Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Die Zielsetzung dieser Arbeit über die „Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien“ bestand in der

- Herleitung einer numerisch effizienten Methodik zur strukturmechanischen Berechnung der Materialien,
- der Herleitung der Sensitivitäten bezüglich einer Änderung der Geometrie und der Materialparameter sowie der
- Konzeption und Implementation eines effizienten Gesamtalgorithmus zur numerischen Behandlung der Optimierungsaufgaben.

Eine wesentliche Erkenntnis bei der Bearbeitung der obigen Aufgabenstellungen besteht in dem Grundsatz, daß das Optimierungsmodell nicht dazu geeignet ist, ein schlechtes Geometrie- bzw. Berechnungsmodell zu verbessern und es dazu auch nicht mißbraucht werden darf. Dies gilt sowohl für die Modellbildung als auch für die Form und Güte der durchgeführten Implementation. Das Optimierungsmodell und damit der Optimierungsprozeß ist nur so effizient wie der schwächste Baustein in der gesamten Prozeßkette.

Aus diesem Grund ist zunächst die Sichtung, Überprüfung, Modifikation und Strukturierung der kontinuumsmechanischen Grundlagen isotroper, hyperelastischer Materialien, d.h. die **Herleitung der Spannungs- und Materialtensoren**, in Kapitel 3 durchgeführt worden. Dabei wurde besonderer Wert auf eine weitestgehende Allgemeingültigkeit unabhängig von einem speziellen Materialgesetz gelegt.

Für die Behandlung hyperelastischer Materielien sind die folgenden Aspekte berücksichtigt worden:

1. Darstellung in der Referenz- sowie in der Momentankonfiguration,
2. Behandlung unterschiedlicher Spannungs- und Verzerrungszustände (3-D-Zustand, ebener Verzerrungszustand, Axialsymmetrie, ebener Spannungszustand),

3. Behandlung kompressibler, quasi-inkompressibler und inkompressibler Materialien,

4. Behandlung von Formänderungsenergiefunktionen als Funktion der Invarianten bzw. als Funktion der Eigenwerte.

Die in der Literatur angegebenen Spannungs- und Materialtensoren weisen die folgenden Struktur auf.

- Die Spannungs- und Materialtensoren (hier z.B. der Referenzkonfiguration) werden in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \, \mathbf{Z}_i \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbb{C} = 4 \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \{ \beta_{ij} \, \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \} + \alpha_i \, \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}} \right].$$

  gebildet. Dabei stellen die $\mathbf{Z}_i$ die zweistufige tensorielle Basis des betrachteten Raumes dar, und $\mathbb{Z}_i$ sind zugehörige durch Ableitung gebildete vierstufige Tensoren. Die Summation über den Index i hängt von der Dimension des betrachteten Raumes ab und kann sich in Sonderfällen reduzieren. Die obige Struktur ist problemimmanent und somit in jeder Veröffentlichung zu finden.

- Für die Auswahl der Basen bestehen zwei natürlich gegebene Möglichkeiten zur Auswahl:

  – die Basistensoren werden direkt aus den Verzerrungstensoren $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{b}$ aufgebaut, d.h. z.B. $\{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\}$ oder $\{\mathbf{1}, \mathbf{b}, \mathbf{b}^2\}$;

  – die Basistensoren ergeben sich aus den Eigenvektoren $\mathbf{N}_i$ bzw. $\mathbf{n}_i$, d.h. z.B. $\mathbf{Z}_i = \mathbf{N}_{(i)} \otimes \mathbf{N}_{(i)}$.

Die Darstellung in dieser Arbeit erfolgte aus den folgenden Gründen bzgl. der einfach aus den Verzerrungstensoren zu ermittelnden tensoriellen Basis.

1. Für Formänderungsenergiefunktionen in Abhängigkeit der Invarianten ist die Berechnung der Eigenwerte und der Eigenvektoren nicht erforderlich.

2. Die Eigenvektoren und die daraus hergeleiteten Basistensoren können für hydrostatische und equibiaxiale Spannungszustände nicht exakt angegeben werden.

3. Für die diskrete Sensitivitätsanalyse ist die Darstellung bzgl. der Eigenvektoren ungeeignet, da diese aufwendiger berechnet werden, in den Sonderfällen nicht exakt anzugeben sind und somit in der Sensitivitätsanalyse schwieriger zu behandeln sind.

Somit ist eine Darstellung gewählt worden, die sich für Formänderungsenergiefunktionen der Invarianten in natürlicher Weise ergibt.

Für die Angabe der Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte bestand die Notwendigkeit der Ermittlung der impliziten Ableitung nach den Invarianten, die für den allgemeinen Zustand ungleicher Eigenwerte und für die Sonderfälle zusammenfallender Eigenwerte für das Ogden-Material angegeben wurde. Dieser Zugang ist in der Literatur für die Behandlung von Ogden-Materialien bisher nicht beschrieben und implementiert worden. Zudem wird durch die Angabe der exakten Materialmatrizen für die Sonderfälle hydrostatischer bzw. equibiaxialer Spannungszustände eine Lücke geschlossen, die bisher durch Störung der Eigenwerte näherungsweise als Problem mit unterschiedlichen Eigenwerten behandelt wurde.

Die Beziehungen für den ebenen Verzerrungszustand und den axialsymmetrischen Verzerrungszustand stellen Sonderfälle des dreidimensionalen Zustandes dar. Für den ebenen Spannungszustand waren gesonderte Überlegungen notwendig, die zu bisher nicht veröffentlichten Darstellungen für kompressible und inkompressible Materialien in den Größen der Momentankonfiguration und kompressiblen Materialien in der Referenzkonfiguration führten.

Insgesamt stellen das Kapitel 3, der Anhang A, B und die zugehörige Implementation in INA-OPT eine allgemeingültige, abgeschlossene Darstellung und numerische Verifikation der Spannungs- und Materialtensoren hyperelastischer Materialien dar. Damit wurde die Grundlage für die Sensitivitätsanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien in Kapitel 5 gelegt und das erste gesetzte Ziel erreicht, d.h. es wurde eine numerisch effizienten Methodik zur strukturmechanischen Berechnung angegeben.

Für die erfolgreiche Bearbeitung der Optimierungsaufgaben ist die Lösung der zweiten Zielsetzung, d.h. die **Herleitung der Sensitivitäten** bzgl. einer Änderung der Geometrie- und der Materialparameter, erarbeitet worden.

Die theoretischen Darstellungen der kontinuumsmechanischen Beziehungen (insbesondere der Geometrie, der Bilanzsätze sowie der Spannungs- und Materialtensoren) in symbolischer Tensornotation werden in vielen Veröffentlichungen und Lehrbüchern benutzt und haben ihre Leistungsfähigkeit bei der Beschreibung physikalischer Beziehungen bewiesen. Aus diesem Grund, und um die Darstellung der Sensitivitätsanalyse konsistent zur vorgenommenen Beschreibung der Spannungs- und Materialtensoren anzugeben, wurde eine kontinuumsmechanische Sichtweise der Formoptimierung formuliert.

Als Grundlage dient die Beschreibung des materiellen Körpers und seiner Konfigurationen über konvektive Koordinaten, die der Darstellung der Konfiguration eines Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit entspricht. Zur Berücksichtigung der Gestalt des Körpers wurden die Abbildungen der Kontinuumsmechanik (siehe Kapitel 2) um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert. Damit stellt die Designvariable s neben der Zeit t einen weiteren skalaren Parameter dar.

Ausgehend von diesen Grundbeziehungen wurde die von *Céa* und *Zolesio* stammende Interpretation der Formänderung als ein spezieller „Deformationsprozeß“ aus kontinuumsmechanischer Sichtweise zurückgewiesen und durch eine zur bisherigen Kontinuumsmechanik konsistente Erweiterung ersetzt. In der vorgeschlagenen Interpretation versteht sich die Formänderung als der durch die Designvariable hinreichend glatt beschriebene Übergang zwischen unterschiedlichen materiellen Körpern bzw. deren Konfigurationen. Mit dieser Darstellung ist die Sensitivitätsanalyse zu einem Bestandteil der Kontinuumsmechanik geworden und sollte in Zukunft vermehrt von den „etablierten Kontinuumsmechanikern“ aufgegriffen werden.

Die Leistungsfähigkeit dieser Darstellung ist in Abschnitt 5.2 für die variationelle Sensitivitätsanalyse aufgezeigt worden. Wie dort beschrieben wurde, können die für die Sensitivitätsanalyse erforderlichen partiellen Ableitungen der Spannungen der Referenz- und der Momentankonfiguration in formal analoger Darstellung zu den bekannten Zeitableitungen angegeben werden. Die hergeleiteten Beziehungen für die Änderung der Spannungen der Referenz- und der Momentankonfiguration sind dabei neue, bisher nicht dargestellte Erkenntnisse für die Sensitivitätsanalyse elastischer Materialien. Hieraus wurde zum einen die überragende Bedeutung der Materialtensoren und der konsistenten Formulierungen für die Sensitivitätsanalyse deutlich. Weiterhin bilden diese Darstellungen eine solide Basis, auf der eine Erweiterung der Sensitivitätsanalyse auf geschichtsabhängige Materialgesetze möglich ist.

Die variationelle Sensitivitätsanalyse ist auf der Basis der kontinuumsmechanischen Formulierungen in dem bereits für die Spannungs- und Materialmatrizen angegebenen Umfang hergeleitet und in INA-OPT realisiert worden. In Abschnitt 5.3 ist die diskrete Sensitivitätsanalyse beschrieben worden, die ebenfalls in dem beschriebenen Umfang hergeleitet und numerisch umgesetzt worden. Ein numerischer Vergleich der variationellen und der diskreten Sensitivitätsanalyse mit den numerisch bzw. semianalytisch ermittelten Ableitungen an vielen Testrechnungen zeigte die Übereinstimmung der Ergebnisse und den Rechenzeitvorteil der variationellen Sensitivitätsanalyse.

Mit der Darstellung der Sensitivitätsanalyse ist die Lösung der zweiten Aufgabenstellung gelungen.

