Kontraktionen erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_{\mathcal{J}_k} \arrow[r, "\text{Inklusion}"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{J}_k}"'] & E_{G'_k} \arrow[d, "\gamma_{G'_k}"] \\ \mathcal{E}_{|E_{\mathcal{J}_k}|} \arrow[r, "\Xi"] & \mathcal{E}_{|E_{G'_k}|} \end{tikzcd}$$



durch $\Xi(e_j) := \gamma_{G'_k}\left(\gamma_{\mathcal{J}_k}^{-1}(e_j)\right) =: e_{\xi(j)}$. Darüber hinaus seien $e_{t_0} := \gamma_{G'_k}(f_{3k+8})$, $e_{t'_0} := \gamma_{G'_k}(f_{3k+5})$, $e_{t_1} := \gamma_{G'_k}(f_{3k+9})$, $e_{t'_1} := \gamma_{G'_k}(f_{3k+6})$, $v_{s_0} := w_{G'_k}(u_{2k+3})$, $v_{s_1} := w_{G'_k}(u_{2k+4})$. Dieses Diagramm liefert einen Isomorphismus

$$\operatorname{Kern} f_{\left(\mathcal{J}_k, w_{\mathcal{J}_k}, \gamma_{\mathcal{J}_k}\right)} \to \operatorname{Kern} f_{\left(G'_k, w_{G'_k}, \gamma_{G'_k}\right)}, \tag{10.2}$$

bei dem y'_i die Bilder der laut Induktionsvoraussetzung vorgelegten Basiselemente y_i, $i \in \{1, \ldots, p_k\}$ seien. Für diese gilt

$$\left(y'_i\right)_{(s,t)} = \begin{cases} (y_i)_{\rho(\xi^{-1}(s),\xi^{-1}(t))} & : \; s \in \operatorname{Bild}\xi \;\wedge\; t \in \operatorname{Bild}\xi \\ -I_{s_0,t'_0} I_{s_0,t_0} \cdot (y_i)_{\rho\left(\xi^{-1}(s),\xi^{-1}(t'_0)\right)} & : \; s \in \operatorname{Bild}\xi \;\wedge\; t = t_0 \\ -I_{s_1,t'_1} I_{s_1,t_1} \cdot (y_i)_{\rho\left(\xi^{-1}(s),\xi^{-1}(t'_1)\right)} & : \; s \in \operatorname{Bild}\xi \;\wedge\; t = t_1 \\ I_{s_1,t'_1} I_{s_1,t_1} I_{s_0,t'_0} I_{s_0,t_0} \cdot (y_i)_{\rho\left(\xi^{-1}(t'_0),\xi^{-1}(t'_1)\right)} & : \; s = t_0 \;\wedge\; t = t_1 \\ 0 & : \; s = t \end{cases}$$

wegen 4.24 auf Seite 96 und 4.27 auf Seite 100. Dabei bezeichnet I die Inzidenzmatrix $I\left(G'_k\right)$.

Mithilfe des Beweises von 7.5 lässt sich eine Basis von $\operatorname{Kern} f_{\left(\mathcal{J}_{k+1}, w_{\mathcal{J}_{k+1}}, \gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}\right)}$ angeben: die Abbildungen $(\Delta_k; \delta_k)$ induzieren einen injektiven Homomorphismus

$$\operatorname{Kern} f_{\left(G'_k, w_{G'_k}, \gamma_{G'_k}\right)} \to \operatorname{Kern} f_{\left(\mathcal{J}_{k+1}, w_{\mathcal{J}_{k+1}}, \gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}\right)}. \tag{10.3}$$

Dabei seien y''_i die Bilder von y'_i, $i \in \{1, \ldots, p_k\}$. Darüber hinaus gibt es Teilgraphen $T_i < G''_i$, $i \in \{0, \ldots, k\}$, die die Kanten f_{3k+7} und f_{3i+4} enthalten, so dass für $i \in \{0, \ldots, k\}$ die Abbildungen

$$\langle t_i \rangle = \operatorname{Kern} f_{\left(T_i, w_{T_i}, \gamma_{T_i}\right)} \to \operatorname{Kern} f_{\left(G''_i, w_{G''_i}, \gamma_{G''_i}\right)} \to \operatorname{Kern} f_{\left(\mathcal{J}_{k+1}, w_{\mathcal{J}_{k+1}}, \gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}\right)},$$

$t_i \mapsto y'_{i+p_k+1} \mapsto y''_{i+p_k+1}$ eine Basis $B_{k+1} := \left\{y''_1, \ldots, y''_{p_k}, y''_{p_k+1}, \ldots, y''_{p_k+1+k}\right\}$ induzieren. Man definert also $p_{k+1} := p_k + 1 + k$.

Die Ketten $a_1, \ldots, a_{i+3}$ induzieren eine Basis $\mathcal{B}_{G'_i}$ von $H_1(C(G'_i))$ für $i \in \{0, \ldots, k\}$, daher gelten für die Indexmengen der jeweiligen Basen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathcal{J}_k) &= \mathcal{B}\left(G'_k\right), \\
\mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1}) &= \mathcal{B}(\mathcal{J}_k) \cup \{(1, k+4), \ldots, (k+4, k+4)\}, \\
\mathcal{B}\left(G'_i\right) &\subset \mathcal{B}\left(G'_k\right) \subset \mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1}).
\end{aligned}$$

Da die Elemente $a_1, \ldots, a_{i+3}, a_{k+4}$ eine Basis $\mathcal{B}_{G''_i}$ für G''_i induzieren, definiert man in diesem Zusammenhang eine weitere Indexmenge

$$\mathcal{B}\left(G''_i\right) := \mathcal{B}\left(G'_i\right) \cup \{(1, k+4), \ldots, (i+3, k+4)\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1}). \tag{10.4}$$

Zusammen mit diesen Bezeichnungen ergeben sich auf Homologieniveau die Inklusionen

$$\mathcal{B}_{G'_i} \subset \mathcal{B}_{k+1} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{G''_i} \subset \mathcal{B}_{k+1} \tag{10.5}$$

für jedes $i \in \{0, \ldots, k\}$, wenn man G'_i und G''_i als Teilkomplexe von $\mathcal{J}_{k+1}$ auffasst.

Nun werden die gesuchten Elemente $x'_1, \ldots, x'_{p_{k+1}} \in M^{tr}(\mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1}), \mathbb{Z})$ definiert:
Für $l \in \{1, \ldots, p_k\}$:

$$\left(x'_l\right)_{(i,j)} := \begin{cases} (x_l)_{(i,j)} & : \ (i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{J}_k) \\ 0 & : \ (i,j) \notin \mathcal{B}(\mathcal{J}_k) \end{cases}.$$

Für $l \in \{p_k + 1, \ldots, p_{k+1}\}$: Sei $l' := l - (p_k + 1) \in \{0, \ldots, k\}$. Da $y'_l \in \operatorname{Kern} f_{\left(G''_{l'}, w_{G''_{l'}} \gamma_{G''_{l'}}\right)}$ gilt, gibt es nach 9.7 auf Seite 277 und 9.9 auf Seite 280 ein Element $x''_l \in M^{tr}\left(\mathcal{B}\left(G''_{l'}\right), \mathbb{Z}\right)$, so dass $M\left(\mathcal{B}_{G''_{l'}}, \gamma_{G''_{l'}}, g_{G''_{l'}}\right) x''_l = y'_l$ gilt. Definiere

$$\left(x'_l\right)_{(i,j)} := \begin{cases} (x''_l)_{(i,j)} & : \ (i,j) \in \mathcal{B}\left(G''_{l'}\right) \\ 0 & : \ (i,j) \notin \mathcal{B}\left(G''_{l'}\right) \end{cases}.$$

Im folgenden wird die gewünschte Zuordnung $\phi_{k+1} : B_{k+1} \to \mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1})$ definiert:

$$\phi_{k+1}\left(y''_l\right) := \begin{cases} \phi_k(y_l) & : \ l \in \{1, \ldots, p_k\} \\ (l - p_k + 2, k+4) & : \ l \in \{p_k + 1, \ldots, p_{k+1}\} \end{cases}.$$

