Dynamik eines magnetisch getriebenen granularen Gases und Untersuchung des Fluktuationstheorems

Dissertation

Zur Erlangung eines Doktorgrades der Naturwissenschaften
der Fakultät Physik der Technischen Universität Dortmund
in Kooperation mit dem
Max–Planck–Institut für molekulare Physiologie

von

Malte Schmick

27. März 2008

Betreuer der Arbeit und erster Gutachter:	Prof. Dr. Mario Markus Max–Planck–Institut für molekulare Physiologie Dortmund
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Joachim Stolze Lehrstuhl für Theoretische Physik I Technische Universität Dortmund

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Durch die Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer haben sich der Physik neue Methoden zur Untersuchung von Phänomenen erschlossen, die sich einer analytischen Beschreibung (z.B. durch Linearisierung) entziehen. Der Einfluss von nichtlinearen Effekten kann immer besser nachvollzogen werden und das Forschungsgebiet der nicht-linearen Physik erstaunt durch immer neue Beobachtungen. Numerische Experimente haben sich als anerkannte Forschungsmethoden etabliert und liefern tiefe Einblicke in die Funktionsweise sonst unzugänglicher Bereiche. Auch die computergestützte Auswertung von Experimenten lässt sich aus der heutigen Forschung nicht mehr wegdenken.

Als Gebiet der nicht-linearen Physik mit vielfältigem industriellen Nutzen belegen "granulare Medien" immer noch einen wichtigen Platz (für einen ausführlichen Überblick siehe [1,2]). Unter granularen Medien versteht man Schüttgüter wie Kies, Sand oder Mikroperlen, deren Eigenschaften "zwischen" denen von Festkörpern und Flüssigkeiten eingeordnet werden. Daher lassen sie sich nur schwer durch Methoden der Festkörperphysik oder Hydrodynamik beschreiben und warten mit einer Vielzahl von unterschiedlichsten Effekten auf, wie z.B. Strukturbildung oder Selbstorganisation, die häufig konterintuitiv sind (Mirage-Effekt[1], Paranuss-Effekt[2] oder die Zeitmessung mit Sanduhr[3]).

Die Methoden, die bei der Simulation von granularen Medien angewandt werden, kommen darüber hinaus vielfältig zur Anwendung. So liefert die Anwendung der Molekulardynamik ebenso Informationen über die Faltung von Proteinen, wie über die Organisation von Doppellipidschichten in biologischen Membranen.

Reguläre granulare Medien bestehen aus mesoskopischen Teilchen von Größen im Bereich 10^{-4} m bis 10^{-1} m. Sie eignen sich sehr gut für Experimente und haben hohen didaktischen Wert. Die zentrale Eigenschaft von granularen Medien ist die

[1] Ablenkung von Schallwellen in einem granularen Medium [3]

[2] Das vertikale "Sortieren" von Teilchen verschiedener Größe oder Dichte in einer Mischung im Schwerefeld durch Schütteln [4]

[3] Unabhängigkeit der Ausflussgeschwindigkeit vom Füllstand [5]

stete Dissipation von Energie, was sie z.B. von einem idealen Gas unterscheidet. Ohne konstante Energiezufuhr kommt jegliche Dynamik in einem granularen Medium zum Erliegen. Möchte man also ein granulares Medium in Bewegung halten, so muss dem System stetig Energie zugeführt werden. Daher befinden sich Prozesse im Medium selten im thermischen Gleichgewicht, selbst wenn sich systemeigene Größen im zeitlichen Mittel nicht ändern. Führt man dem granularen Medium viel Energie zu, so kann man sogar granulare "Gase" erzeugen, die im Limes idealer, elastischer Stöße mit herkömmlichen Gasen vergleichbar wären.

Bei der Anregung eines granularen Mediums sind bisher fast ausschließlich mechanische Verfahren zur Anwendung gelangt (z.B. vibrierender Boden [6, 7], rotierende Trommel [8–11], kippende Kiste [12], geschwenkte Schale [13, 14], gescherte Schichten [15] oder schiefe Ebene [16]). Die starren Begrenzungen werden mechanisch verändert und übertragen so Energie auf die dem Rand benachbarten Teilchen. Solche Systeme werden auch als "elitäre" Systeme bezeichnet, da Teilmengen des Mediums energetisch bevorzugt werden [17]. Durch dissipative Stöße breitet sich die Energie dementsprechend ungleichmäßig und z.T. stark gedämpft in dem Medium aus. Dies erschwert die Definition einer "granularen Temperatur", um die Energie des Systems zu beschreiben. Auch das Identifizieren von bekannten Eigenschaften der Thermodynamik, wie z.B. der Maxwell-Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten eines Gases, ist in elitären Systemen im Allgemeinen nicht möglich. Deswegen richtete sich das Augenmerk auf "demokratische" Systeme [17], die alle Teilchen gleichsam anregen. Während solche Systeme zunächst theoretisch [18–20] simuliert wurden[4], stellt die Arbeit von Ippolito et al [21] die erste experimentelle Veröffentlichung dar. Dort wurden Scheiben mit geringer Dissipation in einem 3 m hohen vertikalen Windtunnel – auf dem "Luftkissen" einer durchlöcherten Platte fast reibungsfrei gleitend – untersucht. Der Luftstrom ist gleichmäßig und wiegt die Dissipation auf. Dieses System war ein guter Kandidat für ein ideales granulares Gas. Doch auch hier wurden, wie für granulare Medien üblich, starke Abweichungen von der Maxwell-Verteilung nachgewiesen. Weiterhin lieferte es für binäre Mischungen keine Energie-Equipartition, was den Annahmen des "nullten" Hauptsatzes der Thermodynamik widerspricht.

