

BAUMANN, Oliver; GÖDECKE, Pia; QUADER, Jascha;
SCHUKAJLOW, Stanislaw; SCHINDLER, Maike & SCHÖNHERR,
Johanna
Paderborn, Münster, Münster, Münster, Köln, Paderborn

Die Rolle der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung beim mathematischen Modellieren – Ergebnisse einer Eye- Tracking Studie

Theoretischer Hintergrund

Die Förderung des mathematischen Modellierens ist ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. Die Forschung zeigt, dass viele Lernende beim Lösen einer Modellierungsaufgabe auf Schwierigkeiten stoßen, beispielsweise bei der Entwicklung eines geeigneten mathematischen Modells. Im Bereich der Geometrie haben Lernende etwa Schwierigkeiten, ein geometrisches Objekt wie ein rechtwinkliges Dreieck im Modell der Situation zu erkennen oder die Beziehungen zwischen den geometrischen Objekten in einen Term zu übersetzen (Rellensmann, 2019). Ein Ansatz, das mathematische Modellieren im Bereich der Geometrie zu unterstützen, ist das Zeichnen einer Skizze (Bräuer et al., 2021).

Die Strategie des Zeichnens umfasst den Prozess und das Produkt der *Konstruktion* einer Zeichnung, die die Problemstruktur darstellt, sowie deren *Nutzung* als kognitives Werkzeug zur Bewältigung der Aufgabenanforderungen (Zimmermann & Cunningham, 1991). Die Forschung zur Wirksamkeit von Skizzen beim Modellieren zeigt gemischte Ergebnisse (z.B. Bräuer et al., 2021), wobei die Qualität des Produkts und des Prozesses des Zeichnens eine wichtige Rolle für die Wirksamkeit von Skizzen spielt (Rellensmann, 2019).

Die Skizzenqualität als Produkt des Zeichnens beschreibt die Passung zwischen der in der Skizze dargestellten und in der Aufgabe beschriebenen Problemstruktur. Eine qualitativ hochwertige Skizze stellt die relevanten Objekte und deren Beziehungen zutreffend dar. Forschungsergebnisse bestätigen einen starken positiven Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der Leistung (Boonen et al., 2014). Jedoch reicht es nicht zu wissen, was eine qualitativ hochwertige Skizze ist, um diese konstruieren und effektiv nutzen zu können (Rellensmann et al., 2021).

Der Prozess des Zeichnens, der die Konstruktion der Skizze und deren Nutzung als kognitives Werkzeug (z. B. zum Erkennen eines rechtwinkligen Dreiecks und zum Aufstellen eines Terms) beinhaltet, wurde bislang kaum untersucht. Fallstudien deuten auf Unterschiede in der Skizzenkonstruktion

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

und -nutzung zwischen Expert*innen und Noviz*innen hin (Stylianou, 2011). Beispielsweise erstellten Expert*innen die Skizze schrittweise und erlangten in den Zwischenschritten neue Informationen, während Noviz*innen dazu neigten, die Skizze in einem Zug zu vollenden. Van Garderen et al. (2013) berichten über eine positive Korrelation zwischen der selbstberichteten Qualität der Skizzennutzung und der Problemlöseleistung von Lernenden. Im Vergleich zu Selbstberichten hat eine Analyse der Blickbewegungen das Potenzial, zu einer objektiven Beschreibung der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung beizutragen und Effekte auf Skizzenqualität und Modellierungsleistung zu untersuchen.

Forschungsziele

In dieser Studie, die im Rahmen des DFG-Projekts "Visualisierungen bei der Bearbeitung von mathematischen Modellierungsaufgaben" durchgeführt wurde, untersuchten wir im ersten Schritt die interne Struktur der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung beim mathematischen Modellieren. Wir testeten, ob sich die Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung besser als ein- oder als zweidimensionales Konstrukt empirisch beschreiben lässt (Abb. 2). Im zweiten Schritt testeten wir Effekte der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung auf die Skizzenqualität und die Modellierungsleistung.

Methode

Lernende ($n = 76$) der neunten Jahrgangsstufe bearbeiteten sechs geometrische Modellierungsaufgaben. Während der Bearbeitung trugen sie eine Eye-Tracking-Brille (Tobii Glasses 3, 50 Hz) und hatten einen durchschnittlichen Abstand von 53 cm zum Arbeitsblatt. Mit jedem Lernenden wurde eine 9-Punkt-Kalibrierung durchgeführt. Die durchschnittliche Accuracy betrug $1,16^\circ$. Zur Aufbereitung der Daten verwendeten wir Tobii Pro Lab Software, um Blickbewegungen (Fixationen, Sakkaden, Transitionen) in Bezug auf Areas of Interest (AOI-Aufgabentext inkl. AOI-relevante Zahlen, AOI-Skizze und AOI-Lösung) zu analysieren. Aus technischen Gründen wurden 13% der Aufgabenbearbeitungen ausgeschlossen. Es wurden Blickbewegungsindikatoren und ihre Interpretationen auf Basis bisheriger Forschungen (Alemdag & Cagiltay, 2018) und einer qualitativen Vorstudie gewählt (siehe Abb. 1). Die Phase der Skizzenkonstruktion begann mit dem Lesen des Aufgabentexts und endete mit dem finalen Erscheinungsbild der Skizze. Die Phase der Skizzennutzung schloss daran an und endete mit dem Notieren eines Terms (z. B. $22^2 + x^2 = 30^2$). Die Skizzenqualität und Modellierungsleistung wurden anhand der Skizzen und Lösungen zu den sechs Modellierungsaufgaben gemessen. In einem Partial-Credit-System wurde eine

vollständige und richtige Skizze mit Code 2 und eine falsche Skizze mit Code 0 sowie eine angemessene Lösung mit Code 2 und eine unangemessene Lösung basierend auf einem unangemessenen mathematischen Modell mit Code 0 bewertet (Rellensmann, 2019). Intercoder- und Skalen-Reliabilitäten sind als gut einzuschätzen (Cohen's $\kappa > .70$ und $\alpha > .79$).