Zu 1.: Sei $s \in \{1, \ldots, p_{k+1}\}$ und $(a,b) \in \mathit{Sym}\left(\left|E_{\mathcal{J}_{k+1}}\right|\right)$. Zu zeigen ist

$$\left(y''_s\right)_{(a,b)} \stackrel{!}{=} \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}(\mathcal{J}_{k+1})} M(\mathcal{B}_{k+1})_{(a,b),(i,j)} \left(x'_s\right)_{(i,j)} =: (*).$$

1. Fall: $s \in \{1, \ldots, p_k\}$.

1. Unterfall: $(a,b) = \rho(\delta_k(t_0), \delta_k(t_1))$. Für $(i,j) \in \mathcal{B}(G'_k)$ gilt:

$$\begin{aligned}
M(\mathcal{B}_{k+1})_{(a,b),(i,j)} &\stackrel{(10.3)/(10.5)}{=} M\left(\mathcal{B}_{G'_k}\right)_{\rho(t_0,t_1),(i,j)} \\
&\stackrel{(10.2)}{=} I_{s_1,t'_1} I_{s_1,t_1} I_{s_0,t'_0} I_{s_0,t_0} M(\mathcal{B}_k)_{\rho\left(\xi^{-1}(t'_0), \xi^{-1}(t'_1)\right),(i,j)}.
\end{aligned}$$

Man berechnet somit

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}\left(G'_k\right)} M\left(\mathcal{B}_{k+1}\right)_{(a,b),(i,j)}\left(x_s\right)_{(i,j)} \\ &= I_{s_1,t'_1}I_{s_1,t_1}I_{s_0,t'_0}I_{s_0,t_0}\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}(\mathcal{J}_k)} M\left(\mathcal{B}_k\right)_{\rho\left(\xi^{-1}(t'_0),\xi^{-1}(t'_1)\right),(i,j)}\left(x_s\right)_{(i,j)} \\ &\overset{\mathrm{IV}}{=} I_{s_1,t'_1}I_{s_1,t_1}I_{s_0,t'_0}I_{s_0,t_0}\left(y_s\right)_{\rho\left(\xi^{-1}(t'_0),\xi^{-1}(t'_1)\right),(i,j)} = \left(y'_s\right)_{\rho(t_0,t_1)} \overset{(10.3)}{=} \left(y''_s\right)_{(a,b)}.\end{aligned}$$

2. Unterfall: $(a,b) = \rho\left(a', \delta_k(t_1)\right) \;\wedge\; a' \in \text{Bild } \delta_k \circ \xi$.

3. Unterfall: $(a,b) = \rho\left(a', \delta_k(t_0)\right) \;\wedge\; a' \in \text{Bild } \delta_k \circ \xi$.

4. Unterfall: $a = b \in \{\delta_k(t_0), \delta_k(t_1)\}$.

5. Unterfall: $a \in \text{Bild } \delta_k \circ \xi \;\wedge\; b \in \text{Bild } \delta_k \circ \xi$.

Die Unterfälle 2 bis 5 können analog zum 1. Unterfall nachgewiesen werden.

2. Fall: $s \in \{p_k+1, \ldots, p_{k+1}\}$. In diesem Fall gilt für $s' := s - (p_k + 1)$

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}\left(G''_{s'}\right)} M\left(\mathcal{B}_{k+1}\right)_{(a,b),(i,j)}\left(x''_s\right)_{(i,j)} \\ &= \begin{cases} 0 & : \; a \notin \text{Bild } \lambda_{s'} \;\vee\; b \notin \text{Bild } \lambda_{s'} \\ \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}\left(G''_{s'}\right)} M\left(\mathcal{B}_{G''_{s'}}\right)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(a),\lambda_{s'}^{-1}(b)\right),(i,j)}\left(x''_s\right)_{(i,j)} & : \; \text{sonst} \end{cases} \\ &= \left.\begin{cases} 0 & : \; a \notin \text{Bild } \lambda_{s'} \;\vee\; b \notin \text{Bild } \lambda_{s'} \\ \left(y'_s\right)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(a),\lambda_{s'}^{-1}(b)\right)} & : \; \text{sonst} \end{cases}\right\} = \left(y''_s\right)_{(a,b)}.\end{aligned}$$

Zu 2.(a): Es seien $s, t \in \{1, \ldots, p_{k+1}\}$. Für $s < t \leq p_k$ gilt $\phi_{k+1}(y''_s) = \phi_k(y_s) \overset{\mathrm{IV}}{<'} \phi_k(y_t) = \phi_{k+1}(y''_t)$. Tritt $s \leq p_k < t$ ein, so ergibt sich $\phi_{k+1}(y''_s) = \phi_k(y_s) \in \mathcal{B}\left(G'_k\right)$ und $\phi_{k+1}(y''_t) = (t - p_k + 2, k+4)$. Also folgt $\phi_{k+1}(y''_s) <' \phi_{k+1}(y''_t)$. Für $p_k < s < t$ berechnet man $\phi_{k+1}(y''_s) = (s - p_k + 2, k+4) <' (t - p_k + 2, k+4) = \phi_{k+1}(y''_t)$.

Zu 2.(b): Zunächst sei $s \in \{1, \ldots, p_k\}$ und $\phi_{k+1}(y''_s) <' (a,b) \in \text{Bild } \phi_{k+1}$. Wenn $(a,b) \in \text{Bild } \phi_k$ ist, folgt $\phi_{k+1}(y''_s) = \phi_k(y_s)$ und somit $(x'_s)_{(a,b)} = (x_s)_{(a,b)} = 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Falls $(a,b) \in \text{Bild } \phi_{k+1} \setminus \text{Bild } \phi_k$ gilt, so ist $(a,b) \notin \mathcal{B}\left(\mathcal{J}_k\right)$, daraus folgt $(x'_s)_{(a,b)} = 0$.

Nun sei $s \in \{p_k+1, \ldots, p_{k+1}\}$ und $\phi_{k+1}(y''_s) <' (a,b) \in \text{Bild } \phi_{k+1}$. Daraus folgt $b = k+4$ und $a > s - p_k + 2 = s - (p_k+1) + 3$, d.h. $(a,b) \notin \mathcal{B}\left(G''_{s'}\right)$ wegen (10.4). Somit gilt $(x'_s)_{(a,b)} = 0$.

Zu 2.(c): Vorerst sei $s \in \{1, \ldots, p_k\}$. Nach Definition gilt $\phi_{k+1}(y''_s) = \phi_k(y_s)$. Die Induktionsvoraussetzung ergibt $(x'_s)_{\phi_{k+1}(y''_s)} = (x_s)_{\phi_k(y_s)} \in \{\pm 1\}$. Sei nun $s \in \{p_k+1, \ldots, p_{k+1}\}$

und $s' := s - (p_k + 1)$. Da die Kanten $f_{3s'+4}$ und f_{3k+7} in verschiedenen Komponenten von $T_{s'}$ liegen oder in $G''_{s'}$ nicht inzident sind, gilt $(y'_s)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(l_1),\lambda_{s'}^{-1}(l_0)\right)} \in \{\pm 1\}$ für $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}(f_{3k+7}) =: e_{l_1}$ und $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}(f_{3s'+4}) =: e_{l_0}$. Außerdem „enthält" in $G''_{s'}$ nur das Basiselemet a_{k+4} die Kante f_{3k+7} bzw. nur $a_{s'+3}$ die Kante $f_{3s'+4}$. Daher gilt

$$M\left(\mathcal{B}_{G''_{s'}}\right)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(l_1),\lambda_{s'}^{-1}(l_0)\right),(i,j)} \in \{\pm 1\} \quad \Leftrightarrow \quad (i,j) = (s'+3, k+4).$$