Aus diesen "Fehlschlägen" motiviert sich die initiale Aufgabenstellung, einem granularen Medium auf neuartige demokratische Art Energie zuzuführen, um so unter

[4] Die 1D bzw. 2D Simulationen lieferten koexistentierende Regime unterschiedlicher Dynamik, was man von einem idealen Gas nicht erwarten würde.

Umständen sogar mesoskopische Thermodynamik mit bloßem Auge zu ermöglichen. Wie inzwischen in einigen Arbeiten [22, 23] vorgeschlagen, wird dazu der Rotationsfreiheitsgrad genutzt. Dazu wurde ein magnetisches granulares Gas konzipiert und experimentell umgesetzt, dass von einem homogenen, periodisch oszillierenden Magnetfeld mit Energie versorgt wird. Bei der Untersuchung dieses Mediums wurden verschiedene Phänomene beobachtet, z.B. Intermittenz. Hierbei handelt es sich um die unvorhersagbare Abfolge von Zeitintervallen geordneter und ungeordneter Bewegung.

Auf der Suche nach dem idealen granularen Gas trat auch das Verhalten von wenigen Teilchen auf kleinen Zeitskalen in das Zentrum des Interesses. Hier stößt eine allgemeine Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (ein Wärmereservoir nimmt *im Mittel* keine Energie von einem kälteren Medium auf) an ihre Grenzen. Denn "Fluktuationen", der von einem Medium aufgenommenen bzw. abgegebenen Energie um ihr zeitliches Mittel, können sehr wohl einen Fluss gegen die "Treibung" hin zum energieliefernden "Reservoir" hervorbringen. Obwohl am Rande der thermodynamisch sinnvollen Betrachtung, sind gerade diese Zeit- und Größenskalen interessant in Bezug auf Chemie und Mikrobiologie, wo z.B. die energetische Effizienz von Muskelfasern und intrazellulären "Ionenpumpen" immer noch ein Rätsel darstellt.

Überblick

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen. In Kapitel 1 wird zunächst das entworfene granulare magnetische Medium erklärt und der experimentelle Aufbau beschrieben, mit dem dieses untersucht wurde. Es werden einige experimentelle Phänomene präsentiert, die das System auszeichnen. Als numerisches Experiment wurde der Versuchsaufbau mit Methoden der Molekulardynamik simuliert. Die Dynamik des Systems wird unter Variation der beiden Treibungsparameter (Frequenz und Amplitude des äußeren Magnetfeldes) untersucht und die verschiedenen Bewegungsmodi dieses granularen Mediums erläutert. Anschließend wird der bei der Untersuchung der Dynamik auftretende Effekt der "Intermittenz" beschrieben. Weiterhin werden die Geschwindigkeitsverteilungen in Translation und Rotation für den intermittenten Modus untersucht. Abschließend wird für dieses System die Frage der Energie-Bilanz beleuchtet. Es werden die experimentellen Schwierigkeiten zur Bestimmung der vom granularen Gas aufgenommenen Energie diskutiert und aus den Simulationsdaten gewonnene Abschätzungen erläutert.

Als experimentell nicht beantwortbare Frage aus Kapitel 1 verbleiben die Fluktuationen der mittleren Energiebilanz des magnetischen Gases. Das als Erweiterung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik zu verstehende "Fluktuationstheorem" wird eingeführt.

In Kapitel 2 wird zunächst ein mathematisches Modellsystem betrachtet, nämlich eine Punktmasse in einem eindimensionalen Duffing-Potential. Als ein experimentell umsetzbarer Ansatz wird hiernach ein 2D-Billard-System mit einer Kugel (im Aufbau ähnlich dem bekannten Sinai-Billard), sowohl experimentell als auch in numerischer Simulation, dargestellt. Abschließend folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein allgemeines Fazit.