In Kapitel 6 wurde das im Forschungspaket INA-OPT realisierte Konzept einer **Prozeßkette Optimale Formgebung** beschrieben. Als dringende Notwendigkeit für eine erfolgreiche algorithmische Abbildung der Optimierungsaufgabe erweist sich die leistungsfähige Modellbildung der Gesamtaufgabe sowie der Teilaufgaben, die sich sowohl in der Daten- als auch der Programmstruktur wiederspiegeln muß. Bei der Modellbildung und der Implementation wurde strikt beachtet, daß das Optimierungsmodell die bereits bestehenden Modelle „nur“ verknüpfen muß, jedoch keine neuen Strukturen definieren darf. Die Aufgaben der Teilmodelle Entwurfsvariablenmodell, parametrisches Geometriemodell, Technologiemodell, das Modell zur Netzgenerierung- und veränderung sowie das Strukturanalysemodell sind näher beschrieben und ihre Stellung in der Prozeßkette erläutert worden.

Mit der vorgenommenen algorithmischen Umsetzung der theoretischen Beziehungen in vollständig analytischer Form auf der Grundlage eines integrierten Daten- und Programmkonzeptes stellt das Forschungsprogrammpaket INA-OPT ein leistungsfähiges Werkzeug für weitere Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Formoptimierung dar. Insbesondere die bereits vorgenommene Integration der Netzverfeinerungsalgorithmen sowie der zugehörigen Adaptionskriterien in den Gesamtalgorithmus Optimale Formgebung ermöglicht die Untersuchung des Netzeinflusses auf den Optimierungsprozeß und zeigt die Leistungsfähigkeit der Programmkonzeption, siehe auch *Barthold et. al.* [8].

In Kapitel 7 wurde mit den dargestellten Beispielen die Leistungsfähigkeit der algorithmischen Umsetzung der Strukturoptimierung auf große elastische Deformationen aufgezeigt. Neben der Darstellung einer Gewichtsminimierung bei Einhaltung von Nebenbedingungen in der stark deformierten Momentankonfiguration wurden die Einsatzmöglichkeiten des Gesamtalgorithmus für die Bearbeitung inverser Probleme aufgezeigt. Weiterhin stellt die Untersuchung der S2-Normprobe ein praxisrelevantes Beispiel dar, bei dem durch Geometrieänderung unerwünschte Spannungsspitzen reduziert werden konnten, so daß ein unerwünschtes Reißen der Probe außerhalb des homogenen Bereiches unwahrscheinlicher wird. Zum Abschluß wurde am Beispiel der Konstruktion von PKW-Reifen gezeigt, daß berechtigte Hoffnungen bestehen, die Algorithmen der Optimalen Formgebung auch und gerade bei komplexen mechanischen Problemstellungen in der industriellen Entwicklung einsetzen zu können.

8.2 Ausblick

Für die Strukturanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien unter großen Deformationen erweist sich die Formulierung in den Größen der Momentankonfiguration als besonders geeignet. Für die effektive Bearbeitung und Ermittlung aussagekräftiger Spannungen sind die Netzverfeinerungsstrategien und -kriterien auf die besondere Situation großer Deformationen anzuwenden und anzupassen.

Der Einsatz adaptiver FE-Verfahren für die Strukturanalyse ist ein bedeutender Forschungsschwerpunkt. Eine Anwendung dieser Methoden auf die Sensitivitätsanalyse ist dringend erforderlich, da sich durch die Formänderung das Tragverhalten der Strukturen stark ändern kann. Eine Berücksichtigung dieser Phänomene wird den Optimierungsprozeß effektiver gestalten. Die Grundlagen der Interaktion zwischen Formoptimierung und Adaptivität sind in INA-OPT realisiert, siehe z.B. *Barthold et. al.* [8].

Das in der Formoptimierung benutzte Geometriemodell ist für die effektive Anwendung der Formoptimierung gerade auf praxisrelevante Strukturen der wesentliche Baustein in der Prozeßkette Formoptimierung. Aus der Sicht der Anwender muß die Konstruktion schnell und effektiv in den Entwurfsvariablen (Gerade, Kreis, Zylinder, etc.) unter Berücksichtigung von Relationen unter den definierten Objekten erstellt und auch modifiziert werden können. Andererseits ist die Auffassung der Geometrie eines Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit wesentlich für die Umsetzung theoretischer Beziehungen. Diese beiden Anforderungen sind gleichermaßen gut zu erfüllen, um Anwenderfreundlichkeit und damit Akzeptanz in der Industrie mit einer weitestgehenden Abbildung theoretischer Zusammenhänge im Algorithmus zu verknüpfen. Ein Fortschritt in dieser Richtung stellt die Integration eines kommerziell anerkannten CAD-Programmsystems in eine integrierte Daten- und Programmstruktur unter Verwendung ausschließlich analytischer Gradienten dar.

Die Grundlagen der kontinuumsmechanischen Darstellung der Sensitivitätsanalyse setzen keine Einschränkungen voraus, so daß sie auch die Grundlage der Behandlung geschichtsabhängiger Prozesse sind. Die in Abschnitt 5.2 angegebenen Sensitivitätsbeziehungen gelten zunächst nur für hyperelastische, d.h. weg- und geschichtsunabhängige Formulierungen. Ein wesentlicher Forschungserfolg wäre mit der Erweiterung der Sensitivitätsanalyse auf geschichtsabhängige Prozeße erreicht, der auf der Grundlage der für elastische Materialien erarbeiteten Beziehungen möglich ist. Hierbei ist wesentlich, daß die Sensitivitätsanalyse analog zur Strukturanalyse inkrementell erfolgen muß und die Abhängigkeit interner Variablen von der Designvariablen über die bereits bekannten Materialtensoren erfaßt werden kann.

Anhang A

Spannungs- und Materialtensoren der Momentankonfiguration

A.1 Grundlagen

Für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration erhält man mit (3.1) für den Cauchyschen Spannungstensor $\mathbf{T}$ die Darstellung der Gleichung (3.10) bzw. für den räumlichen Materialtensor $\mathbb{c}$ die Darstellung (3.11). In analoger Weise gilt für die deviatorischen Anteile des Cauchyschen Spannungstensors

$$\mathbf{T}^D = \frac{2}{J}\,\frac{\partial \overline{W}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{J}\,\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_i} \cdot \frac{\partial \overline{\mathrm{I}}_i}{\partial \mathbf{g}}$$

und für den zugehörigen Materialtensors $\mathbb{c}^D$

$$\mathbb{c}^D = \frac{4}{J}\,\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \mathbf{g}\,\partial \mathbf{g}} = \frac{4}{J}\,\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{\mathrm{I}}_i \partial \overline{\mathrm{I}}_j} \cdot \frac{\partial \overline{\mathrm{I}}_i}{\partial \mathbf{g}} \otimes \frac{\partial \overline{\mathrm{I}}_j}{\partial \mathbf{g}}\right\} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\mathrm{I}}_i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{I}}_i}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}}\right].$$

Hierin ist W die Formänderungsenergiefunktion in der funktionalen Abhängigkeit der Gleichung (2.77), bzw. $\overline{W}$ deren deviatorische Anteil nach (2.78). Da die Invarianten $i_{\mathbf{C}}$ des Rechts-Cauchy-Green-Tensors $\mathbf{C}$ mit den Invarianten $i_{\mathbf{b}}$ des Links-Cauchy-Green-Tensors $\mathbf{b}$ übereinstimmen, sind die Anteile

$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\mathrm{I}}_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \mathrm{I}_i \partial \mathrm{I}_j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{\mathrm{I}}_i \partial \overline{\mathrm{I}}_j}$$

unabhängig von der Wahl der Betrachtungsweise. Diese Anteile können somit direkt aus den entsprechenden Abschnitten des Kapitels 3 übernommen werden. Für die Darstellung in den Größen der Momentankonfiguration sind somit nur die Ableitungen der Invarianten I_i bzw. der modifizierten Invarianten $\overline{\mathrm{I}}_i$ nach der Metrik $\mathbf{g}$ zu berechnen, d.h. es gilt

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{b}, \quad \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \mathbf{g}} = \mathrm{I}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}^2, \quad \frac{\partial \mathrm{III}}{\partial \mathbf{g}} = \mathrm{III}\mathbf{g}^{-1}, \quad \frac{\partial \overline{\mathrm{I}}}{\partial \mathbf{g}} = \operatorname{dev}\overline{\mathbf{b}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \overline{\mathrm{II}}}{\partial \mathbf{g}} = \overline{\mathrm{I}}\,\operatorname{dev}\overline{\mathbf{b}} - \operatorname{dev}\overline{\mathbf{b}}^2.$$

A.2 Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien

Diese Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien für eine Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration orientiert sich an Abschnitt 3.2.

Tafel A.1: Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration

1. Bestimme die tensorielle Basis

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{g}^{-1}, \mathbf{b}, \mathbf{b}^2\}$$

isotroper, hyperelastischer Materialien in der Momentankonfiguration und bilde die Ableitung der Basis nach $\mathbf{g}$ in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbb{O} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{b}^2}{\partial \mathbf{g}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{b}}.$$

2. Bestimme die Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ für die Darstellung der Ableitung der Invarianten nach $\mathbf{g}$ bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\underline{A} = (A_{im}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{I} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}.$$

3. Berechne die Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Invarianten

$$W_{,i} = \frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_i} \quad \text{und} \quad W_{,ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathrm{I}_i \partial \mathrm{I}_j}$$

für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

4. Berechne die Koeffizienten α_i und β_{ij} in der Form

$$\alpha_m = W_{,i}\, A_{im} \qquad \text{und} \qquad \beta_{lm} = A_{il}\, W_{,ij}\, A_{jm} + W_{,i}\, \frac{\partial A_{im}}{\partial \mathrm{I}_k} A_{kl}$$

5. Bestimme den Cauchyschen Spannungstensor $\mathbf{T}$ und den zugehörigen Materialtensor $\mathbb{c}$ in der Form

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J}\, \alpha_m\, \mathbf{Z}_m \qquad \text{und} \qquad \mathbb{c} = \frac{4}{J}\, \beta_{lm}\, \mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m + 4\, \alpha_m\, \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{g}}.$$

A.3 Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien

Tafel A.2: Deviatorischer Anteil der Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration

1. Bestimme die tensorielle Basis

$$\overline{\mathbf{Z}}_1 = \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mathbf{Z}}_2 = \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}^2$$

   und bilde die Ableitung der Basis nach $\mathbf{g}$ in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\mathbf{Z}}_1}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3}\bar{\mathrm{I}}\left\{ \mathbb{1}_{\mathbf{g}^{-1}} - \frac{1}{3}\mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \right\} \\
&- \frac{1}{3}\left\{ \overline{\mathbf{Z}}_1 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{Z}}_1 \right\} \\
\frac{\partial \overline{\mathbf{Z}}_2}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3}\operatorname{tr} \overline{\mathbf{b}}^2 \; \mathbb{1}_{\mathbf{g}^{-1}} + J^{-4/3}\; \mathbb{1}_{\mathbf{b}} - \frac{2}{9}\operatorname{tr} \overline{\mathbf{b}}^2 \; \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \\
&- \frac{2}{3}\left\{ \overline{\mathbf{Z}}_2 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{Z}}_2 \right\}
\end{aligned}$$

2. Bestimme die Koeffizientenmatrix $\underline{\overline{A}}$ für die Darstellung der Ableitung der modifizierten Invarianten nach $\mathbf{g}$ bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\underline{\overline{A}} = \left(\overline{A}_{im}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\mathrm{I}} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Berechne die Ableitungen des deviatorischen Anteils $\overline{W}$ an der Formänderungsenergie W nach den modifizierten Invarianten

$$\overline{W}_{,i} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{\mathrm{I}}_i} \quad \text{und} \quad \overline{W}_{,ij} = \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \bar{\mathrm{I}}_i \partial \bar{\mathrm{I}}_j}$$

   für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

4. Berechne die Koeffizienten $\overline{\alpha}_i$ und $\overline{\beta}_{ij}$ in der Form

$$\overline{\alpha}_m = \overline{W}_{,i}\, \overline{A}_{im} \qquad \text{und} \qquad \overline{\beta}_{lm} = \overline{A}_{il}\, \overline{W}_{,ij}\, \overline{A}_{jm} + \overline{W}_{,i}\, \frac{\partial \overline{A}_{im}}{\partial \bar{\mathrm{I}}_k} \overline{A}_{kl}$$

5. Bestimme die deviatorischen Anteile $\mathbf{T}^D$ und $\mathbb{c}^D$ in der Form

$$\mathbf{T}^D = \frac{2}{J}\,\overline{\alpha}_m\, \overline{\mathbf{Z}}_m \qquad \text{und} \qquad \mathbb{c}^D = \frac{4}{J}\,\overline{\beta}_{lm}\, \overline{\mathbf{Z}}_l \otimes \overline{\mathbf{Z}}_m + 4\,\overline{\alpha}_m\, \frac{\partial \overline{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{g}}.$$

A.4 Der ebene Spannungszustand bei kompressiblen Materialien

Die Berechnung orientiert sich an der Darstellung des Abschnitt 3.4, wobei besondere Überlegungen zum Ablauf der lokalen Iteration vorzunehmen sind. In diesem Fall ist die Spannungskomponente T_{33} des Cauchyschen Spannungstensors $\mathbf{T}$ abhängig vom Links-Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{b}$ und mit der Definition

$$\mathbf{G} := \frac{J}{2}\,\mathbf{b}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{b}^{-1}\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \tag{A.1}$$

ergibt sich die Aussage

$$T_{33} = \hat{T}_{33}(b_{33}) = 0 \Longleftrightarrow G_{33} = \hat{G}_{33}(b_{33}) = 0, \tag{A.2}$$

da der (33)-Anteil von $\mathbf{T}$ durch die spezielle Kinematik der Scheibe entkoppelt von den ebenen Anteilen ist. Somit folgt analog zu (3.54) und (3.55) mit

$$G_{33}^{k+1} = 0 = G_{33}^{k} + \left.\frac{\partial G_{33}}{\partial b_{33}}\right|_{b_{33}^{k}} \left(b_{33}^{k+1} - b_{33}^{k}\right) \tag{A.3}$$

und den Komponenten T_{33} und $\mathfrak{c}_{3333}$ die lokale Iterationsvorschrift zur Erfüllung der Bedingung $T_{33} = 0$ des ebenen Spannungszustandes in der Form

$$\boxed{b_{33}^{k+1} = b_{33}^{k} - \left\{ \left.\frac{\partial G_{33}}{\partial b_{33}}\right|_{b_{33}^{k}} \right\}^{-1} G_{33}^{k} = b_{33}^{k} - 2\;b_{33}^{k}\,\frac{T_{33}^{k}}{\mathfrak{c}_{3333}^{k}}.} \tag{A.4}$$

Damit kann der Spannungstensor $\mathbf{T}_{esz}$ des ebenen Spannungszustandes entsprechend Gleichung (3.56) in der Form

$$\boxed{\mathbf{T}_{esz} = \frac{2}{J}\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}}} \tag{A.5}$$

angegeben werden und der zugehörige Kirchhoff–Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ eribt sich zu

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{T} = 2\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}}. \tag{A.6}$$

Mit der Lie-Ableitung von $\boldsymbol{\tau}$ in der Form

$$L_{\mathbf{v}}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}\partial \mathbf{g}} : \mathbf{d}, \tag{A.7}$$

wobei $\mathbf{d}$ den räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor darstellt, und der Bedingung $L_{\mathbf{v}}\left(\boldsymbol{\tau}\right)|_{33} = 0$ folgt analog zu Abschnitt 3.4.3

$$0 = L_{\mathbf{v}}\left(\boldsymbol{\tau}\right)|_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33}\partial \mathbf{g}_{esz}} : \mathbf{d}_{esz} + \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33}\partial g_{33}} \cdot d_{33}. \tag{A.8}$$

Damit ergibt sich die Komponente d_{33} des räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\mathbf{d}$ zu

$$d_{33} = \left[- \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial g_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial \mathbf{g}_{esz}} \right] : \mathbf{d}_{esz}. \tag{A.9}$$

Hieraus folgt der räumliche Materialtensor des ebenen Spannungszustandes zu

$$\boxed{\mathbb{c}_{esz} = \frac{4}{J} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial \mathbf{g}_{esz}} - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial g_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \otimes \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \right\}.} \tag{A.10}$$

A.5 Der ebene Spannungszustand bei inkompressiblen Materialien

Für inkompressible Materialien berechnet sich die Dickenänderung b_{33} bzw. die Änderung von b_{33} entsprechend den Gleichungen (3.63) und (3.64) zu

$$b_{33} = \hat{b}_{33}(\mathbf{b}_{esz}) = \frac{1}{\det \mathbf{b}_{esz}} = \frac{1}{b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{12}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial b_{33}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} = -b_{33}\, \mathbf{g}_e^{-1}. \tag{A.11}$$

Damit ergibt sich der ebene Anteil des Cauchysche Spannungstensors $\mathbf{T}$ analog (3.67) zu

$$\boxed{\mathbf{T}_{esz} = \frac{2}{J} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial \overline{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial b_{33}} \frac{\partial b_{33}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} \right\} = \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial \overline{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} - \frac{\partial \overline{W}}{\partial g_{33}}\, \mathbf{g}_{esz}^{-1} \right\}} \tag{A.12}$$

und der Materialtensor $\mathbb{c}_{esz}$ zu

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{J}{4}\, \mathbb{c}_{esz} &= \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial \mathbf{g}_{esz}} - \frac{\partial \overline{W}}{\partial g_{33}} \frac{\partial \mathbf{g}_{esz}^{-1}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} \\ &- \left\{ \mathbf{g}_{esz}^{-1} \otimes \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \otimes \mathbf{g}_{esz}^{-1} \right\} \\ &+ \left\{ b_{33} \frac{\partial}{\partial b_{33}} \left(b_{33} \frac{\partial \overline{W}}{\partial b_{33}} \right) \right\} \mathbf{g}_{esz}^{-1} \otimes \mathbf{g}_{esz}^{-1}. \end{aligned}} \tag{A.13}$$

Anhang B

Hinweise zur Implementation der geometrischen Größen

B.1 Darstellung der Basistensoren

Der Ausgangspunkt der numerischen Aufbereitung der in Kapitel 3 und im Anhang A aufgestellten tensoriellen Beziehungen bildet die Darstellung des materiellen Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ bzgl. beliebiger krummliniger Basissysteme der Referenz- und der Momentankonfiguration. In der Referenzkonfiguration tritt dabei die kovariante Basis $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$ bzw. die kontravariante Basis $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$ auf. In der Momentankonfiguration wird die kovariante Basis mit $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ und die kontravariante Basis $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$ bezeichnet. Man beachte, daß die Metriktensoren mit $\mathbf{G}$ und $\mathbf{g}$, d.h. mit dem gleichen Buchstaben, jedoch ohne Indizes, bezeichnet werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{G} = G_{ij}\, \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{-1} = G^{ij}\, \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \\ \mathbf{1} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{g} = g_{ij}\, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^{-1} = g^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \end{aligned}$$

Für eine genauere Beschreibung der differentialgeometrischen Zusammenhänge sei auf *Marsden, Hughes* [59] verwiesen. Für den materiellen Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ gilt damit

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \tag{B.1}$$

Somit können die im Kapitel 3 eingeführten Tensoren in der Vektorbasis der Referenz- bzw. Momentankonfiguration dargestellt werden.

- Referenzkonfiguration

$$\mathbf{C}^{-1} = g^{ij}\, \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}^{-1} = G^{ij}\, \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = g_{kl}\, G^{ki}\, G^{lj}\, \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$$

- Momentankonfiguration

$$\mathbf{g}^{-1} = g^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{b} = G^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^2 = g_{kl}\, G^{ki}\, G^{lj}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

- Referenzkonfiguration mit multiplikativen Split ($\operatorname{tr}\mathbf{C}^2 = 2\mathrm{II}_\mathbf{C} - \mathrm{I}_\mathbf{C}^2$)

$$\begin{aligned}\operatorname{dev}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} &= J^{-2/3}\left(\mathbf{G}^{-1} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\right)\\ \operatorname{dev}\overline{\mathbf{C}}^2\mathbf{C}^{-1} &= J^{-4/3}\left(\mathbf{C} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}^2\mathbf{C}^{-1}\right)\end{aligned}$$

- Momentankonfiguration mit multiplikativen Split ($\operatorname{tr}\mathbf{b}^2 = 2\mathrm{II}_\mathbf{b} - \mathrm{I}_\mathbf{b}^2$)

$$\begin{aligned}\operatorname{dev}\overline{\mathbf{b}} &= J^{-2/3}\left(\mathbf{b} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{b}\,\mathbf{g}^{-1}\right)\\ \operatorname{dev}\overline{\mathbf{b}}^2 &= J^{-4/3}\left(\mathbf{b}^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{b}^2\,\mathbf{g}^{-1}\right)\end{aligned}$$

B.2 Ableitung der Basistensoren

Die Ableitung der Basistensoren erfolgt in der Referenzkonfiguration nach $\mathbf{C}$, d.h. nach

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \left(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i\right)\left(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j\right) = g_{ij}\,\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \tag{B.2}$$

Für die Ableitung eines Tensors $\mathbf{A} = A^{ij}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$ nach $\mathbf{C}$ bedeutet die symbolische Schreibweise

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial g_{kl}}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \tag{B.3}$$

Analog gilt dies für die Ableitung eines Tensors $\mathbf{a} = a^{ij}\,\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ der Momentankonfiguration nach $\mathbf{g}$, d.h. nach $\mathbf{g} = g_{ij}\,\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$, die sich zu

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{g}} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial g_{kl}}\,\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \tag{B.4}$$

ergibt.

