Kay ACHMETLI, Kassel, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn, André KRUG, Paderborn

Bearbeitungsprozesse von Schülern zu Aufgaben mit multiplen mathematischen Lösungswegen

Theoretischer Hintergrund

Die Entwicklung multipler Lösungen gilt als Qualitätskriterium für einen kognitiv aktivierenden Unterricht, welches u.a. auch in den Bildungsstandards hervorgehoben wird. Die Bedeutung dieses Unterrichtelementes für Lernprozess und Leistungen kann durch konstruktivistisch orientierte Lerntheorien und Konzeptionen fundiert werden (Collins, Brown, & Newman, 1989). Eine Betrachtung des Lerninhalts aus verschiedenen Perspektiven ermöglicht es, die gewonnenen Repräsentationen miteinander zu verknüpfen (Spiro, Bruce, & Brewer, 1980). Dabei stellt die Flexibilität bei der Auswahl passender Lösungen und Repräsentationen einen Teil des Fachwissens und somit ein wichtiges Lernziel dar (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Darüber hinaus gibt es weitere theoriegeleitete Vermutungen (siehe Zusammenfassung bei Schukajlow & Blum, 2011), welche für die Behandlung von multiplen Lösungen sprechen.

Die wenigen bisherigen experimentellen Studien konnten Vorteile von Lernumgebungen aufzeigen, welche mehrere Lösungsmethoden zu einer innermathematischen Aufgabe behandeln und gegenüberstellen, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nacheinander und an verschiedenen Aufgaben behandelt wurden (Rittle-Johnson & Star, 2007). Als zentrales Ergebnis stellte sich das Vorwissen als wichtiger Prädiktor für positive Effekte bei der Behandlung von multiplen Lösungen heraus (Star & Rittle-Johnson, 2009). Damit übereinstimmend und weiterführend lassen sich die ersten Ergebnisse des DFG-Forschungsprojekts MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientiertem Mathematikunterricht) lesen. Es zeigten sich positive Wirkungen der Behandlung von multiplen Lösungen zu einer gegebenen Aufgabe auf Selbstregulation, Interesse und Präferenzen für die Bearbeitung von Aufgaben mit mehreren Lösungen im Vergleich zu einer Unterrichtsform, in der nur eine Lösung vermittelt wurde (Schukajlow & Krug, 2012, 2013).

In der aktuellen Projektphase werden solche Lösungen untersucht, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren beim Modellieren entwickelt werden können. Als Inhaltsbereich wurden „lineare Funktionen“ ausgewählt. Nach Krämer, Schukajlow und Blum (2012) lassen sich verschiedene Lösungswege beim Modellieren zu diesem Inhaltsbereich unterscheiden: Algebraisch/funktional, graphisch, exemplarisch, numerisch und inhaltlich. Im Projekt werden zwei dieser Lösungswege untersucht: erstens, der numerische Lösungsweg durch das Erstellen einer Zuordnungstabelle und dem Ablesen des exakten Schnittpunkts sowie von Bereichen, für eine korrekte Entscheidung. Zweitens, der inhaltliche Lösungsweg mittels Differenzenbildung, welcher durch die Nutzung realitätsbezogener Begriffe und Beziehungen entwickelt werden kann, ohne explizit auf Formalisierung zurückzugreifen. Bei der Anwendung des inhaltlichen Lösungsweges soll im Lösungsprozess ein mehrfacher Wechsel zwischen der Realität und der Mathematik erfolgen, welcher einen tieferen Einblick in Modellierungsprozesse ermöglichen kann. Während der inhaltliche Lösungsweg der Differenzenbildung besonders erfolgsversprechend erscheint und zudem wenig erforscht ist, stellt die Tabelle für die Schüler einen bereits bekannten Lösungsweg dar (Krämer et al., 2012).

Forschungsfragen und Methode der Studie

Da man nicht davon ausgehen kann, dass Lernende es gewohnt sind, mehrere Lösungswege im Unterricht zu besprechen bzw. selbst zu erstellen (Baumert & Lehmann, 1997), erschien eine Instruktion für die Untersuchung der Bearbeitung von Aufgaben mit multiplen Lösungen notwendig. Durch die Instruktion konnten die Lösungswege standardisiert vermittelt werden und es wurde die Möglichkeit geschaffen, den innovativen inhaltlichen Lösungsweg der Differenzenbildung zu untersuchen. Hierfür wurde ein Instruktionsvideo erstellt, dessen Inhalte aus Lerntheorien hergeleitet und mehrfach pilotiert wurden.

Für die Untersuchung ist folgende Forschungsfrage zentral:

- Wie bearbeiten und adaptieren Schüler Modellierungsaufgaben mit der Möglichkeit, multiple mathematische Lösungswege zu erstellen, nach einer standardisierten Instruktion?