Kapitel 1 – Das magnetische granulare Medium

Initiale Zielsetzung dieser Arbeit ist es, eine räumlich homogene Anregung eines granularen Mediums zu erreichen. Hierzu erscheint eine magnetische Anregung geeignet, da über ein Feld auch das Innere eines Volumens mit Energie versorgt werden kann. Benutzt man ein homogenes Magnetfeld, so wirkt auf einen magnetischen Dipol keine Kraft, sondern ein Drehmoment, das Rotationsenergie auf den Dipol überträgt. Diese wiederum kann durch Kontakt oder Kollision der Kugeln untereinander und mit den Randbedingungen in Translation umgewandelt werden.

Es bietet sich an, zunächst ein auf eine zweidimensionale Ebene beschränktes granulares Gas (in x-y-Richtung) zu betrachten, das einem Feld senkrecht zu dieser Ebene (in z-Richtung) ausgesetzt wird. Auf diese Weise ist das System entlang der z-Achse gut zu beobachten und die Anregung ist für alle Positionen der Teilchen gleich ohne eine Bewegungsrichtung zu bevorzugen. Ebenso bringt die Gravitation keine Vorzugsrichtung in das System, da sie keine Komponente in der x-y-Ebene hat.

In der Literatur finden sich einige Beispiele für experimentelle Untersuchungen an permanentmagnetischen und magnetisierbaren granularen Medien. Es wurden Monolagen von magnetisierten Stahlpartikel [24] und nicht-magnetisierbaren Kugeln mit einem eingebetteten Permanentmagneten [25] unter Einfluss von Vibration, also ohne treibendes Magnetfeld, untersucht. Ein Beispiel [26] für ein magnetisch getriebenes System ist auf 2D beschränkt und verwendet Scheiben mit permanentem Dipol, die auf einer Flüssigkeitsoberfläche schwimmen. Deren Dipol ist in dieser Ebene fixiert und als Treibung fungiert ein Magnetrührer mit stark inhomogenem Feld. Alle diese Systeme zählen jedoch zu den elitären, also ist die hier präsentierte experimentelle Umsetzung eines demokratischen magnetischen Mediums neuartig.

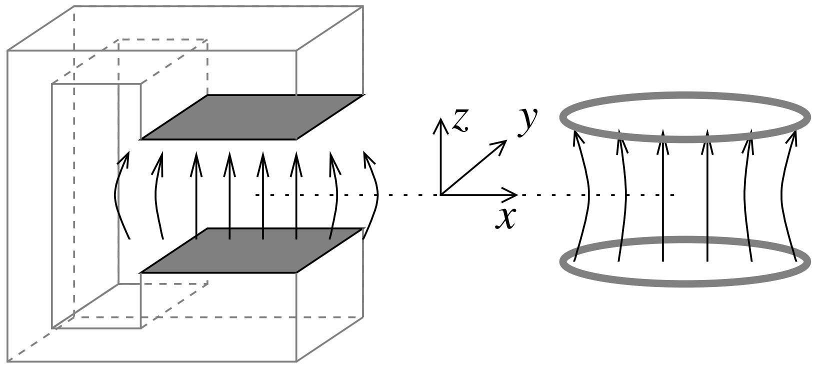

Abbildung 1.1.1: Zwei Geometrien, um ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen. Links: parallele Polschuhe im "Spalt" eines C-förmigen Eisenkerns. Rechts: Helmholtz-Spulenpaar. Als Pfeile skizziert: Richtung des magnetischen Feldes in der $x-z-$Ebene für $y=0$.

1.1 Experimenteller Aufbau

Das Experiment besteht aus drei Komponenten: a) dem Magnetfeld, b) den magnetischen Teilchen und c) den Randbedingungen denen sie ausgesetzt sind. Diese Bestandteile sollen im Folgenden ausführlicher beschrieben werden.

1.1.1 Das Magnetfeld

Zur Erzeugung eines nahezu homogenen Magnetfeldes eignen sich prinzipiell zwei Geometrien: zwei parallele, ausgedehnte Pol-Schuhe eines C-förmigen Weicheisenkerns oder ein Helmholtz-Spulenpaar, bzw. das Innere einer Zylinderspule (s. Abb. 1.1.1). Bei der ersten Möglichkeit kann durch die relative Permeabilität des Eisens und die Tatsache, dass außerhalb des Spalts und des Kerns eine kaum messbare Magnetfeldstärke vorliegt, mit einer geringeren Stromstärke eine wesentlich höhere Feldstärke im "Spalt" erzeugt werden. Allerdings ist eine Beobachtung entlang der z-Richtung mit einer Kamera nicht ohne weiteres möglich und für die Dimensionen des Experiments in der Größenordnung 10^{-1} m ist eine große Menge Eisen erforderlich. Eine Spule bietet hingegen leichte Beobachtbarkeit in z-Richtung.