Als Beispiel seien die Ableitungen der Basistensoren $\mathbf{C}^{-1}, \mathbf{G}^{-1}$ und $\mathbf{C}$ der Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration angegeben. Hierfür gilt

$$\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}} = \frac{\partial(g^{ij}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j)}{\partial(g_{kl}\,\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l)} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l.$$

Mit der Ableitung des Kronecker-Deltas δ^i_m nach g_{kl} folgt

$$0 = \frac{\partial\delta^i_m}{\partial g_{kl}} = \frac{\partial g^{ij}\,g_{jm}}{\partial g_{kl}} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}}\,g_{jm} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial g_{kl}}\,g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}}\,g_{jm} + g^{ij}\,\delta^k_j\,\delta^l_m.$$

Nach der Multiplikation mit g^{mn} folgt hieraus

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} = -g^{ik}\,g^{jl},$$

d.h. die Ableitung von $\mathbf{C}^{-1}$, sowie in analoger Weise die Ableitungen von $\mathbf{G}^{-1}$ und $\mathbf{C}$, nach $\mathbf{C}$ ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= -g^{ik}\, g^{jl}\; \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l =: -\mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}}, \\
\frac{\partial \mathbf{G}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbb{0}, \\
\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} &= G^{ik}\, G^{jl}\; \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l =: \mathbb{1}_{\mathbf{G}^{-1}}.
\end{aligned}
$$

In analoger Weise ergeben sich die Ableitungen der Basistensoren der Momentankonfiguration nach $\mathbf{g}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} &= -g^{ij}\, g^{jl}\; \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l =: -\mathbb{1}_{\mathbf{g}^{-1}}, \\
\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{g}} &= \mathbb{0}, \\
\frac{\partial \mathbf{b}^2}{\partial \mathbf{g}} &= G^{ik}\, G^{jl}\; \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l =: \mathbb{1}_{\mathbf{b}}
\end{aligned}
$$

sowie der modifizierten Basistensoren bei Verwendung der multiplikativen Zerlegung in der Referenzkonfiguration

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{C}} \left[\mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \\
&- \frac{1}{3} \left[\left(\operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} \right) \right], \\
\frac{\partial \operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}^2\mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{C}}^2\; \mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}} + J^{-4/3}\; \mathbb{1}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{2}{9} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{C}}^2\; \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\
&- \frac{2}{3} \left[\left(\operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}^2\mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\operatorname{dev} \overline{\mathbf{C}}^2\mathbf{C}^{-1} \right) \right]
\end{aligned}
$$

und der Momentankonfiguration

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{b}} \left[\mathbb{1}_{\mathbf{g}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \right] \\
&- \frac{1}{3} \left[\operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}^2 \right], \\
\frac{\partial \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}^2}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{b}}^2\; \mathbb{1}_{\mathbf{g}^{-1}} + J^{-4/3}\; \mathbb{1}_{\mathbf{b}} - \frac{2}{9} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{b}}^2\; \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \\
&- \frac{2}{3} \left[\operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}^2 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}^2 \right].
\end{aligned}
$$

Innerhalb dieser Arbeit ist die Allgemeingültigkeit der obigen Beziehungen nicht beibehalten worden, vielmehr wird in der jeweiligen Konfiguration ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, d.h. für die Beschreibung in der Referenzkonfiguration gilt $G^{ij} = \delta^{ij}$ bzw. in der Momentankonfiguration $g^{ij} = \delta^{ij}$.

B.3 Speicherdarstellung eines Tensors vierter Stufe

Für die Materialtensoren $\mathbb{C}$ der Referenz- bzw. $\mathbb{c}$ der Momentankonfiguration, die sich aus Anteilen der dyadischen Produkte der zweistufigen Basistensoren $\mathbf{Z}_i$ bzw. $\overline{\mathbf{Z}}_i$ und aus Anteilen der Ableitungen der Basistensoren nach $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{g}$ zusammensetzen, ist für die numerische Umsetzung eine geeignete Darstellung in Matrizenschreibweise anzugeben. Hierzu wird beispielhaft das Inkrement des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors $\dot{\mathbf{S}}$ betrachtet, das sich aus dem Inkrement des Greenschen Verzerrungstensors $\dot{\mathbf{E}}$ mit Hilfe des Materialtensors in der Form

$$\boxed{\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}}$$

bzw. als

$$\dot{S}^{ij}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \left(\mathbb{C}^{ijlm}\,\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_l \otimes \mathbf{G}_m\right) : \left(\dot{E}_{rs}\,\mathbf{G}^r \otimes \mathbf{G}^s\right) = \mathbb{C}^{ijlm}\,\dot{E}_{lm}\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$$

und damit

$$\dot{S}^{ij} = \mathbb{C}^{ijlm}\,\dot{E}_{lm}.$$

Diese Beziehung kann in der Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{S}^{11} \\ \dot{S}^{22} \\ \dot{S}^{33} \\ \dot{S}^{12} \\ \dot{S}^{23} \\ \dot{S}^{13} \\ \dot{S}^{21} \\ \dot{S}^{32} \\ \dot{S}^{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\mathbb{C}^{1111} & \mathbb{C}^{1122} & \mathbb{C}^{1133} & \mathbb{C}^{1112} & \mathbb{C}^{1123} & \mathbb{C}^{1113} & \mathbb{C}^{1121} & \mathbb{C}^{1132} & \mathbb{C}^{1131} \\
\mathbb{C}^{2211} & \mathbb{C}^{2222} & \mathbb{C}^{2233} & \mathbb{C}^{2212} & \mathbb{C}^{2223} & \mathbb{C}^{2213} & \mathbb{C}^{2221} & \mathbb{C}^{2232} & \mathbb{C}^{2231} \\
\mathbb{C}^{3311} & \mathbb{C}^{3322} & \mathbb{C}^{3333} & \mathbb{C}^{3312} & \mathbb{C}^{3323} & \mathbb{C}^{3313} & \mathbb{C}^{3321} & \mathbb{C}^{3332} & \mathbb{C}^{3331} \\
\mathbb{C}^{1211} & \mathbb{C}^{1222} & \mathbb{C}^{1233} & \mathbb{C}^{1212} & \mathbb{C}^{1223} & \mathbb{C}^{1213} & \mathbb{C}^{1221} & \mathbb{C}^{1232} & \mathbb{C}^{1231} \\
\mathbb{C}^{2311} & \mathbb{C}^{2322} & \mathbb{C}^{2333} & \mathbb{C}^{2312} & \mathbb{C}^{2323} & \mathbb{C}^{2313} & \mathbb{C}^{2321} & \mathbb{C}^{2332} & \mathbb{C}^{2331} \\
\mathbb{C}^{1311} & \mathbb{C}^{1322} & \mathbb{C}^{1333} & \mathbb{C}^{1312} & \mathbb{C}^{1323} & \mathbb{C}^{1313} & \mathbb{C}^{1321} & \mathbb{C}^{1332} & \mathbb{C}^{1331} \\
\mathbb{C}^{2111} & \mathbb{C}^{2122} & \mathbb{C}^{2133} & \mathbb{C}^{2112} & \mathbb{C}^{2123} & \mathbb{C}^{2113} & \mathbb{C}^{2121} & \mathbb{C}^{2132} & \mathbb{C}^{2131} \\
\mathbb{C}^{3211} & \mathbb{C}^{3222} & \mathbb{C}^{3233} & \mathbb{C}^{3212} & \mathbb{C}^{3223} & \mathbb{C}^{3213} & \mathbb{C}^{3221} & \mathbb{C}^{3232} & \mathbb{C}^{3231} \\
\mathbb{C}^{3111} & \mathbb{C}^{3122} & \mathbb{C}^{3133} & \mathbb{C}^{3112} & \mathbb{C}^{3123} & \mathbb{C}^{3113} & \mathbb{C}^{3121} & \mathbb{C}^{3132} & \mathbb{C}^{3131}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ \dot{E}_{12} \\ \dot{E}_{23} \\ \dot{E}_{13} \\ \dot{E}_{21} \\ \dot{E}_{32} \\ \dot{E}_{31} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Mit der Definition der Matrizen der wesentlichen Komponenten des Inkrementes des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors in der Form

$$\underline{\dot{S}} := \begin{pmatrix} \dot{S}^{11} \\ \dot{S}^{22} \\ \dot{S}^{33} \\ \dot{S}^{12} \\ \dot{S}^{23} \\ \dot{S}^{13} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\dot{E}} := \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ 2\,\dot{E}_{12} \\ 2\,\dot{E}_{23} \\ 2\,\dot{E}_{13} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

ergibt sich aufgrund der Symmetrie $\dot{S}^{ij} = \dot{S}^{ji}$ und $\dot{E}_{ij} = \dot{E}_{ji}$ die Darstellung

$$\underline{\dot{S}} = \underline{\mathbb{C}}\,\underline{\dot{E}}. \tag{B.6}$$

Hierbei erhält die Materialmatrix $\underline{\mathbb{C}}$ die Form

$$\underline{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{1111} & \mathbb{C}^{1122} & \mathbb{C}^{1133} & \frac{\mathbb{C}^{1112}+\mathbb{C}^{1121}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1123}+\mathbb{C}^{1132}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1113}+\mathbb{C}^{1131}}{2} \\ \mathbb{C}^{2211} & \mathbb{C}^{2222} & \mathbb{C}^{2233} & \frac{\mathbb{C}^{2212}+\mathbb{C}^{2221}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2223}+\mathbb{C}^{2232}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2213}+\mathbb{C}^{2231}}{2} \\ \mathbb{C}^{3311} & \mathbb{C}^{3322} & \mathbb{C}^{3333} & \frac{\mathbb{C}^{3312}+\mathbb{C}^{3321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{3323}+\mathbb{C}^{3332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{3313}+\mathbb{C}^{3331}}{2} \\ \mathbb{C}^{1211} & \mathbb{C}^{1222} & \mathbb{C}^{1233} & \frac{\mathbb{C}^{1212}+\mathbb{C}^{1221}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1223}+\mathbb{C}^{1232}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1213}+\mathbb{C}^{1231}}{2} \\ \mathbb{C}^{2311} & \mathbb{C}^{2322} & \mathbb{C}^{2333} & \frac{\mathbb{C}^{2312}+\mathbb{C}^{2321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2323}+\mathbb{C}^{2332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2313}+\mathbb{C}^{2331}}{2} \\ \mathbb{C}^{1311} & \mathbb{C}^{1322} & \mathbb{C}^{1333} & \frac{\mathbb{C}^{1312}+\mathbb{C}^{1321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1323}+\mathbb{C}^{1332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1313}+\mathbb{C}^{1331}}{2} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