Insgesamt berechnet man

$$\begin{aligned} 1 &= \left|(y'_s)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(l_1),\lambda_{s'}^{-1}(l_0)\right)}\right| \\ &= \left|\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}\left(G''_{s'}\right)} M\left(\mathcal{B}_{G''_{s'}}\right)_{\rho\left(\lambda_{s'}^{-1}(l_1),\lambda_{s'}^{-1}(l_0)\right),(i,j)} \cdot (x''_s)_{(i,j)}\right| \\ &= (x''_s)_{(s'+3,k+4)} = (x'_s)_{(s'+3,k+4)} = (x'_s)_{\phi_{k+1}(y''_s)}. \end{aligned}$$

Zu 3.: Die Matrix X' enstehe aus der X-Matrix $X\left(\mathcal{B}_{k+1}, \gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}, g_{\mathcal{J}_{k+1}}\right)$ durch Streichen der Zeilen die zu den Indizes $\phi_{k+1}(y''_i)$, $i \in \{1, \ldots, p_{k+1}\}$ gehören. Die Anzahl der Spalten von X' ist $\left|E_{\mathcal{J}_{k+1}}\right| = |E_{\mathcal{J}_k}| + 3$. Wegen $\beta_k :=$Rang $H_1(\mathcal{J}_k) = k+3$ und $\beta_{k+1} = \beta_k + 1$ berechnet sich die Anzahl der Zeilen von X' zu

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\beta_{k+1}(\beta_{k+1}+1) - (p_k+1+k) &= \tfrac{1}{2}(\beta_k+1)(\beta_k+2) - p_k - (\beta_k - 2) \\ &= \tfrac{1}{2}\beta_k(\beta_k+1) + 3 - \text{Rang } L(\mathcal{J}_k) \overset{(8.16),\text{ S.254}}{=} |E_{\mathcal{J}_k}| + 3. \end{aligned}$$

Für die Kantennummerierung $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}$ gelte $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}(f_{3k+7}) =: e_{l_1}$, $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}(f_{3k+8}) =: e_{l_2}$ sowie $\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}(f_{3k+9}) =: e_{l_3}$. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen lässt sich die Matrix X' auf die Form $\begin{pmatrix} X'' & Y \\ Z & A \end{pmatrix}$ bringen. Dabei ist X'' die Matrix, die durch Streichen der Zeilen zu den Indizes $\phi_{k+1}(y''_i) = \phi_k(y_i)$ für $i \in \{1, \ldots, p_k\}$ aus der X-Matrix $X(\mathcal{B}_k, \gamma_{\mathcal{J}_k}, g_{\mathcal{J}_k})$ hervorgeht. Diese ist nach Induktionsvoraussetzung quadratisch. Die Matrix A ist gegeben durch $A_{(s,k+4),t} = X'_{(s,k+4),t}$ für $s \in \{1, 2, k+4\}$ und $t \in \{l_1, l_2, l_3\}$. Aus der Wahl der Basiselemente a_1, a_2, a_{k+4} geht

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

hervor. Mithilfe von Zeilenumformungen und Zeilenvertauschungen kann A auf Diagonalgestalt mit ± 1 in der Diagonale gebracht werden. Weitere Zeilenumformungen überführen Y in die Nullmatrix. Insgesamt ergibt sich $|\det X'| = |\det X''|\,|\det A| \overset{\text{IV}}{=} 1$. □

10.2 Diagramme von Möbiusleitern

Satz 10.2 *Vorgelegt seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 10.1 ab Seite 283. Darüber hinaus sei (D, γ_D, o_D) ein Diagramm und $F := F(D, \gamma_D, N)$ eine Bandfläche zu einer Einbettung von $G = J_m$ wie in Satz 8.3 auf Seite 248. Die Basis $\mathcal{B}_m$ aus 10.1 (b) induziert eine Basis $\mathcal{B} := \{[b_1], \ldots, [b_{m+3}]\}$ von $H_1(F)$ wie in (8.9) auf Seite 249. Gegeben seien außerdem die Basis B_m von Kern $f_{(G,w_G,\gamma_G)}$, die Zuordnung $\phi_m : B_m \to \mathcal{B}(G)$ und die Elemente $x_1, \ldots, x_{p_m} \in M^{tr}(\mathcal{B}(G), \mathbb{Z})$ aus 10.1 (c).*

Sei $g \in M^{tr}(\mathcal{B}(G), \mathbb{Z})$ mit

$$g_{\phi_m(y_s)} := \frac{1}{(x_s)_{\phi_m(y_s)}} \left[L_{y_s}(D, \gamma_D, o_D) - \sum_{\{(i,j) \in \mathcal{B}(G) | (i,j) \notin \Phi_s\}} (x_s)_{(i,j)}\, g_{(i,j)} \right]$$

und $\Phi_s := \{\phi_m(y_i) \mid s \leq i \leq p_m\}$ für jedes $s \in \{1, \ldots, p_m\}$. Es gelten:

(a) Für jedes $s \in \{1, \ldots, p_m\}$ ist $g_{\phi_m(y_s)}$ wohldefiniert.

(b) Für die T-Matrix $T := T(M(\mathcal{B}_m, \gamma_G, g_G), D, \gamma_D, o_D)$ und $X' := X'(\mathcal{B}_m, \gamma_G, g_G)$ aus 10.1 (c) 3. gilt:

$$\forall (i,j) \in \mathcal{B}(G) \setminus \mathit{Bild}\,\phi_m \ : \ \left(X' N^{tr}\right)_{(i,j)} = g_{(i,j)} - T_{(i,j)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall (i,j) \in \mathcal{B}(G) \ : \ \mathcal{G}(F)([b_i], [b_j]) = g_{(i,j)}.$$

(c) Es seien $\widetilde{T}, \widetilde{T}', \widetilde{g} \in M^{tr}(\mathcal{B}(G) \setminus \mathit{Bild}\,\phi_m, \mathbb{Z})$ festgelegt durch $\widetilde{g}_{(i,j)} := g_{(i,j)}$, $\widetilde{T}_{(i,j)} := T_{(i,j)}$ und $\widetilde{T}'_{(i,j)} := T(M(\mathcal{B}_m, \gamma_G, g_G), D', \gamma_{D'}, o_{D'})_{(i,j)}$. Dabei sei $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ ein weiteres Diagramm zu G mit einer Bandfläche $F' := F(D', \gamma_{D'}, N')$. Die Verdrillungen der Bandflächen F und F' seien gegeben durch

$$N^{tr} = \left(X'\right)^{-1} \left(\widetilde{g} - \widetilde{T}\right) \quad \mathit{bzw.} \quad \left(N'\right)^{tr} = \left(X'\right)^{-1} \left(\widetilde{g} - \widetilde{T}'\right). \tag{10.6}$$

Wenn (D, γ_D, o_D) und $(D', \gamma_{D'}, o_{D'})$ äquivalent sind, sind F und F' isotop in $\mathbb{R}^3$.

Beweis **Zu (a):** Nach 10.1 (c)2.(c) gilt $(x_s)_{\phi_m(y_s)} \in \{\pm 1\}$. Daher ist $g_{\phi_m(y_s)} \in \mathbb{Z}$.

Zu (b): Satz 8.4 (a) auf Seite 252 liefert die Behauptung für die Indizes $(i,j) \in \mathcal{B}(G) \setminus$ Bild ϕ_m. Zu zeigen bleibt $\Rightarrow$ für jeden Index $(i_s, j_s) := \phi_m(y_s)$, $s \in \{1, \ldots, p_m\}$. Dies wird induktiv über s nachgewiesen.