Versuche mit einem Helmholtz-Spulenpaar liefern nur sehr geringe Feldstärken. Die magnetische Feldstärke einer Spule hängt von der Stromstärke und der Wicklungszahl ab. Um hohe Ströme zu ermöglichen, muss der Gleichstromwiderstand niedrig sein. Dies erfordert einen hohen Drahtdurchmesser mit hoher spezifischer Leitfähigkeit. Möchte man dazu noch eine große Wicklungszahl, ergeben sich zu große Ausmaße für ein Helmholtz-Spulenpaar. Daher wird eine selbst gebaute, ausgedehnte Zylinderspule verwendet. Auf einem PVC-Zylinder (Innendurchmesser $125 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) befindet sich Kupferdraht (Durchmesser $2,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ zuzüglich einer Schicht Isolierungslack von $1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ Dicke) in 20 Lagen auf einer Breite von $108 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ (entspricht 40 Wicklungen) und getrennt von je einer Schicht Ölpapier der Dicke $0,2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

Dieser Aufbau stellt eine gute Kombination von Gesamtgewicht[1], Gleichstromwiderstand der Spule, maximaler Betriebsstromstärke und Abmessungen des Aufbaus dar. Für die innerste der 20 Lagen Kupferdraht ergibt sich ein Radius von $67,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$, für die äußerste $119,75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ und es sind insgesamt $478\,\mathrm{m}$ Draht verarbeitet worden. Der Gleichstromwiderstand der Spule beträgt $1,73\,\Omega$. Um unterschiedliche Wicklungszahlen verwenden zu können, ist der Kupferdraht nach jeder zweiten Lage an der Kopfseite der Spule unterbrochen, nach Außen geführt und mit Lüsterklemmen wieder verbunden. So kann die Wicklungszahl in 10 Schritten verändert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch stets die volle Wicklungszahl verwendet.

Das Feld einer Spule kann mit einer Hall-Sonde vermessen werden. Für die analytische Berechnung der Eigenschaften einer Spule, integriert man das Biot-Savart-Gesetz

$$d\,\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu\, I}{4\pi\, r^3}(d\vec{l} \times \vec{r}) \ . \tag{1.1.1}$$

Abb. 1.1.2 zeigt das errechnetet und vermessene Magnetfeld für die verwendete Spule. Es ergibt sich experimentell eine Induktivität von $L = (88,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}$ (berechneter Wert: $88 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}$). Das magnetische Feld in axialer Richtung im geometrischen Zentrum des Spuleninneren wird mit $B_0/I_0 = (4,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T/A}$ aus der Steigung der Messkurve bei Variation der Stromstärke von $(0 - 10)\,\mathrm{A}$ errechnet und deckt sich mit dem berechneten Quotienten ($B_0/I_0 = 4,\bar{6} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T/A}$). Die Spule ist – wie am Anfang dieses Kapitels motiviert – ausschließlich so orientiert, dass Magnetfeld und Gravitation parallel (bzw. anti-parallel) zueinander sind. Im Inneren der Zylinderspule befindet sich eine horizontale, höhenverstellbare Platte. So können verschiedene Behälter, z.B. Petrischalen ins Zentrum der Spule positioniert werden. Wie Abb. 1.1.2 zu entnehmen, variiert die Amplitude des Magnetfeldes dort in ra-

[1] Durch den elektrischen Widerstand kommt es bei hohen Stromstärken durchaus zu einer merklichen Erwärmung der Spule. Jedoch ist durch die hohe spezifische Wärmekapazität von Kupfer und die Menge verwendeten Kupfers (etwa 21 kg) ein Dauerbetrieb bei 10 A Stromstärke unproblematisch.