Für die Speicherung der symmetrischen Materialmatrix $\underline{\mathbb{C}}$ kann die Column-Heigh-Technik benutzt werden, bei der die Matrix als Vektor in gepackter Form

$$\underline{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_4 & D_7 & D_{11} & D_{16} \\ & D_3 & D_5 & D_8 & D_{12} & D_{17} \\ & & D_6 & D_9 & D_{13} & D_{18} \\ & & & D_{10} & D_{14} & D_{19} \\ & & & & D_{15} & D_{20} \\ & & & & & D_{21} \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

abgespeichert wird. Ein Vergleich der Darstellungen (B.7) und (B.8) liefert sofort die Werte der Einträge $D_1 \ldots D_{21}$.

Anhang C

Bezeichnungen

In diesem Kapitel des Anhangs wird die zum Verständnis erforderliche, wesentliche Notation zusammengefaßt. In den einzelnen Abschnitten treten weitere Bezeichnungen auf, die dort erklärt sind und für die nachfolgenden Abschnitte und Kapitel keine Bedeutung haben.

Bei der Wahl der Notation konnte nicht in jedem Fall das Auftreten mehrerer Bedeutungen für eine Bezeichnung unterbleiben, da eine Überfrachtung mit Indizes vermieden werden sollte. Eine Liste dieser Doppelbedeutungen ist am Ende der Übersicht angegeben.

Notation	**Bedeutung**
	Skalare, Vektoren, Tensoren, Matrizen
$\alpha, \beta, \cdots$	Darstellung von Skalaren durch kleine griechische Buchstaben
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \cdots$	Darstellung von Vektoren durch fette kleine lateinische Buchstaben (Ausnahme: $\mathbf{X}$ für den Ortsvektor des materiellen Punktes zur Referenzzeit $t_\circ$).
$\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{F}, \cdots$	Darstellung von Tensoren zweiter Stufe durch fette große lateinische Buchstaben (Ausnahme: $\mathbf{b}$ für den Links-Cauchy-Green-Tensor).
$\mathbf{1}, \mathbf{0}$	Zweistufiger Einheits- bzw. Nulltensor
$\mathbb{C}, \mathbb{c}, \mathbb{P}, \mathbb{Z} \cdots$	Darstellung von Tensoren vierter Stufe durch Hinzufügen eines Aufstriches im Buchstaben an geeigneter Stelle
$\mathbb{1}, \mathbb{O}$	Vierstufiger Einheits- bzw. Nulltensor
	Indizes
Index $t_\circ, \circ$	Bezug auf die Größen der Referenzkonfiguration zur Zeit $t_\circ$

Index t	Bezug auf die Größen der Momentankonfiguration zur Zeit t
Index s	Abhängigkeit von der Designvariablen s
Index esz	Kennzeichnung der Größen des ebenen Spannungszustandes
Index h	Kennzeichnung diskreter Größen
Index (i)	Kennzeichnung des Anteils des i-ten finiten Elementes an der kontinuumsmechanischen Größe
Index D	Kennzeichnung des deviatorischen Anteils der kontinuumsmechanischen Größe
Index K	Kennzeichnung des Kugeltensoranteils der kontinuumsmechanischen Größe
$\overline{\{\bullet\}}$	Kennzeichnung des isochoren Anteils der kontinuumsmechanischen Größe

Operatoren

Für die Vektoren $\mathbf{a} = a^i\ \mathbf{g}_i$ und die Tensoren $\mathbf{b} = b^i_j\ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ werden die nachfolgend angegebenen Operatoren eingeführt. Für die Darstellung in den Größen der Referenzkonfiguration treten die entsprechenden materiellen Größen auf.

tr	Spur-Operator $\mathrm{tr}\,\mathbf{b} = b^i_i$
det	Determinanten-Operator
Div	materieller Divergenz-Operator
div	räumlicher Divergenz-Operator
Grad	materieller Gradienten-Operator
grad	räumlicher Gradienten-Operator
dev	Deviator der kontinuumsmechanischen Größe $\mathrm{dev}\{\bullet\} = \{\bullet\} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\{\bullet\}\ \mathbf{1}$
$\dfrac{D}{Dt}$	materielle Zeitableitung
$L_{\mathbf{v}}\,(\bullet)$	Lie-Ableitung einer kontinuumsmechanischen Größe

Vektorräume, Basis, Metrik

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^3$	Vektorraum der Zahlentrippel
P	Raumpunkt des Euklidischen Punktraumes $P \in \mathbb{E}^3$
$\mathbb{E}^3$	Euklidischer Vektorraum (mit Bezugspunkt, Basis)
$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	Raumfeste kartesische Basis zur Zeit t
$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$	Raumfeste kartesische Basis zur Referenzzeit $t_\circ$
$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$	Beliebige kovariante Basis zur Zeit t

$\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$	Zugehörige kontravariante Basis $\mathbf{g}^i = g^{ik}\, \mathbf{g}_k$
$\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$	Beliebige kovariante Basis zur Referenzzeit $t_\circ$
$\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$	Zugehörige kontravariante Basis $\mathbf{G}^A = G^{AB}\, \mathbf{G}_B$
g^{ij}, g_{ij}	Ko- und kontravariante Metrikkoeffizienten zur Zeit t $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$ und $g^{ij}\, g_{jk} = \delta^i_k$
$\mathbf{g} = g^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$	Metriktensor der Momentankonfiguration zur Zeit t
G^{AB}, G_{AB}	Ko- und kontravariante Metrikkoeffizienten zur Zeit $t_\circ$ $G_{AB} = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}_B$, $G^{AB} = \mathbf{G}^A \cdot \mathbf{G}^B$ und $G^{AB}\, G_{BC} = \delta^A_C$
$\mathbf{G} = G^{AB}\, \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}_B$	Metriktensor der Referenzkonfiguration zur Referenzzeit $t_\circ$

Parameterräume

$t, t_\circ$	beliebiger Zeitpunkt t, Referenzzeitpunkt $t_\circ = 0$
$\mathcal{T}_t$	Eindimensionaler Raum der Zeitpunkte $\mathcal{T}_t = I\!R$
$\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\}$	Konvektive Koordinaten
$\mathcal{T}_\Theta$	Dreidimensionaler Raum der konvektiven Koordinaten $\mathcal{T}_\Theta = [0,1]^3$
$s, s_\circ$	Designvariable, Startwert der Designvariablen
$\mathcal{T}_s$	Eindimensionaler Raum der Designvariablen $\mathcal{T}_s = I\!R$

Materieller Körper

$\mathcal{B}$	Kontinuum (materieller Körper im Anschauungsraum ohne Metrik)
$\mathcal{M}$	Materieller Punkt des Kontinuums $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$
$\partial\mathcal{B}$	Berandung des Kontinuums $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\sigma \cup \partial\mathcal{B}_u$, $\partial\mathcal{B}_\sigma \cap \partial\mathcal{B}_u = \emptyset$
$\partial\mathcal{B}_u$	Teil der Berandung von $\mathcal{B}$ mit vorgegebenen Verschiebungsfeld
$\partial\mathcal{B}_\sigma$	Teil der Berandung von $\mathcal{B}$ mit vorgegebener Oberflächenspannung
B	Raum aller materieller Körper

Bewegung, Konfiguration

χ	Abbildung der materiellen Punkte $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ und der Zeit $t \in \mathcal{T}_t$ auf die Raumpunkte $P \in I\!E^3$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$
$\chi_\circ, \chi_t$	Abbildung der materiellen Punkte $\mathcal{M}$ auf die Raumpunkte P zur Referenzzeit $t_\circ$ bzw. zu einem bestimmten festgehaltenen Zeitpunkt t.
$\Phi_{t,t_\circ}$	Abbildung der Referenzkonfiguration $\mathbf{B}_\circ$ auf die Momentankonfiguration $\mathbf{B}_t$
ω	Abbildung der konvektiven Koordinaten $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ auf die materiellen Körper.