$\boldsymbol{s = 1}$ **:** Für $(i_1, j_1) = \phi_m(y_1)$ berechnet man:

$$\mathcal{G}(F)([b_{i_1}], [b_{j_1}]) = \langle b_{i_1}, b_{j_1} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{8.6,\ \underline{S}.254}{=} && \frac{1}{(x_1)_{\phi_m(y_1)}}\left[L_{y_1}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\neq\phi_m(y_1)\}}(x_1)_{(i,j)}\left\langle b_i,b_j\right\rangle\right]\\
&\overset{10.1\ (c)\ \underline{2}.(a),(b)}{=} && \frac{1}{(x_1)_{\phi_m(y_1)}}\left[L_{y_1}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\notin\Phi_1\}}(x_1)_{(i,j)}\left\langle b_i,b_j\right\rangle\right]\\
&= && \frac{1}{(x_1)_{\phi_m(y_1)}}\left[L_{y_1}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\notin\Phi_1\}}(x_1)_{(i,j)}\,g_{(i,j)}\right]\\
&\overset{\text{Def.}}{=} && g_{\phi_m(y_1)}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{s-1\mapsto s\leq p_m}$ **:** Für $(i_s,j_s)=\phi_m(y_s)$ berechnet man wie oben:

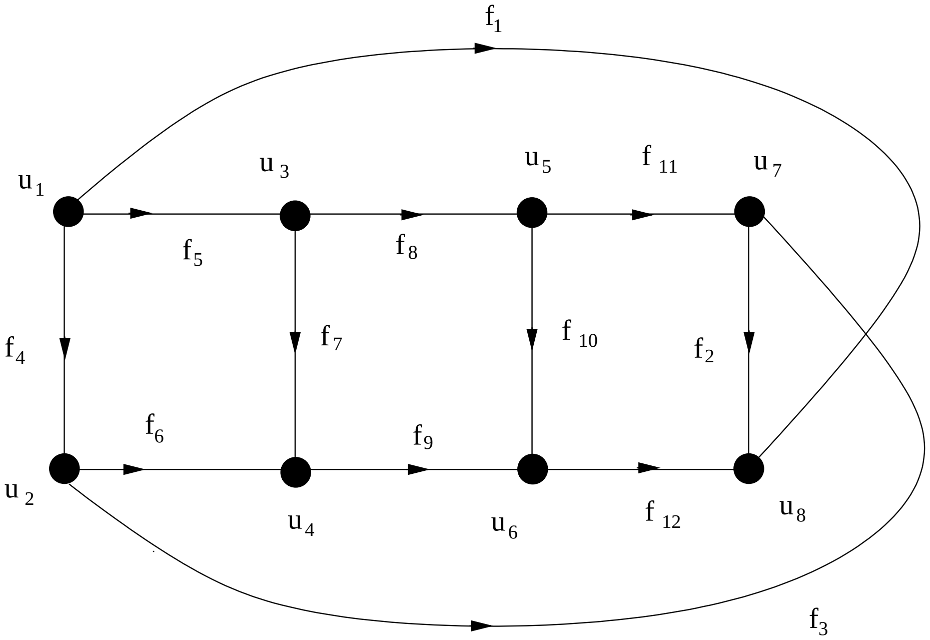
$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}(F)\left(\left[b_{i_s}\right],\left[b_{j_s}\right]\right)=\left\langle b_{i_s},b_{j_s}\right\rangle\\
&\overset{8.6,\ \underline{S}.254}{=} && \frac{1}{(x_s)_{\phi_m(y_s)}}\left[L_{y_s}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\neq\phi_m(y_s)\}}(x_s)_{(i,j)}\left\langle b_i,b_j\right\rangle\right]\\
&\overset{10.1\ (c)\ \underline{2}.(a),(b)}{=} && \frac{1}{(x_s)_{\phi_m(y_s)}}\left[L_{y_s}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\Phi_s)\}}(x_s)_{(i,j)}\left\langle b_i,b_j\right\rangle\right]\\
&\overset{\text{IV}}{=} && \frac{1}{(x_s)_{\phi_m(y_s)}}\left[L_{y_s}\left(D,\gamma_D,o_D\right)-\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{B}(G)|(i,j)\Phi_s)\}}(x_s)_{(i,j)}\,g_{(i,j)}\right]\\
&\overset{\text{Def.}}{=} && g_{\phi_m(y_s)}.
\end{aligned}
$$

Zu (c): Dies zeigt man genauso wie 8.4 (c) auf Seite 252 bzw. 8.8 (c) auf Seite 257. □

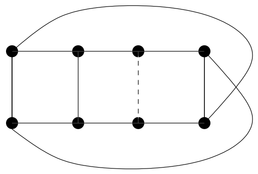
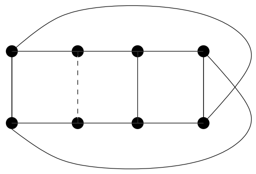
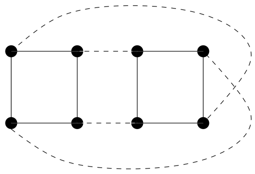
10.3 Beispiele zu Kapitel 10

Gegeben sei eine Möbiusleiter $\mathcal{M}_4$ mit vier Sprossen. Es sei also $m=2$, $G=J_2$ in Satz 10.1. Offenbar gilt $\beta_2=$Rang $H_1(G)=5$ und daher Rang $L(G)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6-12=3$. Sei

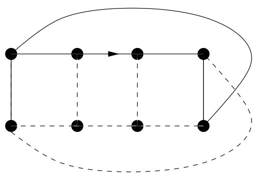
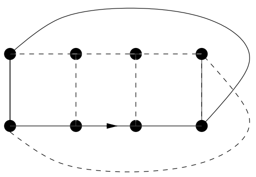
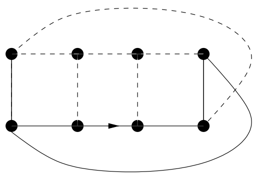
(w_G, γ_G) eine Nummerierung von G, für die $\gamma_G(f_i) := e_i$ und $w_G(u_i) := v_i$ gilt.

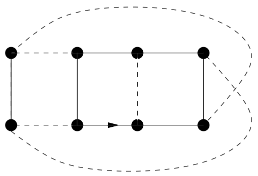
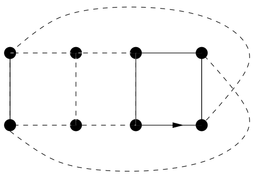


Gemäß 7.4.2 ab Seite 239 induzieren die folgenden „nicht-gestrichelt“ gedruckten Teilgraphen von G eine Basis $B_2 := \{y_1'', y_2'', y_3''\}$ von Kern $f_{(G,w_G,\gamma_G)}$:

y_1'' :  y_2'' :  y_3'' :  .

Die folgende Abbildung illustriert die Basis $\mathcal{B}_2 = \{[a_1], \ldots, [a_4]\}$ aus Satz 10.1(b). Dabei deuten die Pfeile die Orientierungen der zu S^1 homöomorphen Repräsentanten der Basiselemente für die singuläre Homologie an.

a_1 :  a_2 :  a_3 : 

a_4 :  a_5 : 

Für die Zuordnung $\phi_2 : B_2 \to \mathcal{B}(G)$ gilt $(k = 1)$

$$\phi_2\left(y_l''\right) = \begin{cases} \phi_1(y_l) & : \quad l \in \{1, \ldots, p_1\} = \{1\} \\ (l - p_1 + 2, 5) & : \quad l \in \{p_1 + 1, \ldots, p_2\} = \{2, 3\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1,3) & : \quad l = 1 \quad \text{(Induktionsanfang in 10.1)} \\ (3,5) & : \quad l = 2 \\ (4,5) & : \quad l = 3 \end{cases}$$

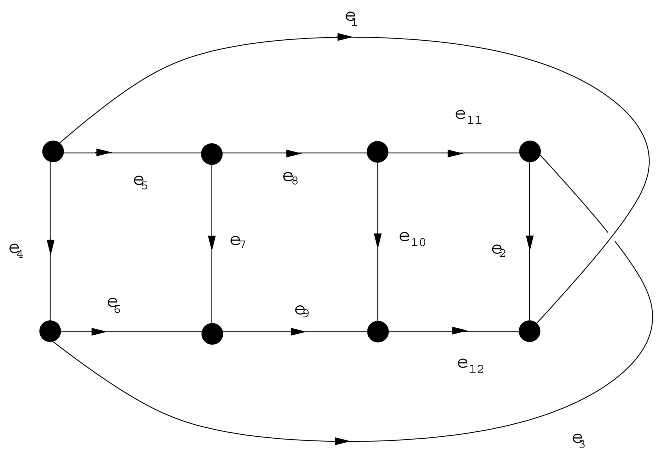
Für die Matrix $X' := X'(\mathcal{B}_2, \gamma_G, g_G)$ aus 10.1(c) 3. ergibt sich

$$X' = \begin{array}{c|cccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
(1,1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(1,2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1,4) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(1,5) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(2,2) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(2,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(2,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(2,5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(3,3) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(3,4) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(4,4) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
(5,5) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array} .$$

Sie ergibt sich aus der X-Matrix durch Streichen der Zeilen zu den Indizes $(1,3), (3,5)$ und $(4,5)$. Ihre Inverse lautet

$$\left(X'\right)^{-1} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} .$$

Nun sei ein orientiertes Diagramm (D, γ_D, o_D) von G wie in (10.7) vorgelegt, so dass die Nummerierung (w_D, γ_D) gemäß (8.1) auf Seite 245 mit (w_G, γ_G) verträglich ist. Dazu sind die Nummerierungen der Kanten an das Diagramm geschrieben worden.