Skizzenkonstruktion		Skizzennutzung	
Indikator	Interpretation	Indikator	Interpretation
Anteil der Fixationsanzahl auf relevante Zahlen an allen Fixationen im Aufgabentext	Selektion der relevanten Informationen	Anteil der Fixationsanzahl auf Skizze und Lösung an allen Fixationen	Intensität der Skizzennutzung
Anteil der Fixationsdauer auf relevante Zahlen und Skizze an der gesamten Fixationsdauer	Organisation und Integration der relevanten Information	Anteil der Fixationsdauer auf Skizze und Lösung an der gesamten Fixationsdauer	Intensität der Skizzennutzung
Anteil der Transitionen zwischen relevanten Zahlen zur Skizze an allen Transitionen zur Skizze	Organisation und Integration der relevanten Information	Anteil der Transitionen zwischen Skizze und Lösung an allen Transitionen zur Skizze	Übersetzung des geometrischen Modells in symbolisches Modell

Abb. 1: Blickbewegungen und Interpretationen

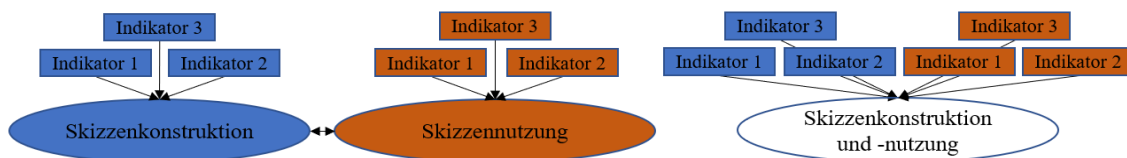


Abb. 2: Zwei- und eindimensionale Modelle der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung

Ergebnisse

Die interne Struktur wurde mit einer konfirmatorische Faktoranalyse bestimmt. Das eindimensionale Modell wies eine unzureichende Modellpassung auf, während das zweidimensionale Modell eine gute Passung zeigte. Mit Ausnahme eines theoretisch begründeten Indikators lagen die Faktorladungen zwischen 0,3 und 0,9. Die latenten Konstrukte der Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung korrelierten schwach. Lineare Regressionen zeigten einen positiven Effekt der Qualität der Skizzenkonstruktion auf die Skizzenqualität und die Modellierungsleistung. Die Qualität der Skizzennutzung hatte einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung.

Diskussion

Die Studie hat gezeigt, dass die Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung besser als zweidimensionales Konstrukt empirisch beschrieben werden kann. Dies deutet auf Unterschiede im Prozess der Zeichenstrategie in unterschiedlichen Phasen der Aufgabenbearbeitung hin. Die Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung beeinflusst die Skizzenqualität und/oder die Modellierungsleistung: Lernende, die die Skizze effektiver konstruierten,

zeichneten eine bessere Skizze und lösten die Aufgabe erfolgreicher als ihre Mitschüler*innen. Lernende, die die Skizze effektiver als Werkzeug nutzten, lösten die Aufgabe erfolgreicher.

Die Ergebnisse zeigen Zusammenhänge zwischen den Prozessen der Skizzenkonstruktion und -nutzung und den Produkten der Skizzenqualität und der Modellierungsleistung. Sie ergänzen die bisherige Forschung um die Qualität der Skizzenkonstruktion und -nutzung als Prozessvariable, die für die Wirksamkeit von Skizzen beim Modellieren eine Rolle spielt. Fördermaßnahmen sollten daher neben der Skizze als Produkt auch die Prozesse der Skizzenkonstruktion und -nutzung berücksichtigen.

Danksagung

Die Studie wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert (SCHO 2072/1-3, SCHU 2629/3-2).

Literatur

- Alemdag, E. & Cagiltay, K. (2018). A systematic review of eye tracking research on multimedia learning. *Computers & Education*, *125*, 413–428. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.023>.
- Boonen, A. J., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, *68*, 15–26. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>
- Bräuer, V., Leiss, D., & Schukajlow, S. (2021). Skizzen zeichnen zu Modellierungsaufgaben – Eine Analyse themenspezifischer Differenzen einer Visualisierungsstrategie beim mathematischen Modellieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *42*. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00182-7>
- Rellensmann, J. (2019). *Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24917-5>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., Blomberg, J., & Leopold, C. (2021). Does strategic knowledge matter? Effects of strategic knowledge about drawing on students' modeling competencies in the domain of geometry. *Mathematical Thinking and Learning*, *5* (3), 296–316. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012741>.
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 265–280. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2>
- van Garderen, D., Scheuermann, A., & Jackson, C. (2013). Examining how students with diverse abilities use diagrams to solve mathematics word problems. *Learning Disability Quarterly*, *36*(3), 145–160. <https://doi.org/10.1177/0731948712438558>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Hrsg.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (S. 1–8). Mathematical Association of America.