	In Kapitel 5 um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert.
ψ	Abbildung der konvektiven Koordinaten $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ und der Zeit t auf die kartesischen Koordinaten der Konfiguration des materiellen Körpers. In Kapitel 5 um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert.
$\mathbf{B}_t$	Momentankonfiguration des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ zum beliebigen Zeitpunkt t, d.h. $\mathbf{B}_t = \chi_t(\mathcal{B})$, mit der Oberfläche $\partial\mathbf{B}_t$ aus den Anteilen $\partial\mathbf{B}_{t\sigma}$ mit vorgegebener Spannung und $\partial\mathbf{B}_{tu}$ mit vorgegebener Verschiebung und $\partial\mathbf{B}_t = \partial\mathbf{B}_{t\sigma} \cup \partial\mathbf{B}_{tu}$, $\partial\mathbf{B}_{t\sigma} \cap \partial\mathbf{B}_{tu} = \emptyset$
$\mathbf{B}_\circ$	Referenzkonfiguration des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ zur Referenzzeit $t_\circ$, d.h. $\mathbf{B}_\circ = \chi_\circ(\mathcal{B})$, mit der Oberfläche $\partial\mathbf{B}_\circ$ aus den Anteilen $\partial\mathbf{B}_{\circ\sigma}$ mit vorgegebener Spannung und $\partial\mathbf{B}_{\circ u}$ mit vorgegebener Verschiebung und $\partial\mathbf{B}_\circ = \partial\mathbf{B}_{\circ\sigma} \cup \partial\mathbf{B}_{\circ u}$, $\partial\mathbf{B}_{\circ\sigma} \cap \partial\mathbf{B}_{\circ u} = \emptyset$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes zu dem beliebigen Zeitpunkt t, d.h. $\mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) = \chi_t(\mathcal{M})$.
$\mathbf{X}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes zur Referenzzeit $t_\circ$, d.h. $\mathbf{X} = \chi(\mathcal{M}, t_\circ) = \chi_{t_\circ}(\mathcal{M}) = \chi_\circ(\mathcal{M})$
x^1, x^2, x^3	Koeffizienten von $\mathbf{x}$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
X^1, X^2, X^3	Koeffizienten von $\mathbf{X}$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$
$\rho, \rho_\circ$	Massendichte in der Momentan- bzw. der Referenzkonfiguration
$\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}$	Geschwindigkeit
$\ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}$	Beschleunigung
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor

Verzerrungen

$\mathbf{F}$	Materieller Deformationsgradient $\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x}$
J	Jakobische Funktionaldeterminante $J = \det \mathbf{F}$
$\mathbf{H}$	Materieller Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \operatorname{Grad} \mathbf{x}$
$\mathbf{U}$	Rechts-Streck-Tensor (symmetrischer, positiv definiter Tensor)
$\mathbf{V}$	Links-Streck-Tensor (symmetrischer, positiv definiter Tensor)
$\mathbf{R}$	Drehtensor (eigentlich orthogonaler Tensor)
$\mathbf{C}$	Rechts-Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{F}$
$\mathbf{b}$	Links-Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{b} = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^T$
$\mathbf{E}$	Greenscher Verzerrungstensor $2\,\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{1}$
$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$	Invarianten eines zweistufigen Tensors (gekennzeichnet durch den Index), weitere Bezeichnungen $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ und $i_{\mathbf{C}}$ (bzw. $i_{\mathbf{b}}$) für die Invarianten von $\mathbf{C}$ (bzw. $\mathbf{b}$)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Eigenwerte des Rechts- und Links-Streck-Tensors $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$

Längen-, Flächen- und Volumenelemente

$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$	Längenelemente $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration und $d\mathbf{X}$ in der Referenzkonfiguration mit $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$
dv, dV	Volumenelemente dv in der Momentankonfiguration und dV in der Referenzkonfiguration mit $dv = \det\ \mathbf{F}\ dV$
$d\mathbf{a}, d\mathbf{A}$	Flächenelemente $d\mathbf{a}$ in der Momentankonfiguration und $d\mathbf{A}$ in der Referenzkonfiguration mit $d\mathbf{a} = \det \mathbf{F}(\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{A}$

Zeitliche Ableitungen

$\dot{\mathbf{F}}$	Zeitliche Ableitung des materiellen Deformationsgradienten
$\mathbf{l}$	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\ \mathbf{F}^{-1}$
$\mathbf{d}$	Räumlicher Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $2\ \mathbf{d} = \mathbf{l} + \mathbf{l}^T$
$\dot{\mathbf{T}}, \dot{\boldsymbol{\tau}}, \dot{\mathbf{S}}$	Zeitliche Änderung der Spannungstensoren
$\dot{\mathbf{C}}$	Zeitliche Änderung des Rechts-Cauchy-Green-Tensors

Spannungs- und Materialtensoren

$\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{t}}_\circ$	Eingeprägte Oberflächenkraftdichte
$\overline{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{k}}_\circ$	Eingeprägte Volumenkraftdichte
$\mathbf{T}$	Cauchyscher Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoff-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau} = J\ \mathbf{T}$
$\mathbf{P}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}\ \mathbf{F}^{-T}$
$\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\ \mathbf{P}$
$\mathbb{C}$	Materialtensor der Referenzkonfiguration
$\mathbb{c}$	Materialtensor der Momentankonfiguration
$\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}$	Basistensoren für die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren
$\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}$	vierstufige Tensoren der Ableitung der Basistensoren nach $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{g}$
$\underline{A}, \underline{\overline{A}}$	Matrix der Koeffizienten der Ableitung der Invarianten nach $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{g}$ bzgl. der Basis $\mathbf{Z}$
α_m, β_{lm}	Koeffizienten bei der Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren

Materialparameter

E	Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl

μ	Schubmodul
μ_p, α_p	Materialparameter im Ogden-Materialgesetz

Potentialfunktionen

W	Formänderungsenergiefunktion $W = \overline{W} + U$
Ψ	freie Helmholtzenergie mit $W = \rho_\circ \, \Psi$
$\overline{W}$	Anteil der isochoren Deformation an der Formänderungsenergiefunktion
U	Anteil der volumetrischen Deformation an der Formänderungsenergiefunktion $U = \hat{U}(J)$
$\check{W}, \check{\overline{W}}$	Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Invarianten
$\tilde{W}, \tilde{\overline{W}}$	Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte
Π	Gesamte Potentielle Energie
Π_a	Potential der äußeren Kräfte
θ	Feldgröße für das erweiterte Energiefunktional
p	Hydrostatischer Druck
Π_L	erweitertes Energiefunktional (Lagrangefunktional)
g, G	schwache Form des Gleichgewichts
$\boldsymbol{\eta}$	Testfunktion

Finite-Elemente-Methode, diskrete Größen

g_h, G_h	diskrete Form der schwachen Form des Gleichgewichts
$\underline{g}, \underline{G}$	Matrixform der schwachen Form des Gleichgewichts
$\underline{V}$	globaler Knotenverschiebungsvektor
$\underline{K}_T$	tangentiale Steifigkeitsmatrix
ξ_1, ξ_2, ξ_3	Lokale Koordinaten des isoparametrischen Konzepts
N^k	Ansatzfunktion des k-ten Elementknotens im isoparametrischen Konzept

Sensitivitätsanalyse

φ	Kontinuierliche Problemfunktion $\varphi = \hat{\varphi}(s, \hat{\mathbf{u}}(s))$

Doppelbedeutung in der Notation

$\overline{\{\bullet\}}$ 1.) Kennzeichnung isochorer Größen bei der multiplikativen Aufspaltung des materiellen Deformationsgradienten nach (2.20), d.h. insbesondere $\overline{W}, \overline{\mathrm{I}_k}, \overline{\lambda_i}$

	2.)	Darstellung der Größen an der Stelle der Linearisierung
	3.)	Vorgegebene Größen in den Bilanzsätzen, d.h. die vorgegebene eingeprägte Volumenkraftdichte $\overline{\mathbf{k}}$ bzw. $\overline{\mathbf{k}}_\circ$ und die vorgegebene eingeprägte Oberflächenkraftdichte $\overline{\mathbf{t}}$ bzw. $\overline{\mathbf{t}}_\circ$.
$\mathbf{n}$	1.)	Äußerer Normalenvektor an die Oberfläche $\partial\mathbf{B}_t$ der Momentankonfiguration $\mathbf{B}_t$
	2.)	Eigenvektor $\mathbf{n}_i$ des Links-Streck-Tensors $\mathbf{V}$
$\mathbf{N}$	1.)	Äußerer Normalenvektor an die Oberfläche $\partial\mathbf{B}_\circ$ der Referenzkonfiguration $\mathbf{B}_\circ$
	2.)	Eigenvektor $\mathbf{N}_i$ des Rechts-Streck-Tensors $\mathbf{U}$
$\mathbf{g}, \mathbf{G}$	1.)	Metriktensor der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
	2.)	Basisvektoren $\mathbf{g}_i$ (bzw. $\mathbf{G}_A$) der Momentan- (bzw. Referenz-) konfiguration
g	1.)	Schwache Form des Gleichgewichts in den Größen der Momentankonfiguration
	2.)	Nebenbedingung g_i der mathematischen Problemformulierung
Index $\circ$	1.)	Kennzeichnung der Größen der Referenzzeit $t_\circ$
	2.)	Kennzeichnung des Startwertes $s_\circ$ der Designvariablen, der keinerlei Bezug zu der physikalischen Größe Zeit besitzt

Literaturverzeichnis

[1] H. M. Adelmann und R. T. Haftka. Sensitivity analysis of discrete structural systems. *AIAA Journal*, 24:823–832, 1988.

[2] J. S. Arora. *Introduction to Optimum Design.* McGraw–Hill Book Company, New York, 1989.

[3] J. S. Arora und J. E. B. Cardoso. A design sensitivity analysis principle and its implementation into ADINA. *Computers and Structures*, 32:691–705, 1989.

[4] P. Arumugam, P. Neittaanmäki und K. Salmenjoki. Sensitivity analysis for the design of an elektromagnet. Technischer Bericht, Preprint University of Jyväskylä, 1988.

[5] E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell und O. C. Zienkiewicz, Hrsg. *New Directions in Optimum Structural Design.* J. Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.

[6] F. J. Barthold. The contact problem of elastic bodies: theoretical and numerical aspects. Technischer Bericht, Brunel University, Uxbridge, 1987.

[7] F.-J. Barthold. Optimierung von Strukturen aus gummiartigen Materialien – Beispielberechnungen. Technischer Bericht 94/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1994.

[8] F.J. Barthold, A. Becker, A. Falk und W. Rust. Zum Einfluß der Netzadaption bei der Formoptimierung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, zur Veröentlichung eingereicht.

[9] K. J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden, Matrizen und lineare Algebra. Die Methode der finiten Elemente. Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen; Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[10] A. Becker. Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung. Technischer Bericht F 92/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.

[11] A. Becker und F.-J. Barthold. Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme. In E. Stein und W. Wunderlich, Hrsg., *Finite Elemente – Anwendungen in der Baupraxis –*. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1991.

[12] A. Becker und V. Berkhahn. Querschnittsoptimierung und Stabilitätsuntersuchungen von Stahltragwerken auf der Grundlage des Traglastverfahrens. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 69:T227–T229, 1989.

[13] A. Becker, V. Berkhahn und E. Stein. Weight optimization of steel frames with consideration of geometrical and material nonlinearities. In H. A. Eschenauer und G. Thierauf, Hrsg., *Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications*. Springer–Verlag, Berlin, 32–39, 1989.

[14] A. D. Belegundu und J. S. Arora. A study of mathematical programming methods for structural optimization, part I: Theory, part II: Numerical results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:1583–1623, 1985.

[15] V. Berkhahn. Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite–Element–Methode. Technischer Bericht F 88/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.