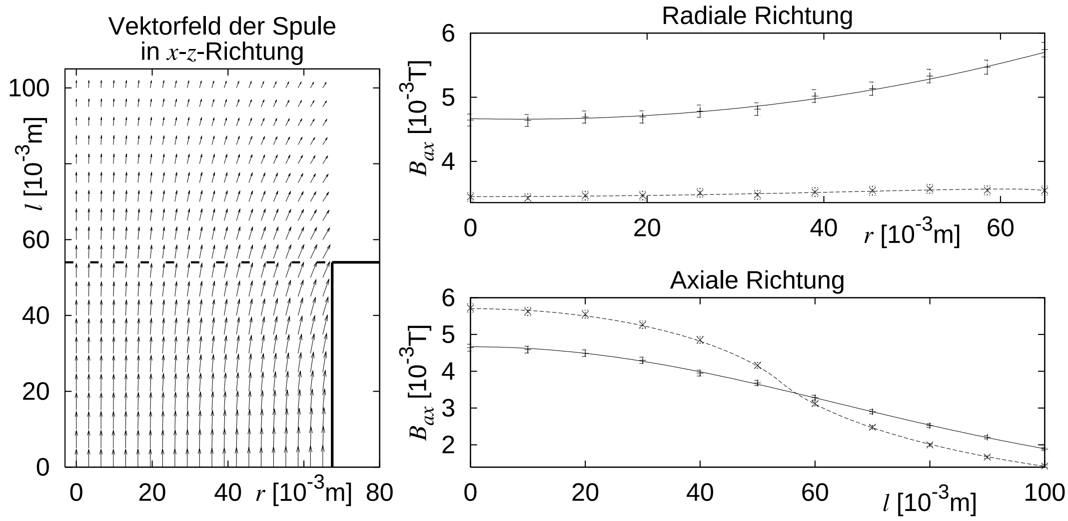

Abbildung 1.1.2: Links: Vektorfeld-Darstellung des mittels Gl. 1.1.1 berechneten Magnetfeldes in der x-z-Ebene für $y = 0$; l ist der axiale Abstand zum Mittelpunkt der Spule, r der radiale Abstand; die Begrenzung der Spule ist markiert (gestrichelte Linie: Übergang vom Spuleninneren nach außen; durchgezogene Linie: Übergang zu den Wicklungen). Rechts: Axiale Komponente der magnetischen Feldstärke bei Variation des Messortes für $I = 1\,\mathrm{A}$; die Linien entsprechen der numerischen Berechnung der Feldstärke mittels Gl. 1.1.1. Oben: entlang r für $l = 0$ (durchgezogene Linie) und $l = 55 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ (gestrichelte Linie). Unten: entlang l für $r = 0$ (durchgezogene Linie) und $l = 65 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

dialer Richtung auf $25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ Radius um weniger als 2%. Dieser Radius entspricht dem der später am häufigsten verwendeten Schalen. Auf einer "Schicht-Dicke" von $20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ Dicke in z-Richtung fällt die Amplitude um weniger als $0,5\%$ ab. Die Divergenz des Feldes in diesem Volumensegment ist ebenfalls zu vernachlässigen (Anteil der radialen Feldstärke $< 1,2\%$).

Als Leihgabe des Fachbereichs Elektrotechnik wird ein Leistungsverstärker[2] benutzt. Dieser wird von einem ebenfalls zur Verfügung gestellten Funktionsgenerator[3] mit einer Wechselspannung versorgt und liefert einen Ausgangsstrom $\tilde{I} = I_0 \sin(2\pi\,\nu\,t)$. Dieser Aufbau ermöglicht ein periodisches magnetisches Wechselfeld mit Amplituden im Zentrum der Spule von maximal $B_0 = 23,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$. Die Stromstärke, mit welcher der Verstärker die Spule versorgt, wird mit einem Oszilloskop überwacht. Es misst den Spannungsabfall über einen in Reihe geschalteten Widerstand von $1\,\Omega$ und wird benötigt, sowohl um die Amplitude der Oszillation zu messen, als auch um sicherzustellen, dass der Funktionsgenerator keinen Gleichstromanteil liefert.

[2] *Bipolar Operational Power Amplifier* BOP 35-5M, Kepko; $U_{out} \pm 36\,\mathrm{V}$, $I_{out} \pm 5\,\mathrm{A}$
[3] *Waveform Generator* TF 2120, Marconi Instruments Ltd.

Die Gesamtschaltung hat eine Impedanz von $Z = R + i\omega L = 1,73 + (0,55\nu)i$. Bei der höchsten in dieser Arbeit benutzten Frequenz von 35 Hz ergibt das einen effektiven Widerstand von $19,3\,\Omega$. Dies bedeutet, dass man die Frequenz im Experiment nicht unabhängig von der magnetischen Feldstärke variieren kann, da sich der Widerstand der Schaltung deutlich ändert.

1.1.2 Das granulare Medium

In den Experimenten dieser Arbeit werden zwei verschiedene Arten von Teilchen benutzt: magnetisierbare Kugeln und nicht-magnetisierbare Kugeln mit einem integrierten Permanentmagneten (folgend Dipolkugeln genannt, vergl. Abb. 1.1.3). Für erstere bieten sich Stahl-Kugellager-Kugeln an, da sie günstig, einfach und in verschiedensten Durchmessern (hier variiert der Kugelradius R_K zwischen 10^{-3} m und 10^{-2} m) erhältlich sind. Um die Kugelsymmetrie der Dipolkugeln möglichst intakt zu halten, werden Halbkugeln gewählt, die von Innen angebohrt werden. Dadurch entsteht ein zylindrischer Hohlraum, der mit einem Permanentmagneten[4] versehen werden kann. Danach können die Halbkugeln miteinander verklebt werden. In den vorgestellten Experimenten werden Kugeln aus Holz[5] mit $R_K = 3 \cdot 10^{-3}$ m und PVC[6] mit $R_K = 2 \cdot 10^{-3}$ m verwendet.