(10.7)

Wie in Satz 10.2 sei jetzt ein $g \in M^{tr}(\mathcal{B}(G), \mathbb{Z})$ gewählt. Hier sei $g_{(i,j)} := 0$ für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}(G) \setminus \text{Bild } \phi_2$. An dem Diagramm D liest man

$$w_{s,t}^{D,o_D} = \begin{cases} -1 & : \quad (s,t) = (1,3) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ab, daher gilt für $\widetilde{T}$ aus Satz 10.2(c):

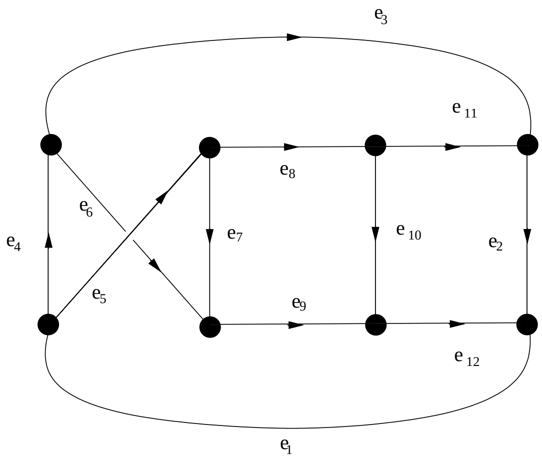
$$\widetilde{T}_{(i,j)} = -M\left(\mathcal{B}_2, \gamma_G, g_G\right)_{(1,3),(i,j)} = \begin{cases} -1 & : \quad (i,j) = (2,3) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}(G) \setminus \text{Bild } \phi_2$. Die Verdrillungen N zur Bandfläche $F := F(D, \gamma_D, N)$ berechnen sich laut Satz 10.2(c) zu

$$\begin{aligned} N^{tr} &= \left(X'\right)^{-1}\left(\widetilde{g} - \widetilde{T}\right) = \left(X'\right)^{-1}\left(0 - \widetilde{T}\right) \\ &= \left(X'\right)^{-1} \cdot (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)^{tr} = (0,0,-1,-1,0,1,0,0,0,0,0,0)^{tr}. \end{aligned}$$

Somit hat F die Gestalt wie in Abbildung (10.8) auf Seite 297. Zur weiteren Veranschaulichung soll nun eine Bandfläche zu einem zu D äquivalenten Diagramm berechnet werden.

Das folgende Diagramm $(D', \gamma_{D'} o_{D'})$ ist offensichtlich äquivalent zu (10.7):



An D' liest man

$$w_{s,t}^{D,o_D} = \begin{cases} -1 & : \quad (s,t) = (5,6) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ab, daher gilt

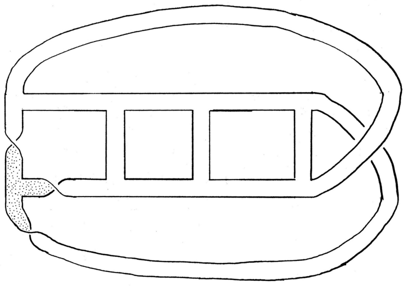
$$\widetilde{T}'_{(i,j)} = -M\left(\mathcal{B}_2, \gamma_G, g_G\right)_{(5,6),(i,j)} = \begin{cases} -1 & : \quad (i,j) = (1,2) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $(i,j) \in \mathcal{B}(G) \backslash \operatorname{Bild} \phi_2$. Die Verdrillungen N' zur Bandfläche $F' := F\left(D', \gamma_{D'}, N'\right)$ berechnen sich zu

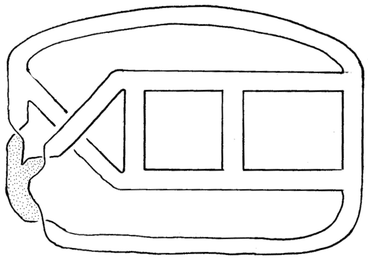
$$\begin{aligned} \left(N'\right)^{tr} &= \left(X'\right)^{-1}\left(\widetilde{g} - \widetilde{T}'\right) = \left(X'\right)^{-1}\left(0 - \widetilde{T}'\right) \\ &= \left(X'\right)^{-1} \cdot (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)^{tr} = (1,0,0,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0)^{tr}. \end{aligned}$$

Somit hat F' die Gestalt wie in der untenstehenden Abbildung (10.8).

$F =$



$F' =$



(10.8)

Offenbar ist F isotop zu F' in $\mathbb{R}^3$. $\square$

Anhang A

Bezeichnungen

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
$\cap D$	Inzidenzabbildung des nichtorientierten Graphen $\Gamma(D)$	1.17	21
$\cap\Gamma$	Inzidenzabbildung des nichtorientierten Graphen $\Gamma(\mathcal{Z})$	1.16	20
A_i	Abkürzung von $A_i(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z})$	3.2	68
A^i	Abkürzung von $A^i(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z})$	3.2	68
$A_i(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z})$	schiefsymmetrische singuläre Kettengruppen	3.2	68
$A^i(D_2(\mathcal{Z}), \sigma; \mathbb{Z})$	schiefsymmetrische singuläre Kokettengruppen	3.2	68
$ad(i, w, \gamma, G)$	die Indizes der bezgl. der Nummerierung (w, γ) zu den mit v_i nummerierten Ecken inzidenten Kanten	1.7	13
A_k, a_k	$A_k \subset S_k$, $a_k = \|A_k\|$	7.3.2.1	200
$\mathcal{A}(G, w, \gamma)(G, w, \gamma) = \mathcal{A}(G, w, \gamma)(G)$	Matrix	2.18	39
$A(G, w, \gamma) = A(G)$	Matrix	2.18	39
$A_s(G, w, \gamma)$	Matrix	2.18	39
B	Menge von Unterteilungen	7.3.1	197
Bild γ	Bild der Abbildung γ		203
Bild δ	Bild der Abbildung δ	7.15	204