An der Untersuchung haben insgesamt 12 Realschüler der Jahrgangsstufe 8 teilgenommen. Es wurden sechs – in sich leistungshomogene – Schülerpaare verschiedener Leistungsniveaus gebildet, die vier Modellierungsaufgaben mit zwei verschiedenen Lösungswegen bearbeiten sollten. Es handelt sich um Aufgaben, bei denen zwei Angebote miteinander verglichen werden und die Entscheidung gefällt werden soll, wann sich welches Angebot lohnt. Bei zwei dieser Aufgaben ist der exakte Schnittpunkt ganzzahlig und bei zwei weiteren nicht ganzzahlig.

Die Untersuchung bestand aus einer Instruktions-, Bearbeitungs- und Interviewphase. Das Interview wurde mit Hilfe der Methode „stimulated recall“ durchgeführt (Kagan, Krathwohl, & Miller, 1963).

Ergebnisse und Diskussion

Das erste Ergebnis der Studie besteht darin, dass alle Schülerpaare die angebotenen Aufgaben mit jeweils zwei verschiedenen Lösungswegen bearbeiten konnten, wie es bei der Entwicklung der Instruktion intendiert wurde. Dies deutet auf eine gute Qualität der Instruktion hin. Die Analyse der Schülerlösungsprozesse zeigt, dass Lernende bei der Lösungsproduktion zunächst ähnlich wie im Instruktionsvideo vorgegangen sind. Im Verlauf des Bearbeitungsprozesses lösen sich die Schüler vom präsentierten Vorgehen ab und vertauschen die Reihenfolge der Lösungswege.

Mit Hilfe der inhaltlichen Lösung der Differenzenbildung konnten alle Schüler das mathematisch exakte Resultat bestimmen. Bei dieser Lösung fällt zudem auf, dass mehrfach falsche Maßeinheiten dem ermittelten mathematischen Resultat zugeordnet wurden. Dies lässt vermuten, dass die Schüler beim Erstellen des inhaltlichen Lösungsweges seltener als vermutet zwischen Realität und der Mathematik wechseln. Des Weiteren wurde im Interview deutlich, dass es den Schüler schwer fällt, ihr mathematisches Resultat zu interpretieren, wenn sie als Grundlage nur den inhaltlichen Lösungsweg benutzen dürfen.

Fast allen Schülern gelingt es, bei den Aufgaben mit ganzzahligem Schnittpunkt, eine adäquate Zuordnungstabelle aufzustellen, das exakte Resultat zu bestimmen sowie auf Grundlage mehrerer Zwischenergebnisse und korrekter Interpretation einen richtigen Antwortsatz zu formulieren.

Bei Aufgaben mit nicht ganzzahligem Schnittpunkt fällt es Schülern schwer, den Schnittpunkt zu berechnen, da sie dazu tendieren, mit der Tabelle ein exaktes Resultat erzielen zu wollen. Gelingt dies ihnen innerhalb einer begrenzten Zeitspanne nicht, unterbrechen die Lernenden die Bearbeitung des numerischen Lösungsweges und gehen dazu über, mit dem inhaltlichen Lösungsweg den exakten Schnittpunkt zu bestimmen. Anschließend setzen sie diesen in die Tabelle ein und formulieren einen Antwortsatz. Durch den fehlenden Wechsel zwischen der Realität und der Mathematik wird der inhaltliche Lösungsweg lediglich als Schema verwendet, das der Optimierung des numerischen Lösungswegs dient.

Die Schüler adaptieren den numerischen Lösungsweg teilweise so, dass sie einen Bezug zur Realität bei der Annäherung an den exakten Schnittpunkts herstellen. Dabei gehen Überlegungen der Differenzenbildung ein, um den Prozess der Annäherung zu beschleunigen. Auch nach der Ermittlung exakten mathematischen Resultats wird die Tabelle von den Schülern genutzt, um weitere Werte zu berechnen und die Formulierung des Antwortsatzes zu erleichtern.

Die Ergebnisse lassen vermuten, dass Schüler einzelne Vorteile der Lösungswege benutzen, um einen neuen Lösungsweg zu erstellen. Für den weiteren Verlauf des Projekts erscheint es notwendig, Lernenden Verbindungen und Optimierungsmöglichkeiten der beiden Lösungswege aufzuzeigen.

Literaturverzeichnis

Baumert, J., & Lehmann, R. (1997). TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning and instruction: essays in honor of Robert Glaser (S. 453–492). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41(5), 535–540.

Kagan, N., Krathwohl, D. R., & Miller, R. (1963). Stimulated recall in therapy using video tape: A case study. Journal of Counseling Psychology, 10(3), 237–243.

Krämer, J., Schukajlow, S., & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. Mathematica Didactica, 35, 50–72.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?: An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561–574.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser, & P. Bender (Eds.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens (S. 249–267). Münster: LIT Verlag.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. In Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (S. 59–66). Taipei, Taiwan: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Uncertanty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. In

Spiro, R., Bruce, B., & Brewer, W. (Eds.). (1980). Theoretical issues in reading comprehension. NJ: Hillsdale.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. Journal of Experimental Child Psychology, 102(4), 408–426.