Die Magnetisierung der meisten Permanentmagnete ist jedoch zu stark. Die Dimensionen der Magnete in Relation zum Kugeldurchmesser lässt die Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung dominieren. Man erhält als Dipolmoment

$$\mu = P\, l_P \approx \pi r_P^2 M_{rem}\, l_P \tag{1.1.2}$$

für einen zylindrischen Magneten mit Länge l_P und Radius r_P, mit Nord- bzw. Südpol der Stärke P an den Stirnflächen, dessen Material eine Remanenzmagnetisierung M_{rem} trägt. Bei ausgedehnten Dipolen (d.h. die Ausdehnung der Magnete liegt in derselben Größenordnung wie der Abstand r_{ij} zwischen zwei Dipolen) gilt nicht mehr die aus der Literatur bekannte r_{ij}^{-3}-Näherung für Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Liegen in diesem Fall zwei Kugeln Nordpol an Südpol ($r_{ij} = 2R_K$), so verläuft die Anziehung der Pole im wesentlichen quadratisch mit dem Abstand $d = 2(R_K - l_P)$

[4] Diverse Muster in unterschiedlicher Magnetisierung und unterschiedlichen Maßen von *Schallenkammer Magnetsysteme*, Rimpau

[5] *Idee* Bastelbedarf, Dortmund

[6] Spezialanfertigung von *Beichler+Grünenwald*, Löchgau

zwischen Nordpol der einen und Südpol der anderen Kugel und quadratisch mit der Polstärke P. Für die Kopplung an das äußere Feld gehen l_P und P linear in das erzeugte Drehmoment ein. Im Hinblick auf den Versuch, ein "ideales granulares Gas" (d.h. mit nur geringer Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung) zu erzeugen, ist es also kaum erheblich, ob man P oder l_P variiert. Da M_{rem} für die meisten Materialien konstant ist, sind r_P und l_P die relevanten Parameter. Es stellt einen guten Kompromiss dar, schlanke Zylinder ($r_P < l_P$) mit $l_P \simeq R_K$ und mäßiger Remanenz zu wählen. So bleibt die Näherung gewahrt, die Stirnfläche auf einen Punkt mit der Polstärke P zu reduzieren. Mit einer Lochzange lassen sich aus einer Magnetfolie[7] Zylinder stanzen. Für die Holzkugeln kombiniert man je zwei, Nord- an Südpol gestapelte, $1,5 \cdot 10^{-3}$ m hohe, $2 \cdot 10^{-3}$ m durchmessende zylindrische Magnete. Die Maße der Magnete für die PVC-Kugeln sind: $1,5 \cdot 10^{-3}$ m hoch; $1 \cdot 10^{-3}$ m Durchmesser. Ohne äußeres Feld bilden die Kugeln zusammenhängende Ketten (jeweils Nord- an Südpol), wie z.B. aus [24] bekannt. Schon mäßige äußere Feldstärken reichen allerdings aus, um sie aufzutrennen.

1.1.3 Die Randbedingungen

Wie zuvor beschrieben, besteht die Möglichkeit, Behälter für das granulare Medium in die Zylinderspule einzubringen. Dafür eignen sich z.B. Petrischalen. Der Boden und der Rand der Schalen stellen für das Medium die Randbedingungen dar. Im Verlauf der Arbeit wurden viele verschiedene Geometrien getestet (runde, quadratische, rechteckige Schalen; ebener Boden, parabolischer Boden). Als gut geeignet stellten sich *Falcon* Zellkulturschalen[8] heraus, da Boden und Rand im Gegensatz zu Petrischalen aus Glas perfekt plan sind und ihr Rand zur Optimierung der Beleuchtung einfach auf die Höhe der Kugeldurchmesser gekürzt werden kann. Die kleineren Schalen liegen zudem in der Spule deutlich im homogenen Teil des Magnetfeldes; sofern nicht anders angegeben, sind sie in den vorgestellten Experimenten verwendet worden. Die größeren Schalendurchmesser wurden nur für qualitative Aussagen verwendet, um einen Einfluss der Divergenz des Magnetfeldes auszuschließen. Abb. 1.1.3 zeigt schematisch den Versuchsaufbau für Kugeln in einer kreisförmigen Schale.

[7] *Schallenkammer* Flexo 180, Remanenzmagnetisierung $265 \cdot 10^{-3}$ T, Schichtdicke $15 \cdot 10^{-3}$ m

[8] Material Polystyrol; Innendurchmesser: $90 \cdot 10^{-3}$ m (35/3003) bzw. $49,7 \cdot 10^{-3}$ m (35/3004); Randhöhe auf $5 \cdot 10^{-3}$ m gekürzt