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
$B(G,w,\gamma)=B(G)$	Matrix	2.18	39
$B(x,l,s), B(x,l,t)$	Hilfsmengen	4.4.2	99
$\widetilde{\mathcal{B}}_k, \mathcal{B}_k$	Basen von Verschlingungsmoduln	7.3.1	197
$\mathcal{B}_\Theta$	Basis	8.4.1	255
$\mathcal{B}_{\mathcal{K}_{3,3}}$	Basis	8.4.3	257
$\mathcal{B}_{\mathcal{K}_4}$	Basis	8.4.2	256
$\mathcal{B}_{\mathcal{K}_5}$	Basis	9.1.2	271
$\mathcal{B}_{\mathcal{Z}_2}$	Basis	9.1.1	270
$B(\mathcal{Z})$	$:= Sym\,(\text{Rang}\, H_1(\mathcal{Z}))$	8.1	248
$(b_i,B_i),(\widetilde{b}_i,\widetilde{B}_i)$	Inklusionshomomorphismen	7.3.1	197
$\langle b_i,b_j\rangle$	$:= \mathcal{G}(F)\,([b_i],[b_j])$	8.1	245
$(\widetilde{b}_x,\widetilde{B}_x)$	Inklusionshomomorphismen	20	205
$b(i,j)$	Zahlen	7.25	218
$b_{\max}$	größtes Element der $b(i,j)$		218
β	topologische Bettizahl	7.13	214
β_G	graphentheoretische Bettizahl	7.14	214
C	Menge	7.14	203
$C_n(\mathcal{Z})$	zelluläre Kettengruppe	8.1	245
$C(\zeta_\alpha)$	Teilmenge von C	7.18	207
$\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$	(p,e,q)-Kontraktion von G	4.1	74
$\mathcal{C}_{\lceil x_n\rceil}(G), \mathcal{C}_{x_n,\ldots,x_1}(G)$	mehrfache Kontraktion	5.22	135
$\mathcal{C}_{\lceil x_0\rceil}(G)$	$=G$	5.22	135
$cr(D)$	Menge der Kreuzungen eines Diagramms D	1.20	22
$\mathcal{D}_\alpha$	Menge erzeugender Elemente	7.20	226
$\mathcal{D}_l$	Menge der orientierten surjektiv kantennummerierten Diagramme	2.12	32
D_k	Zahl	31	215
$(\Delta_{x_i};\delta_{x_i})$	Abbildungen	7.28	219
δ_V	Isomorphismus von V nach V^*	3.1	64
δ^1, d_1	Korandoperator, Randoperator	3.3	69
(δ_n,Δ_n)	Isomorphismus von J'_n nach J'_n	5.4	117
$\deg_G(v)$	Eckengrad von v in G	4.5	75
(d_i,D_i)	Wege	7.5	197

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
(d^W_x, D^W_x)	Wege	7.12	200
(D, w, γ, o)	orientiertes (einfach) nummeriertes Diagramm	1.4	22
$\widetilde{E}_x$	Kanten von P_x	7.17	205
f_k	die Kante von W	7.3.1	197
f_x	die Kante von W_x	7.7	201
$\epsilon(D, o)$	Kreuzungsinformationen im orientierten Diagramm (D, o)	1.20	22
$\mathcal{E}_l$	$= \{e_1, \dots, e_l\}$	1.2	12
$F(D, \gamma_D, N)$	Bandfläche	8.1	245
f^*	Zu f duale Abbildung	3.1	64
$f', (f^*)'$	Matrixdarstellung eines Homomorphismus f	3.3	65
$f(p, e, q), F(p, e, q)$	von (f, F) induzierte Abbildung	4.16	86
$f_{(G,w,\gamma)}$	Homomorphismus zu $\mathcal{A}(G, w, \gamma)$	2.28	46
$\mathbb{G}$	Körper oder abelsche Gruppe	2.12	32
$G - U$	Graph, wobei U Menge von Ecken/Kanten ist	5.13	130
$G < H, G \cup H, G \cap H, G + H$	Teilgraph; Vereinigung, Schnitt, disjunkte Vereinigung von Graphen	4.3	74
$G(D)$	Graph zum Diagramm D	1.17	21
$\gamma_{\mathcal{J}_{k+1}}, \gamma_{\widetilde{T}_{x_i}}$	Kantennummerierungen	7.26	218
$\Gamma(\mathcal{Z})$	topologischer Graph = Bild einer Einbettung	1.15	20
$(\Gamma(\mathcal{Z}), w, \gamma, o)$	orientierter (einfach) nummerierter topologischer Graph	1.4	22
$\Gamma(\mathcal{Z})_1, \Gamma(\mathcal{Z})_0$	Eins- bzw. Nullzellen eines topologischen Graphen	1.16	20
$(\Gamma\|_{\mathcal{Z}_0}, \mathcal{P}(\Gamma)\|_{\mathcal{Z}_1})$	Graphenisomorphismus zwischen den Graphen zu $\mathcal{Z}$ und zu $\Gamma(\mathcal{Z})$	1.16	20
$\left(\pi\|_{\Gamma(\mathcal{Z})_0}, \mathcal{P}(\pi)\|_{\Gamma(\mathcal{Z})_1}\right)$	Graphenisomorphismus zwischen den Graphen zu $\Gamma(\mathcal{Z})$ und zu D	1.18	21
$\mathcal{G}(G)$	Verschlingungsmodul des Graphen G	7.3	197
$\mathcal{G}(F)$	GL-Form einer Fläche F	8.1	245
$G_{(G,w,\gamma)} = G_G$	Homomorphismus zur Matrix $\mathcal{M}(G, w, \gamma)$	2.37	54
$G_{\mathcal{J}_{k+1}}, G_{\mathcal{J}_k}, G^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{J}_{k+1}}, G^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{J}_k}$	Abbildungen	7.38	229

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
$g(p,e,q)$	Orientierung von $\mathcal{C}_{p,e,q}(G)$, induziert von der Orientierung g	4.1	74
$G(\mathcal{Z})$	Graph zum Zellenkomplex $\mathcal{Z}$	1.13	19
h_G	durch eine Nummerierung induzierte Orientierung	2.1	27
H_x	Graph	7.12	200
$i_{(G,w,\gamma)} = i_G$	Inklusion	2.37	54
$I(G,w,\gamma)$	Inzidenzmatrix von G bzgl. surjektiver Nummerierung (w,γ)	1.8	14
$IE(G,w,\gamma), IE(G)$	Menge bestehnd aus Paaren „nicht-inzidenter“ Kanten	2.37	54
i_k, i_{k+1}	Inklusionen	7.38	229
(i'_x, I'_x)	Inklusionshomomorphismus	7.3.2.1	200
I_k	Menge der Indizes der Graphen aus M_k	7.11	200
$\widetilde{I}_k$	Teilmenge von I_k	7.23	217
In 4.10 sei $i(\cdot,\cdot)$ gegeben	Sprechweise	4.4.3	104
In 4.10 sei $j(\cdot,\cdot)$ gegeben	Sprechweise	4.4.3	104
In 2.1 sei a gegeben	Sprechweise	4.4.3	104
In 2.1 sei A gegeben	Sprechweise	4.4.3	104
$Inz(v,G)$	zu v inzidente Kanten von G	1.7	13
$IO(G,w,\gamma), IO(G)$	In-Out-Matrix bzgl surj. Ecken- und Kantennummerierung	1.8	14
$i(p,V)$	Abbildung von $V \setminus \{p\}$ nach V	4.1	74
$IV(G,w,\gamma), IV(G)$	Indexmenge bestehend aus Paaren „nicht-inzidenter“ Ecken und Kanten	2.37	54
i_x	Spezielle injektive Abbildung		201
$j_{(G,w,\gamma)} = j_G$	Inklusion	2.37	54
$j(e,E)$	Abbildung von $E \setminus \{e\}$ nach E	4.1	74
$J_k, \mathcal{J}_k$	Graphen einer Kette	7.5 , 7.3.1	195 , 197
j_k, j_{k+1}	Inklusionen	7.38	229
J'_n	Standardbogen	5.1	116

