

FEUDEL, Frank & HANKE, Erik
Berlin, Hannover

Potenziale von stoffdidaktischen Analysen in der Hochschulmathematikdidaktik

Stoffdidaktische Analysen haben in Deutschland eine lange Tradition (Hefendehl-Hebeker, 2016). Ursprünglich war deren Ziel das Zugänglichmachen von Inhalten aus der Fachwissenschaft für bestimmte Lerngruppen (Hußmann et al., 2016). Dazu gehörten insbesondere eine begründete Auswahl und Reduktion der Inhalte unter Berücksichtigung der kognitiven Fähigkeiten der Lernenden sowie das Herausarbeiten von aus fachwissenschaftlicher Sicht adäquaten Denkweisen über die Inhalte. Eine besondere Bedeutung hat hierbei das Konstrukt der *Grundvorstellungen* (GV) gewonnen – Vorstellungen, die mathematischen Konzepten eine inhaltliche Bedeutung geben (vom Hofe, 1995). Stoffdidaktische Analysen bildeten dabei insbesondere GV heraus, die Lernende für schulmathematische Konzepte aufbauen sollen, und formulierten darauf aufbauend Vorschläge für deren Behandlung im Unterricht (s. z.B. Blum & Kirsch, 1979).

In diesem Beitrag und dem Vortrag illustrieren wir anhand zweier Beispiele, wie stoffdidaktische Analysen auch in der Hochschuldidaktik Mathematik gewinnbringend verwendet können und geben einen Ausblick auf weitere aktuelle stoffdidaktische Perspektiven auf Hochschulmathematik.

Beispiel 1 - Herausarbeiten von Aspekten des komplexen Wegintegrals

Das Zugänglichmachen von Begriffen ist nicht nur im Mathematikunterricht, sondern auch in der mathematischen Lehre an der Universität wichtig – gerade in fortgeschrittenen Veranstaltungen. Dies umfasst neben der Ausbildung von tragfähigen Vorstellungen auch, dass Studierende unterstützt werden, verschiedene Definitionen als verwandt oder gar äquivalent zu identifizieren und im Hinblick auf Definitionen anderer eng verwandter Begriffe zu verorten (z.B. bei verschiedenen Integralbegriffen). Gerade für die Hochschulmathematik ist dies besonders unter dem Gesichtspunkt relevant, dass viele Begriffe durch äquivalente Definitionen in universitären Diskursen eingeführt werden können und Studierende zwischen diesen situationsbezogen wechseln können sollten. Solche Äquivalenzen mögen dabei im Anschluss an eine Definition explizit gemacht werden oder jedoch implizit bleiben. Gerade im letzteren Fall ist fraglich, ob und wie Studierende an solchen Stellen Schnittstellen zwischen verschiedenen Inhalten finden können.

Bezugnehmend auf die von Greefrath et al. (2016) komplementär zu den GV gedachten *Aspekten* (d.h. fachlichen Charakterisierungen von Begriffen) und Roos' (2020) Idee "partieller" Grundvorstellungen und Aspekte, verfeinerte

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

der zweite Autor den Begriff des Aspekts – zugeschnitten auf die Hochschulmathematik – als äquivalente Definitionsmöglichkeiten, die im Rahmen eines lokal geführten Diskurses entweder tatsächlich Definitionen sind oder später als äquivalente Charakterisierung zutage gefördert werden. Partielle Aspekte sind schließlich solche, die zwar nicht vollends äquivalent zu einer im jeweiligen Diskurs gewählten Definition sind, wohl aber wenn eine Teilklasse der unter den Begriff fallenden Objekte betrachtet wird.