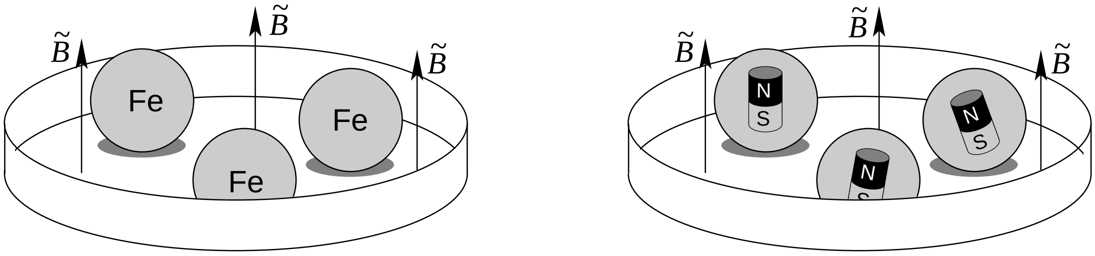

Abbildung 1.1.3: Schematische Darstellung von Kugeln in einer Schale unter Einfluss eines äußeren, magnetischen Wechselfeldes $\tilde{B}$. Links: magnetisierbare Stahlkugeln. Rechts: Kugeln mit eingebettetem Permanentmagnet.

Erheblichen Einfluss auf die Dynamik des Systems hat die Beschaffenheit des Bodens, da die Gleitreibung zwischen Boden und Teilchen die Translation erst ermöglicht. Der Gleitreibungskoeffizient der Kugeln auf dem "nackten" Schalenboden (Polystyrol oder Glas) ist äußert niedrig, sodass kaum Translation entstehen kann. Daher werden hier verschiedene Beläge benutzt (in aufsteigender Reihenfolge des Gleitreibungskoeffizienten): Papier, Parafilm und Filz. Abb. 1.1.4 zeigt eine Aufnahme des experimentellen Aufbaus.

1.2 Videoaufnahme und Beleuchtung

Für die experimentelle Beobachtung wird senkrecht über dem Aufbau eine Kamera montiert. Benutzt man eine analoge CCD-Kamera[9], so kann das Experiment auf VHS-Videokassette aufgezeichnet werden. Die aufgezeichneten bzw. die Live-Bilddaten werden mit einer TV-Karte (Terratec TValue BT878) im Computer zur Weiterverarbeitung zur Verfügung gestellt. Hierzu kommt ein modulares Software-Paket zum Einsatz. Dieses ermöglicht die Speicherung der Videodaten und die vorherige oder nachträgliche Bearbeitung der Bilddaten mit eigens dafür entwickelten Algorithmen. Es stellt das Ergebnis der Zusammenarbeit mit Oliver Schulz im Rahmen seiner Diplomarbeit [27] dar.

Für erste Experimente ausreichend, ist die geringe zeitliche Auflösung der Kamera von 50 Hz für quantitative Aussagen problematisch. Außerdem ist die zeitliche Unschärfe der Belichtung während dieser 0,02 s zu groß, sodass schnellbewegte Ku-

[9]Hier stand eine Pieper FK2125-IQ zur Verfügung mit einer Auflösung (PAL-Standard) von 50 Halbbildern (720×288 Bildpunkte) pro Sekunde

Abbildung 1.1.4: Photo des Experiments. Vorne: Spule mit Kugeln in Petrischale. Hinten links: Funktionsgenerator und Verstärker. Hinten rechts: Oszilloskop zur Messung der Stromstärke und Stromversorgung für die Beleuchtung

geln verschmiert erscheinen. Daher wird ebenfalls eine digitale CMOS-Kamera[10] benutzt. Abhängig von der frei wählbaren Bildgröße (max. 656×491 Bildpunkte) liefert sie eine Bildwiederholrate von bis zu 1000 Hz und bietet eine einstellbare Belichtungsdauer (minimal $20 \cdot 10^{-6}$ s).

Für die Beleuchtung kommen verschiedene Varianten in Frage. Das Experiment kann von oben beleuchtet werden, sodass die Oberflächen der Kugeln abgebildet werden. Andererseits kann auch im diffuser Durchlicht von unten beleuchtet werden. Die Kugeln erscheinen dann als Schatten vor der Kamera.

1.2.1 Beleuchtung von unten

Beleuchtet man das Experiment von unten durch die transparente Schale mit Hilfe einer Halogenlampe, so stellt sich dabei ein starker radialer Helligkeits-Gradient ein, der die Auswertung erschwert. Zusätzlich unterliegt ein herkömmlicher Transformator Schwankungen der Stromnetzfrequenz von ebenfalls etwa 50 Hz, sodass durch Schwebung deutliche Bildhelligkeitsschwankungen auftreten. Die Beleuchtung von

[10] *Basler* A602f-2 mit direkter PC-Anbindung über Firewire (IEEE-1394)