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
$\mathcal{J}_x$	Graph	13	201
$\kappa, \kappa_1, \kappa_2$	Isomorphismus zwischen $\mathrm{Kern}\, f_G$ und $\mathrm{Kern}\, G_G$	2.39	56
κ	Kroneckerprodukt	3.8	71
$(\mathrm{Kern}\, f)^0$	Elemente von $V*$, die auf $\mathrm{Kern}\, f$ Null sind	3.4	66
$\mathcal{K}_4, K_4$	spezieller Zellenkomplex/Graph	6.3	182
$\mathcal{K}_5, K_5$	spezieller Zellenkomplex/Graph	6.7	184
$\mathcal{K}_{3,3}, K_{3,3}$	spezieller Zellenkomplex/Graph	6.5	183
$\mathcal{L}'$	isomorph zu $L(\mathcal{Z})$	3.3	69
$\mathcal{L}(f)$	WU-Invariante	3.2	68
$(\widetilde{l}_{x_i}, \widetilde{L}_{x_i})$	Inklusionen	7.28	219
$(\Lambda_{x_i}; \lambda_{x_i})$	Abbildungen	7.28	219
L_y	Simon-Invariante	2.12	32
L_y	Simon-Invariante bezüglich der Indexmengen $IE(\cdot)$ und $IV(\cdot)$	2.40	56
$L(\mathcal{Z})$	Kohomologiemodul von Taniyama	3.2	68
$\mathcal{M}_m$	Möbiusleiter mit m Sprossen	10.1	283
M_k, m_k	$M_k \subset S_k$, $m_k = \|M_k\|$	7.3.2.1	200
$M^v_w(f, F)$	zu v inzidente Kanten, deren Bild unter F inzident zu w im „hochgehobenen“ Graphen sind	4.14	85
$M\,(\mathcal{B}, \gamma, o)$	M-Matrix	8.1	248
$\mathcal{M}(G, w, \gamma) = \mathcal{M}(G)$	Matrix, die aus $\mathcal{A}(G, w, \gamma)(G, w, \gamma)$ durch Streichen bestimmter Zeilen und Spalten entsteht	2.37	54
$M(I, Y)$	mit I indizierte $\|I\|$-Tupel mit Einträgen in Y	1.1	16
$M^{tr}(I; Y)$	transponierte Elemente aus $M(I, Y)$	1.1	16
$M_{\|I\|\times\|J\|}(I, J, Y)$	mittels I und J indizierte Matrizen mit Einträgen aus Y	1.1	16
$M_{(x,y)}$	Teilmenge von $N_{l\times k}$	2.24	42
$M(\mathcal{Z})$	Menge der Zellen eines Zellenkomplexes $\mathcal{Z}$	1.2	19
ν	$\nu(x, y) = \{x, y\}$	1.1	11
$M(\mathcal{Z})$	$:= Sym\,(\|\mathcal{Z}_1\|)$	8.1	248

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
νG	unorientierter Graph zum orientierten Graph G	1.1	11
$N(a,l)$	Menge	4.4.1	94
$N_\cup(G,w,\gamma)=N_\cup(G)$	Vereinigung der $N_i(G,w,\gamma)$	2.2	28
$N_i(G,w,\gamma)$	Menge der zu i „inzidenten" Kanten	2.2	28
N_{J_k}	Zahl	7.3.1	197
$N_{n,m}$	Menge	2.2	28
n_x	Index von J'_{n_x}	7.12	200
$N_{(x,y)}$	Teilmenge von $Sym(l)$, Urbild von (x,y) unter $S(f)$	2.24	42
$o_{(G,w,\gamma)}^{(G',w,\gamma)}$	durch Umorientierung induzierter Isomorphismus	2.32	49
$op(p,e,q)$	Homomorphismus von $\operatorname{Kern} G_{\mathcal{C}peqG}$ nach $\operatorname{Kern} G_G$	4.24	96
$\widetilde{op}$	Komposition von $op(\cdot)$- Abbildungen	5.54	175
$(\Omega_\beta^\alpha;\omega_\beta^\alpha)$	Abbildungen		224
$p_0(G)$	Anzahl der Komponenten von G	5.11	128
$p_1(G)$	chromatische Zahl von G	5.11	128
$(\widetilde{p},\widetilde{P})$	Inklusionen	7.28	219
$(\Pi;\pi)$	Abbildung	7.28	219
$\pi_{\mathbb{Q}},\pi_{\mathcal{J}_k}^{\mathcal{J}_{k+1}}$	Abbildung	7.38	229
$(\pi,\upsilon)_{\mathbb{Q}},(\pi,\upsilon)_{\mathcal{J}_k}^{\mathcal{J}_{k+1}}$	Abbildung	7.38	229
$P(a,l),P_l,P_x$	Hilfsmengen	4.4.1	94
p_f	Projektion	3.4	66
p'_f	Projektion	3.5	67
P_i	Bild von (d_i,D_i)	7.3.1	197
P_x	hinzugefügter Weg	7.3.2.1	200
$(\Phi;\phi)$	Abbildungen		224
(ϕ_j,Φ_j)	Isomorphismus von J'_n nach $\mathcal{C}_{p,e,q}(J'_{n+1})$	5.5	117
$(\Psi,\psi)_{(G,w_G,\gamma_G)}^{(H,w_H,\gamma_H)}=(\Psi,\psi)_G^H$	Einschränkung von $(\Psi,\psi)_*$	2.42	57
Ψ^*	induzierter Homomorphismus	2.28	46
Ψ_*	induzierter Homomorphismus	2.33	50
$(\Psi,\psi)_*$	induzierter Homomorphismus	2.33	50

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
$\Psi_{(G,w_G,\gamma_G)}^{(H,w_H,\gamma_H)} = \Psi_G^H$	Einschränkung von Ψ_*	2.42	57
$\psi(p,q,V)$	Abbildung von V nach $V \setminus \{p\}$	4.1	74
$\psi^2(p,q,V)$	$\psi(p,q,V) \times \psi(p,q,V)$	5	116
$P, \widetilde{P}, \overline{P}$	Matrizen	2.24	42
$po(p,e,q)$	für $\deg(p) = 2$ definierter Homomorphismus	4.28	100
$\mathcal{P}_n$	Potenzmengenfunktor	1.1	11
$P(\sigma)$	Permutationsmatrix	1.1	16
$Q, \widetilde{Q}, \overline{Q}$	Matrizen	2.24	42
$\rho = \rho_l$	symmetrisierende Abbildung	2.2	28
$R, \widetilde{R}, \overline{R}$	Matrizen	2.24	42
$(\widetilde{r}_{x_i}, \widetilde{R}_{x_i})$	Inklusionen	7.28	219
$Sch(v,G)$	Menge der Schlaufen an v in G	1.7	13
$S_\cup(f)$	Einschränkung von $S(f)$	2.8	30
$S(f)$	von f induzierte Abbildung	2.2	28
S_k	Menge von Graphen	7.3.2.1	200
$sub(G)$	Menge der Unterteilungen von G	5.22	135
σ_x	Index zu f_x	11	201
$Sym(l)$	Menge	2.2	28
t	Vertauschungsabbildung	2.31	48
τ_x	Kreuzung zum Doppelpunkt x	1.20	22
$\theta_1, \theta_2, \Theta$	Isomorphismen	3.3	69
Θ_x	Kontraktion von H_x		201
$\widetilde{T}_\beta^\alpha$	Graphen	7.4	189
τ_β^α	Erzeuende von $\mathcal{G}(\widetilde{T}_\beta^\alpha)$		224
t_α	Zahl		189
$T_i, \widetilde{T}_i$	Graphen	7.3.1	197
t_i, τ_i	Erzeuende von $\mathcal{G}(T_i)$ bzw. $\mathcal{G}(\widetilde{T}_i)$	7.3.1	197
$T\left(M\left(\mathcal{B},\gamma,o\right),D,\gamma_D,o_D\right)$	T-Matrix	8.1	248
T_x	Kandidat	18	204
$\widetilde{T}_x$	Hochhebung von T_x	7.17	205

