MOTZER, Renate
Augsburg

Symmetrien bei Hyperbeln

Bezüglich Symmetrien werden Funktionsgraphen im Unterricht häufig nur auf Achsensymmetrie zur y-Achse und auf Punktsymmetrie zum Ursprung hin untersucht. Diese Symmetrien lassen sich leicht an der Funktionsgleichung erkennen. Doch es kann auch andere Symmetrieachsen oder Symmetriepunkte geben. So erkennen Lernende, dass Parabeln immer symmetrisch zur senkrechten Geraden durch den Scheitel verlaufen, dass also $x = xS$ die (senkrechte !) Symmetrieachse beschreibt. Doch noch vor die Jugendlichen in der 9. Klasse Parabeln kennen- und verschieben lernen, beschäftigen sie sich in der 8. Klasse mit Hyperbeln. Im Sachkontext von indirekter Proportionalität ist es ein Hyperbelast im I. Quadranten. Dass dieser achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. Quadranten verläuft, ist relativ gut erkennbar. Auch an der Funktionsgleichung $y = A/x$, welche sich sinnvoll zu $xy = A$ (Produktgleichheit) und damit auch zu $x = A/y$ umformen lässt, sieht man die Symmetrie bzgl. dieser Geraden (welche die Gleichung $y = x$ hat). Lässt man nun auch negative x- und y-Werte zu, findet man den zweiten Hyperbelast und dass diese beiden Äste zueinander punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs sind. Hier kommt außerdem die Achsensymmetrie zu $y = -x$, der Winkelhalbierenden des II und IV- Quadranten dazu. Wird nun die Hyperbel verschoben ($f(x) = a /(x-b) + c$), so verschieben sich die Achsen und der Symmetriepunkt mit.

Die Graphen zu Funktionen des Typs $f(x) = a/(x-b) + cx + d$ besitzen je eine senkrechte Asymptote (bei $x = b$) und eine schräge mit der Gleichung $y = cx+d$. Als Symmetriepunkt lässt sich der Schnittpunkt der Asymptoten erkennen (b |cb+d). Symmetrieachsen könnten das beiden Winkelhalbierenden der Asymptoten sein. Mit Geogebra kann im Unterricht zumindest gezeigt werden, dass es sich wirklich um Symmetrieachsen handelt, denn spiegeln wir einen Punkt der Hyperbel an einer der beiden Geraden, so erhalten wir einen anderen Punkt der Hyperbel. Für den allgemeinen Typ $f(x) = a/(x-b) + cx + d$ kann man bei Geogebra Schieberegel für die Parameter einfügen. Auch den Punkt auf dem Graphen, den man spiegelt, kann man variieren und so das Symmetrieverhalten als etwas ganz Besonderes beobachten. Wann hat man schon zwei schrägliegende Symmetrieachsen und eine Punktsymmetrie in einem Funktionsgraphen? Die Untersuchungen der Funktionsgraphen in Abhängigkeit von den Vorzeichen von a, b, c und d ist eine Unterrichtsaktivität und kann zu einer echten „Kurvendiskussion“ führen. Manchmal scheinen die Hoch- und Tiefpunkte auf den Symmetrieachsen zu liegen. Warum scheint das nur manchmal so und kann doch nicht wirklich der Fall sein?

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0