[16] D. Bischoff. Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien. Technischer Bericht F 88/5, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.

[17] D. Bischoff und G. Brand. Optimierungsverfahren in der Strukturmechanik. In E. Stein und D. Bischoff, Hrsg., *Geometrisch/physikalisch nichtlineare Probleme – Struktur und Algorithmen –; GAMM-Seminar; Hannover*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1–12, 1985.

[18] P. J. Blatz und W. L. Ko. Application of finite elasticity theory to the deformation of rubbery materials. *Trans. Soc. Rheology*, 6:223–251, 1962.

[19] K.-U. Bletzinger. Formoptimierung von Flächentragwerken. Technischer Bericht 11, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990.

[20] K.-U. Bletzinger. Extended method of moving asymptotes based on second order informations. *Structural Optimization*, 5:175–183, 1993.

[21] K.-U. Bletzinger, A. Kimmich und E. Ramm. Efficient modeling in shape optimal design. *Computing Systems in Engineering*, 2:483–496, 1991.

[22] M. Bremicker. Ein Konzept zur Topologie- und Gestaltsoptimierung von Bauteilen. In H. H. Müller-Slany, Hrsg., *Beiträge zur Maschinentechnik: Berichte aus Forschung und Praxis*, Siegen, 1990.

[23] J. Céa. Adaption de la méthode du gradient á un probléme d' identification de domaine. In R. Glowinski und J. L. Lions, Hrsg., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 2*, Nummer 11 in Lecture Notes in Computer Science, Berlin, 391–402, 1974. Springer-Verlag.

[24] J. Céa. Une méthode numérique pour la recherche d' un domaine optimal. In R. Glowinski und J. L. Lions, Hrsg., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 2*, Nummer 134 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin, 245–257, 1976. Springer-Verlag.

[25] J. Céa. Numerical methods of shape optimal design. In Haug and Céa [50], 1049–1087.

[26] K. K. Choi und J. L. T. Santos. Design sensitivity analysis of non-linear structural systems. part I: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2039–2055, 1987.

[27] P. G. Ciarlet und G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité nonlinéaire compressible. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, 295:423–426, 1982.

[28] Ph.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity I: Three-dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[29] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1982.

[30] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis, variation of material parameters within fixed domain. *International Journal of Solids & Structures*, 19:677–692, 1983.

[31] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis, structure shape variation. *International Journal of Solids & Structures*, 20:527–552, 1984.

[32] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach to first– and second–order sensitivity analysis of elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:637–661, 1985.

[33] T.C. Doyle und J.L. Ericksen. Applied mechanics. In *Nonlinear Elasticity*, 53–115. Academic Press, New York, 1956.

[34] G. A. Duffett und B. D. Reddy. The analysis of incompressible hyperelastic bodies by the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:105–120, 1983.

[35] H. Eschenauer. Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen. Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (1980 –1984). Technischer Bericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1985.

[36] H. Eschenauer, J. Koski und A. Osyczka. *Multicriteria Design Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[37] H. Eschenauer, P. U. Post und M. Bremicker. Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten. *Bauingenieur*, 63:515–526, 1988.

[38] H. Eschenauer und E. Schäfer. Über die Lösung von Strukturoptimierungsaufgaben mit Diskretheitsforderungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 70:279–281, 1990.

[39] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design.* Academic Press, London, 2. Ausgabe, 1988.

[40] C. Fleury. Structural weight optimization by dual methods of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1761–1783, 1979.

[41] C. Fleury. First and second order convex approximation strategies in structural optimization. *Structural Optimization*, 1:3–10, 1989.

[42] C. Fleury und V. Braibant. Structural optimization – a new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:409–428, 1986.

[43] C. Fleury und G. Sander. Dual methods for optimizing finite element flexural systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 37:249–275, 1983.

[44] P. E. Gill, W. Murray und M. H. Wright. *Practical Optimization.* Academic Press, London, 1981.

[45] D. E. Grierson. Computer-automated design of building frameworks. In C. A. Mota Soares, Hrsg., *Computer Aided Optimal Design; Structural and Mechanical Systems.* Tróia, Portugal, 322–338, 1986.

[46] F. Gruttmann und R. L. Taylor. Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principal stretches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1111–1126, 1992.

[47] R.T. Haftka und R.V. Grandhi. Structural shape optimization - a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57:91–106, 1986.

[48] S. P. Han. A globally convergent method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 22:297–309, 1977.

[49] J. Haslinger und P. Neittaanmäki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design - Theory and Applications.* J. Wiley, Chichester New York Brisbane Toronto Singapore, 1988.

[50] E. J. Haug und J. Céa, Hrsg. *Optimization of Distributed Parameter Structures, Parts I & II*, Nato Advanced Study Institute Series, Series E, Alphen van den Rijn, 1981. Sijthoff & Noordhoff.

[51] E. J. Haug, K. K. Choi und V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems.* Academic Press, Orlando, 1986.

[52] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method.* Prentice-Hall, London, 1987.

[53] T. J. R. Hughes und K. S. Pister. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Computers and Structures*, 8:391–397, 1978.

[54] S. Kimmich. Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen. Technischer Bericht 12, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990.

[55] K. H. Lambertz. Traglastberechnungen von Faltwerken mit elastoplastischen Deformationen. Technischer Bericht F 89/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1989.

[56] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming.* Addison–Wesley Publishing Company, 2. Ausgabe, 1983.

[57] R. Mahnken. Duale Methoden für nichtlineare Probleme in der Strukturmechanik. Technischer Bericht F 92/3, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.

[58] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.

[59] J. E. Marsden und T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1983.

[60] C. Miehe. Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse. Technischer Bericht F 88/6, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.

[61] C. Miehe. Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation. Technischer Bericht F 93/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1993.

[62] M. Mooney. A theory of elastic deformations. *Journal of Applied Physics*, 11:582–598, 1940.

[63] K. N. Jr. Morman. The generalized strain messure with application to nonhomogenous deformation in rubber-like solids. *Applied Mechanics*, 53:726–728, 1985.

[64] N. Müller-Hoeppe. Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen. Technischer Bericht F 90/4, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1990.

[65] P. Neittaanmäki und T. Tiihonen. Sensitivity analysis for a class of optimal shape design problems. Technischer Bericht, University of Jyväskylä, 1985.

[66] R. W. Ogden. Large defomation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiments for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 326:565–584, 1972.

[67] R. W. Ogden. Large defomation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiments for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 328:567–583, 1972.

[68] R. W. Ogden. Elastic deformations of rubberlike solids. In H. G. Hopkins und M. J. Sewell, Hrsg., *The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*. Pergamon Press, 499–537, 1982.

[69] R.W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood und John Wiley, Chichester, 1984.

[70] A. Osyczka. *Multicriterion Optimization in Engineering*. Ellis Horwood, 1984.

[71] H. Parisch. Efficient non-linear finite element shell formulation involving large strains. *Engineering Computations*, 3:121–128, 1986.

[72] L. Plank. Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken. Technischer Bericht F 90/3, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1990.

[73] L. Plank, K.-H. Lambertz und D. Bischoff. INA-SP; INelastic Analysis of Shells and Plates; Programmdokumentation (Elementbibliothek, Algorithmen, Optimale Formgebung). Technischer Bericht, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1987.

[74] M. J. D. Powell. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In G. A. Watson, Hrsg., *Numerical Analysis; Proceedings of the Biennial Conference, Held at Dundee, June 1977; Lecture Notes in Mathematics; Vol. 630*. Springer Verlag, Berlin, 144–157, 1978.

[75] E. Ramm. Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Technischer Bericht Bericht Nr. 76-2, Habilitationsschrift. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.

[76] I. Rechenberg. Evolution strategy: Nature's way of optimization. In H. W. Bergmann, Hrsg., *Optimization: Methods and Application, Possibilities and Limitations*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 106–126, 1989.

[77] R. S. Rivlin. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 45:485ff, 1949.

[78] R. S. Rivlin und J. L. Ericksen. Stress-deformation relations for isotropic materials. *J. Rational Mech. Anal.*, 4:323–425, 1955.

[79] R. S. Rivlin und D. W. Saunders. *Phil. Trans. Royal Soc. London A.*, 243:251ff, 1951.

[80] W. Rust. Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische FE-Berechnungen von Flächentragwerken. Technischer Bericht F 91/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1991.

[81] J. L. T. Santos und K. K. Choi. Sizing design sensitivity analysis of non-linear structural systems. Part II: Numerical method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2097–2114, 1988.

[82] K. Schittkowski. The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. *Numerische Mathematik*, 38:83–114 und 115–127, 1981.

[83] K. Schittkowski. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented lagrangian line search function. *Math. Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization*, 14,2:197–216, 1983.

[84] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Strukturoptimierung mit FE–Modellen*, 1988.

[85] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Strukturoptimierung*, 1990.

[86] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Strukturoptimierung*, 1993.

[87] H.-P. Schwefel. *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie.* Birkhäuser Verlag, Stuttgart, Basel, 1977.

[88] J. Simo und R. L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 85:273–310, 1991.

[89] J. C. Simo und J. E. Marsden. On the rotated stress tensor and the material version of the Doyle-Ericksen formula. Technischer Bericht, University of California, Berkley, 1983.

[90] J. C. Simo und J. E. Marsden. Stress tensors, Riemannian metrics and the alternative description in elasticity. Technischer Bericht, University of California, Berkley, 1983.

[91] J. C. Simo, R. L. Taylor und K. S. Pister. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:177–208, 1985.

[92] J.C. Simo und K.S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46:201–215, 1984.

[93] W. Stadler. Multicriteria optimization in mechanics (a survey). *Appl. Mech. Review*, 37:277–286, 1984.

[94] W. Stadler, Hrsg. *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*, New York, London, 1988. Plenum Press.

[95] E. Stein und F. J. Barthold. Elastizitätstheorie. Technischer Bericht, Vorlesungsunterlagen, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1991.

[96] E. Stein, A. Becker und F.-J. Barthold. Structural optimization of beam structures including imperfections. In G. N. Pande und J. Middleton, Hrsg., *Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications (NUMETA 90)*. Elsevier Applied Science, London, New York, 454–463, 1990.

[97] T. Sussmann und K. J. Bathe. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers and Structures*, 26:357–409, 1987.

[98] K. Svanberg. An algorithm for optimum structural design using duality. *Math. Prog. Study*, 20:161–177, 1982.