In der Funktionentheorie beziehen sich Aspekte komplexer Wegintegrale auf stetige Integranden $f = u + iv$ längs stückweise stetig differenzierbarer Wege $\gamma: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, und partielle Aspekte daher auf solche für weniger allgemeine Klassen von Integranden und Wegen (Hanke, 2022). Es wurden vier Aspekte und vier partielle Aspekte ausgemacht, von denen einige direkte Anleihen bei der Definition von Riemannintegralen oder der Vektoranalysis machen, andere aber gänzlich andere Facetten betonen. Wir geben hier die Aspekte wieder: (i) Der *Riemannsummen-Aspekt* drückt das Wegintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ wie andere Integrale als Grenzwert einer Summe von Produkten aus Funktionswerten und Differenzen zwischen Punkten auf der Kurve aus; (ii) dem *Substitutions-Aspekt* zufolge definiert man ausgehend von der symbolischen Gleichung $dz = \gamma'(t)dt$ (bei Parametrisierung $z = \gamma(t)$) $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$; (iii) beim *Vektoranalysis-Aspekt* wird auf die Trennung in Real- und Imaginärteil sowie reelle Wegintegrale zurückgegriffen und man setzt $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$; (iv) der *Mittelwert-Aspekt* charakterisiert schließlich $\int_{\gamma} f(z) dz$ als gerichteten Mittelwert einer mit f verwandten, aber nicht identischen Größe (Hanke, 2022, akzeptiert).

In Zukunft können derart herausgearbeitete Aspekte genutzt werden, um in der Lehre Kohärenzerlebnisse für Studierende zwischen den verschiedenen Diskursen, in denen ihnen Integralen begegnen, herzustellen. So schließt bspw. der Produktsummen-Aspekt direkt an typische Definitionen des Riemannintegrals an, während der Substitutions-Aspekt die Festlegung $\int_{\gamma} m dx + n dy := \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} m(\gamma(t)) \\ n(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \gamma'(t) \right\rangle dt$ aus der Vektoranalysis durch die Wahl eines anderen Produkts auf der rechten Seite imitiert.

Beispiel 2 - Verwendungsweisen der Ableitung in der Ökonomie

Das zweite Beispiel illustriert, wie eine stoffdidaktische Analyse verwendet wurde, um die Verwendungsweise des mathematischen Konzepts der Ableitung in einer anderen Fachdisziplin – der Ökonomie – und das dafür von

Studierenden benötigte mathematische Hintergrundwissen zu rekonstruieren. Als theoretische Perspektive wurde dabei die Anthropologische Theorie der Didaktik (ATD) verwendet (Chevallard, 2019). Nach dieser lassen sich Aktivitäten (auch mathematische) in Institutionen mit Hilfe eines 4-Komponentenmodells (4T) beschreiben. Es gibt Aufgaben (*tasks*), die mit bestimmten Techniken (*technique*) gelöst werden. Für diese gibt es Begründungen (*technology*), welche Bestandteil einer übergeordneten Theorie (*theory*) sind. Da der Fokus dieser Kategorien auf den mathematischen Inhalten liegt, kann eine entsprechende 4T-Analyse auch als Stoffdidaktik verstanden werden. Im Folgenden soll diese am Beispielthema "Gewinnmaximierung" aus dem verbreiteten Mikroökonomie-Lehrbuch von Varian (2014) illustriert werden.

Die zentrale Einführungsaufgabe in Varian (2014) ist die Maximierung des Gewinns einer Firma, die aus zwei Gütern x_1 und x_2 zu Preisen w_1 und w_2 ein Produkt y herstellt, das zu einem Preis p verkauft wird (S. 371). Der Produktionsprozess ist durch eine Funktion $y = f(x_1, x_2)$ beschrieben. Der Einfachheit halber wird Gut 2 zunächst auf \bar{x}_2 fixiert. Damit ist die konkrete Aufgabe dann die Maximierung des Ausdrucks $pf(x_1, \bar{x}_2) - w_1x_1 - w_2\bar{x}_2$. Als Technik zur Lösung der Aufgabe nennt Varian das Lösen der Gleichung $p \cdot MP_1(x_1, \bar{x}_2) = w_1$. Dabei ist MP_i das sogenannte marginale Produkt von Gut i , das Varian zuvor als partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ definiert hatte.