Bezeichnung	Erklärung	Adresse	Seite
t_x, τ_x	Erzeuende von $\mathcal{G}(T_x)$ bzw. $\mathcal{G}(\widetilde{T}_x)$	7.29	220
$U\,(G, \mathrm{Bild}\,(d, D)))$	$= V_2(G) \setminus V_2\,(G, \mathrm{Bild}\,(d, D))$	5.54	175
$v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$	Koeffizienten von $x \in C_1(\mathcal{Z})$	8.1	245
V^*	Dualraum	3.1	64
$\widetilde{V}_x$	Ecken von P_x	7.17	205
$V_n(G)$	n-wertige Ecken von G	5.22	135
$V_2\,(G, \mathrm{Bild}\,(d, D))$	$= \mathrm{Bild}\,(d, D) \cap V_2(G)$	5.50	172
$\mathcal{V}_k$	$= \{v_1, \ldots, v_k\}$	1.2	12
$(\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_l, h)$	zu einer Nummerierung gehöriger Graph	1.2	12
W	Graph	7.3.1	197
W_x	Kontraktion von P_x	15	202
$w^{D,o}_{\gamma^{-1}(e_q),\gamma^{-1}(e_p)}$	Summe der Kreuzungsinformationen, der mit p und q nummerierten Kanten	1.20	22
X	Menge	7.13	203
$X\,(\mathcal{B}, \gamma, o)$	X-Matrix	8.1	248
Ξ_{x_i}, ξ_{x_i}	Abbildungen		219
Y	Menge	7.18	207
Y_a	Menge	4.4.1	94
$(\Upsilon; v)$	Abbildungen		229
ζ_1, ζ_2	die Ecken von W	7.3.1	197
$\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1$	Nullzellen, Eins-Zellen von $\mathcal{Z}$	1.2	19
$(\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, z)$	nicht-orientierter Graph zum Zellenkomplex $\mathcal{Z}$	1.13	19
$(\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, o)$	orientierter Graph zum Zellenkomplex $\mathcal{Z}$	1.13	19
$\mathcal{Z}_2, Z_2$	spezieller Zellenkomplex/Graph	6.1	181
$\mathcal{Z}^n$	$n-$Gerüste von $\mathcal{Z}$	1.2	19
$(\mathcal{Z}, o)$	orientierter Zellenkomplex	1.2	19

Standardbezeichnungen

$\stackrel{2.10}{=}$	:	Verweis auf einen Satz, eine Definition oder ähnliches
$\stackrel{(2.10)}{=}$	:	Verweis auf eine laufende Nummerierung am Rand des Textes
$\stackrel{\text{Vor.}}{=}$	:	Hier geht eine Voraussetzung ein
$\stackrel{!}{=}$	:	Diese Gleichung ist nachzuweisen
$\biguplus$	:	disjunkte Vereinugung
$D^1 := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$	:	eindimensionale Scheibe
$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lvert x\rvert \leq 1\}$	:	n-dimensionale Scheibe
$M_{k\times l}(X)$	:	$k \times l$-Matrizen mit Einträgen in X
$S_n := \{f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid f \text{ bij.}\}$	:	Permutationsgruppe mit n Elementen
$\langle v_1,\cdots,v_n\rangle_{\mathbb{G}}$	:	$\mathbb{G}$-Erzeugnis der Elemente $v_1,\cdots,v_n$
Generalvoraussetzung 2.22	:	Bezeichnungen, die überall in dem Abschnitt gelten, in dem 2.22 auftaucht
$k = 0 \;\Rightarrow\; \{v_1,\ldots,v_k\} := \emptyset$	:	formale leere Menge
$k > l \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=k}^{l}\{\cdots\} := \emptyset, \quad \sum_{i=k}^{l}(\cdots) := 0$	:	formale Vereinigung/Summe
$M\Delta N \;:=\; M\backslash N \,\cup\, N\backslash M$	:	symmetrische Differenz zweier Mengen
$f \circ g(x) := f\,(g(x))$	:	Abkürzung, dabei muss $f\circ g$ nicht wohldefiniert sein
$f^{-1}g(x) := f^{-1}\,(g(x))$	:	Urbild unter f
$(a,b) \in M \times N : f(a,b) := f\,((a,b))$	:	Klammern sparen
$M^n := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$	:	kartesisches Produkt einer Menge M
χ	:	Eulercharakteristik
$H_1(f)$	:	induzierte Abbildung in der Homologie
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	:	$\{0,1,2,3,4,5,6,\ldots\}$

Literaturverzeichnis

[1] J. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30:275–306, 1928.

[2] M. Epple. *Die Entstehung der Knotentheorie.* Vieweg, 1999.

[3] D. Erle. Topologie, Algebraische Topologie I/II. Vorlesungen an der Universität Dortmund, 1994-1996.

[4] S. Ghuman. Seifert surfaces for graphs. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 8(8):985–999, 1999.

[5] C. M. Gordon and R. Litherland. On the Signature of a Link. *Inventiones mathematicae*, 47:53–69, 1978.

[6] T. Kanenobu. Vassiliev-type invariants of a theta-curve. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 6(4):455–477, 1997.

[7] L. Kauffman. Invariants of graphs in three-space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311(2):697–710, 1989.

[8] L. Kauffman, J. Simon, K. Wolcott, and P. Zhao. Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space. *Topology and its Applications*, 49, 1993.

[9] A. Kawauchi. *A Survey of Knot Theory.* Birkhäuser, 1996.

[10] W. R. Lickorish. *An Introduction to Knot Theory.* Springer-Verlag New York, 1997.

[11] T. Motohashi and K. Taniyama. Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in $\mathbb{R}^3$. *Proceedings of Knots'96*, pages 185–200, 1997.

[12] H. Murakami and Y. Nakanishi. On a certain move generating link-homology. *Math. Ann.*, 284:75–89, 1989.

[13] R. Nikkuni. Delta edge-homotopy on theta-curves. Preprint von R. Nikkuni's homepage, erscheint in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

[14] R. Nikkuni. The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of a graph. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 9(3):387–411, 2000.

[15] R. Nikkuni. Delta link-homotopy on spatial graphs. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):543–570, 2002.

[16] M. Ozawa and Y. Tsutsumi. Minimally Knotted Spatial Graphs are Totally Knotted. *Tokyo J. Math.*, 26(2):413–421, 2003.

[17] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Sachs' linkless embedding conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 64:185–227, 1995.

[18] G. Scheja and U. Storch. *Lehrbuch der Algebra, Teil 2*. B.G. Teubner Stuttgart, 1988.

[19] T. Soma, H. Sugai, and A. Yasuhara. Disk/Band Surfaces of Spatial Graphs. *Tokyo J. Math.*, 20(1):1–11, 1997.

[20] T. Stanford. The functorality of Vassiliev-type invariants of links, braids, and knotted graphs. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(3):247–262, 1994.

[21] R. Stöcker and H. Zieschang. *Algebraische Topologie*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[22] K. Taniyama. Cobordism, homotopy and homology of graphs in $\mathbb{R}^3$. *Topology*, 33(3):509–523, 1993.

[23] K. Taniyama. Homology classification of spatial embeddings of a graph. *Topology and its Applications*, 65:205–228, 1995.

[24] K. Taniyama. Knotted subgraphs in a spatial graph. *Kobe J. Math.*, 14:207–212, 1997.

[25] K. Taniyama and R. Shinjo. Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants. *Topology and its Applications*, 134:53–67, 2003.

[26] K. Taniyama and A. Yasuhara. Realization of knots and links in a spatial graph. *Topology and its Applications*, 112:87–109, 2001.

[27] W. T. Tutte. *Graph Theory*. Enzyclopedia of Mathematics and its Applications 21. Cambridge Univ. Press, 1984.

[28] J. Uhing. Zur Kreuzhaubenzahl von Knoten. Diplomarbeit, Universität Dortmund, 1997.

[29] L. Volkmann. *Fundamente der Graphentheorie*. SpringerWienNewYork, 1996.

[30] W. Wu. *A Theory of Imbedding, Immersion, and Isotopy of Polytopes in a Euclidean Space*. Science Press, Peking, 1965.

[31] A. Yasuhara. Delta-unknotting operation and adaptability of certain graphs. *Proceedings of Knots'96*, pages 115–121.

[32] A. Yasuhara. Disk/band surface and spatial-graph homology. *Topology and its Applications*, 69:173–191, 1996.

[33] A. Yasuhara. C_k-moves on spatial theta-curves and Vassiliev invariants. *Topology and its Applications*, (128):309–324, 2003.

[34] P. Zhao. Is a knotted graph determined by its associated links? *Topology and its Applications*, 57:23–30, 1994.