[99] K. Svanberg. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:359–373, 1987.

[100] P. B. Thanedar, J. S. Arora und C. H. Tseng et. al. Performance of some SQP algorithms on structural optimization problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:2187–2203, 1986.

[101] T. C. T. Ting. Determination of $\mathbf{c}^{1/2}, \mathbf{c}^{-1/2}$ and more general tensor functions of $\mathbf{c}$. *Journal of Elasticity*, 15:319–323, 1985.

[102] L. R. G. Treloar. *Trans. Faraday Soc.*, 39:241ff, 1943.

[103] C. Truesdell und W. Noll. The nonlinear field theories of mechanics. In S. Flügge, Hrsg., *Handbuch der Physik III/3*. Springer-Verlag, 1965.

[104] K.C. Valanis und R. F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38:2997–3002, 1967.

[105] P. A. J. van den Bogert. Characteristics of the Mooney-Rivlin model for rubberlike materials. Technischer Bericht 25.2-89-08, TU Delft, 1989.

[106] P. A. J. van den Bogert. Constitutive models for rubber-like materials. Technischer Bericht 25.2-89-05, TU Delft, 1989.

[107] P. A. J. van den Bogert. Computational modelling of rubberlike materials. Technischer Bericht, TU Delft, 1991.

[108] P. Wriggers. Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite–Element–Methode. Technischer Bericht F 88/4, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.

[109] T. M. Yao und K. K. Choi. 3-D shape optimal design and automatic finite element regridding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:369–384, 1989.

[110] G. Zhang. Einspielen und dessen numerische Behandlung für Flächentragwerke aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material. Technischer Bericht F 92/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.

[111] O. C. Zienkiewicz und R. L. Taylor. *The Finite Element Method, 4rd Ed.* McGraw Hill, London, 1988.

[112] O. C. Zienkiewicz und J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:334–357, 1987.

[113] J. P. Zolesio. Domain variational formulation for free boundary problems. In Haug and Céa [50], 1152–1194.

[114] J. P. Zolesio. The material derivative (or speed) method for shape optimization. In Haug and Céa [50], 1089–1151.

[115] J. Zowe. Nondifferentiable optimization – A motivation and a short introduction into the subgradient and the bundle concept. In K. Schittkowski, Hrsg., *Computational Mathematical Programming.* NATO ASI Series F: Computer and System Sciences, 1985.

Lebenslauf

Persönliches

Franz–Joseph Barthold	Jordanstraße 37, 30173 Hannover
Geburt:	14. 06. 1959 in Iburg, jetzt Bad Iburg, Kreis Osnabrück
Eltern:	Drogist Joseph Barthold und Hausfrau Christa Barthold, geb. Hagedorn
Ehefrau:	Sonderschullehrerin Silke Barthold, geb. Bodenburg
Kinder:	Katharina Rebekka, geb. 28. 01. 1991 Magdalena Rabea, geb. 24. 01. 1993

Schule, Ausbildung, Beruf

1966 – 1969	Grundschule Glane, Kreis Osnabrück
1969 – 1978	Gymnasium (Niedersächsische Heimschule Iburg, jetzt Gymnasium Bad Iburg)
Juni 1978	Abitur
Okt. 1978 – Sep. 1979	Grundwehrdienst
1979 – 1986	Studium des Bauingenieurwesens, Universität Hannover
Okt. 1982 – Sep. 1987	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover
September 1986	Diplomhauptprüfung
Okt. 1986 – Sep. 1987	Numerical Analysis, Brunel University, Uxbridge, England
Sep. 1987 / Juli 1988	Examen und Ernennung zum Master of Science
Oktober 1987 – März 1988	Wissenschaftliche Hilfskraft (mit Diplom) am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover
seit April 1988	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover

Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover

In dieser Schriftenreihe bisher erschienene Berichte:

S 73/1	Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Hannover 1973
F 75/1	„Die Spannungsberechnung im Rahmen der Finite–Element–Methode", R.Ahmad, Dissertation, April 1975
F 76/1	„Zur Theorie und Anwendung der Stoffgleichungen elastisch–plastisch–viskoser Werkstoffe", H.Mentlein, Dissertation, April 1976
S 77/1	Seminar über lineare und geometrisch nichtlineare Schalentheorie einschließlich Stabilitätstheorie, Hannover 1977
F 77/2	„Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten mit Hilfe der Finite–Element–Methode", H.Meyer, Dissertation, Juli 1977
F 77/3	„Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen räumlich vorgekrümmter und vorverwundener Stäbe", J.Möhlenkamp, Dissertation, Dezember 1977
F 77/4	„Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente", J.Paulun, Dissertation, Dezember 1977
F 77/5	noch nicht erschienen
S 78/1	2. Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Hannover 1978
F 79/1	„Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nichtlinearer viskoplastischer Kontinua", K.–D. Klee, Dissertation, Februar 1979
F 79/2	„Zur Konstruierbarkeit von Variationsfunktionalen für nichtlineare Probleme der Kontinuumsmechanik", J.Siefer, Dissertation, Oktober 1979
F 80/1	„Theoretische und numerische Behandlung gerader Stäbe mit endlichen Drehungen", M.Kessel, Dissertation, Februar 1980
F 81/1	„Zur Berechnung von Kontakt– und Stoßproblemen elastischer Körper mit Hilfe der Finite–Element–Methode", P.Wriggers, Dissertation, Januar 1981
F 81/2	„Stoffgleichungen für Steinsalze unter mechanischer und thermischer Beanspruchung", J.Olschewski, E.Stein, W.Wagner, D.Wetjen, geänderte Fassung eines Zwischenberichtes zum BMFT–Forschungsvorhaben KWA 1608/5

F 82/1 „Konvergenz und Fehlerabschätzung bei der Methode der Finiten Elemente“, R.Rohrbach, E.Stein, Abschlußbericht eines VW–Forschungsvorhabens, Februar 1982

F 82/2 „Alternative Spannungsberechnung in Finite–Element–Verschiebungsmodellen“, C.Klöhn, Dissertation, November 1982

F 83/1 Seminar über nichtlineare Stabtheorie, Hannover 1983

F 83/2 „Beiträge zur nichtlinearen Theorie und inkrementellen Finite–Element–Berechnung dünner elastischer Schalen“, A.Berg, Dissertation, Juli 1983

F 83/3 „Elastoplastische Plattenbiegung bei kleinen Verzerrungen und großen Drehungen“, J.Paulun, Habilitation, September 1983

F 83/4 „Geometrisch nichtlineare FE–Berechnung von Faltwerken mit plastisch/viskoplastischem Deformationsverhalten“, M.Krog, Dissertation, Dezember 1983

F 85/1 Verleihung der Ehrendoktorwürde des Fachbereichs Bauingenieur– und Vermessungswesen der Universität Hannover an die Herren Prof. Dr. Drs. h.c. J.H.Argyris, Dr.–Ing. H.Wittmeyer

F 85/2 „Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite–Element–Berechnungen von Durchschlag– und Kontaktproblemen“, W.Wagner, Dissertation, März 1985

F 85/3 „Geometrisch/physikalisch nichtlineare Probleme — Struktur und Algorithmen — “, GAMM–Seminar im Februar 1985 in Hannover

F 87/1 „Finite–Elemente–Berechnungen ebener Stabtragwerke mit Fließgelenken und großen Verschiebungen“, R.Kahn, Dissertation, Oktober 1987

F 88/1 „Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot–Spannungen“, F. Gruttmann, Dissertation, Juni 1988

F 88/2 „Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite-Element-Methode“, V. Berkhahn, Dissertation, Oktober 1988

F 88/3 „Beiträge zur Theorie und Numerik großer plastischer und kleiner elastischer Deformationen mit Schädigungseinfluß“, R. Lammering, Dissertation, November 1988

F 88/4 „Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihrer Anwendung auf die Finite–Elemente–Methode“, P. Wriggers, Habilitation, November 1988

F 88/5 „Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien“, D. Bischoff, Habilitation, Dezember 1988

F 88/6 „Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse“, C. Miehe, Dissertation, Dezember 1988

F 89/1 „Zur Stabilität und Konvergenz gemischter finiter Elemente in der linearen Elastizitätstheorie“, R. Rolfes, Dissertation, Juni 1989

F 89/2 „Traglastberechnungen von Faltwerken mit elastoplastischen Deformationen “, K.-H. Lambertz, Dissertation, Oktober 1989

F 89/3 „Transientes Kriechen und Kriechbruch im Steinsalz“, U. Heemann, Dissertation, November 1989

F 89/4 „Materialgesetze zum Verhalten von Betonkonstruktionen bei harten Stößen“, E. Stein, P. Wriggers, T. Vu Van & T. Wedemeier, Dezember 1989

F 89/5 „Lineare Konstruktion und Anwendungen von Begleitmatrizen“, C. Carstensen, Dissertation, Dezember 1989

F 90/1 „Zur Berechnung prismatischer Stahlbetonbalken mit verschiedenen Querschnittsformen für allgemeine Beanspruchungen “, H. N. Lucero–Cimas, Dissertation, April 1990

F 90/2 „Zur Behandlung von Stoß- Kontaktproblemen mit Reibung unter Verwendung der Finite–Element–Methode“, T. Vu Van, Dissertation, Juni 1990

F 90/3 „Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken “, L. Plank, Dissertation, September 1990

F 90/4 „Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen“, N. Müller–Hoeppe, Dissertation, Oktober 1990

F 90/5 „Beiträge zur Theorie und Numerik von Materialien mit innerer Reibung am Beispiel des Werkstoffes Beton“, T. Wedemeier, Dissertation, Oktober 1990

F 91/1 „Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente“, W. Wagner, Habilitation, April 1991

F 91/2 „Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite–Elemente–Berechnungen von Flächentragwerken“, W. Rust, Dissertation, Oktober 1991

F 91/3 „Finite Elemente Formulierungen im Trefftzschen Sinne für dreidimensionale anisotrop–elastische Faserverbundstrukturen“, K. Peters, Dissertation, Dezember 1991

F 92/1 „Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material“,
G. Zhang, Dissertation, Februar 1992

F 92/2 „Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung “,
A. Becker, Dissertation, April 1992

F 92/3 „Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik “,
R. Mahnken, Dissertation, April 1992

F 93/1 „Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation“,
C. Miehe, Habilitation, Dezember 1993

F 93/2 „Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien“,
F.–J. Barthold, Dissertation, Dezember 1993