Varian präsentiert nun drei Begründungen für diese Technik. Die erste ist eine formale Herleitung, bei der er die Zielfunktion nach x_1 ableitet und die Ableitung = 0 setzt. Dann nennt er aber noch eine weitere Begründung mit Hilfe des Kontexts. Wenn man Gut 1 um eine kleine Menge δx_1 erhöht, produziert man die zusätzliche Menge $\delta y = MP_1 \cdot \delta x_1$ des Produkts. Dieses bringt $p \cdot MP_1 \cdot \delta x_1$ ein, kostet aber $w_1 \cdot \delta x_1$. Ist nun $p \cdot MP_1 \neq w_1$, könnte man durch eine Erhöhung oder Verringerung der Produktion den Gewinn erhöhen. Damit kann am Gewinnmaximum nur $p \cdot MP_1 = w_1$ gelten. Diese Begründung baut auf der Deutung der Ableitung MP_1 als Änderungsrate bzw. Verstärkungsfaktor auf. Schließlich bringt Varian noch eine grafische Herleitung, die die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente nutzt (siehe Feudel, 2023).

Dieses Beispiel illustriert folgendes Hauptergebnis der Analyse. In der Ökonomie wird insbesondere auf drei Facetten des Ableitungsbegriffs zurückgegriffen: 1) formale Rechenregeln und Kriterien, 2) die geometrische Deutung der Ableitung und 3) Deutungen der Ableitung in ökonomischen Kontexten. Daher sollten diese auch in Mathematik-Veranstaltungen für Studierende der Ökonomie umfangreich behandelt und in Argumentationen genutzt werden.

Fazit und Ausblick

Die beiden Beispiele illustrieren, dass stoffdidaktische Analysen auch für die hochschulmathematikdidaktische Forschung gewinnbringend eingesetzt werden können. Sie eignen sich nicht nur zur theoretischen Beschreibung von Verständnis bei der Begriffsbildung in (fortgeschrittenen) universitären mathematischen Diskursen und zur Herausbildung möglicher curricularer Kohärenz, sondern sind auch ein geeignetes Hilfsmittel für die Rekonstruktion der Verwendungsweisen von Mathematik in anderen Fachdisziplinen. Neben den hier genannten Beispielen werden im Vortrag weitere Forschungsbeiträge aus der Hochschuldidaktik Mathematik vorgestellt, in denen stoffdidaktische Analysen verwendet wurden, beispielsweise zur Verzahnung der in verschiedenen Ausbildungsabschnitten behandelten Mathematik (z.B. Kondratieva & Winsløw, 2018).

Literatur

- Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *MU - Der Mathematikunterricht*, 25(3), 6–24
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114.
- Feudel, F. (2023). What knowledge related to the derivative is commonly used in basic economics textbooks? – Selected results from a praxeological analysis. In T. Dreyfus, A. González-Martín, J. Monaghan, E. Nardi & P. W. Thompson (Hrsg.), *Proceedings of "The Learning and Teaching of Calculus across disciplines"* (S. 101–104). MatRIC.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V. & Weigand, H. G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Spl. 1), 99–129. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0100-x>
- Hanke, E. (2022). *Aspects and images of complex path integrals. An epistemological analysis and a reconstruction of experts' interpretations of integration in complex analysis* [Dissertation, Universität Bremen]. <https://doi.org/10.26092/elib/1964>
- Hanke, E. (akzeptiert). On using a core idea to foster the transition to advanced mathematics – Transferring the basic idea of average to complex path integrals.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German traditions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Spl. 1), 11–31. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0103-7>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum.
- Hußmann, S., Rezat, S. & Sträßer, R. (2016) Subject matter didactics in mathematics education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Spl. 1), 1–9. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0105-5>
- Kondratieva, M., & Winsløw, C. (2018). Klein's plan B in the early teaching of analysis: Two theoretical cases of exploring mathematical links. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, 4, 119–138. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0065-2>
- Roos, A.-K. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0>
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus*. W.W. Norton & Co.