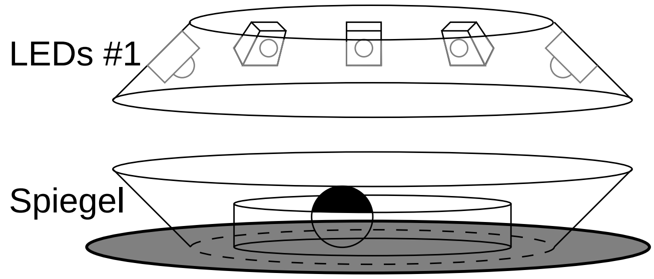

Abbildung 1.2.1: Schematische Darstellung der Beleuchtung des Experiments. Oben: nur ein Ring LEDs ist angedeutet, drei Ringe mit je 10 Vierer-Gruppen SMD-LEDs sind parallel verschaltet und mit 10 V Gleichspannung bei 0,1-0,8 A betrieben. Über Justierung der Stromstärke kann die Lichtintensität variiert werden. Unten: auf Höhe der Schale mit einer Kugel befindet sich ein konischer Ring aus spiegelndem Aluminiumblech zur Erhöhung der Lichtausbeute.

unten mit einer Elektrolumineszens-Leuchtfolie[11] stellt sich als geeignet heraus, da sie sehr gleichmäßig und hochfrequent (5000 Hz) Licht liefert. Weiterhin entsteht ein perfekter Kontrast, da die massiven Kugeln als schwarze Schatten vor einem leuchtenden, weißen Hintergrund erscheinen.

1.2.2 Beleuchtung von oben

Möchte man die Rotationsgeschwindigkeit der Kugeln bestimmen, so muss man Markierungen auf der Kugeloberfläche verfolgen. Dies funktioniert nur mit einer Beleuchtung von oben. Dazu gilt es, einen möglichst homogenen diffusen Lichtraum zu erzeugen, um Glanzpunkte auf den Kugeln, Reflexionen von der Schale und Schatten zu vermeiden.

Um eine hohe, zeitlich konstante Lichtausbeute zu erhalten, werden gleichstrombetriebene LEDs[12] verwendet. Jeweils zehn Gruppen aus vier Dioden sind auf einer flexiblen Leiterbahn[13] als Ring eines Konus verlötet und drei dieser Ringe in der Spule in unterschiedlichen Höhen angebracht. Zusätzlich hilft ein konischer Ring aus spiegelndem Aluminiumblech auf Höhe der Schale, die Lichtintensität am Rand der Kugeln zu erhöhen, ohne Reflexionen am Boden der Schale oder auf den Kugeln selber zu erzeugen. Für eine schematische Darstellung siehe Abb. 1.2.1. Durch

[11]EL-Folie A5 WS, Reichelt Elektronik GmbH
[12]SMD-LED 1206K-RT mit Kuppellinse, 0,6 cd Leuchtstärke; *Reichelt Elektronik GmbH*
[13]Kapton, *Straschu Industrie-Elektronik GmbH*, Stuhr

die große, zur Verfügung stehende Lichtintensität ist es möglich, eine Belichtungszeit pro Bild von nur $0,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$ zu wählen und so Bewegungsunschärfe faktisch zu eliminieren. Bei einer typischen Bildauflösung von 256×256 Bildpunkten und einer daraus resultierenden Bildwiederholrate von etwa 250 Hz ist die Obergrenze der Belichtungszeit pro Bild $4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

1.3 Auswertung der Bilddaten

Als Maß für das während der Belichtungszeit eines Bildes auf den Sensor der Kamera fallende Licht steht eine 2D-Bildmatrix zur Weiterverarbeitung zur Verfügung. Jeder Bildpunkt dieser Matrix kann 256 Graustufen unterscheiden. Die hierbei anfallende Datenmenge ist ziemlich groß (etwa 1 GByte/min). Allein die Speicherung stellt selbst neuere Hardware vor Probleme. Eine Kugel i ist in einem solchen Bild durch die Position ihres Schwerpunktes $\vec{S}_i$ charakterisiert. Um $\vec{S}_i$ zu berechnen, müssen die Koordinaten $\vec{p}_{i,k}$ aller n_i Bildpunkte, die zu dieser Kugel gehören, gemittelt werden:

$$\vec{S}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \vec{p}_{i,k} \tag{1.3.1}$$

Die ideale Kompression von Bildinformationen stellt die Echtzeitauswertung des Experiments dar, die für jedes Bild nur Kugelpositionen $\vec{S}_i$ abzuspeichern hat. Das Programmpaket verfügt zusätzlich über die Möglichkeit der Kompression des Bilddatenstroms (sowohl verlustbehaftete, wie auch verlustfreie) und ist für parallelisierte Arbeit auf einer Multiprozessor-Architektur optimiert. Allerdings gelingt keine synchronisierte Aufnahme (d.h. etliche Bilder pro Sekunde müssen "verworfen" werden), da die Speicherung des komprimierten Datenstroms nicht in Echtzeit möglich ist.

1.3.1 Zusammensetzung eines Bildes

Im Wesentlichen sind drei Arten von Objekten in jedem Bild zu unterscheiden: 1) der Hintergrund; 2) die Kugeln; und 3) eventuelle Markierungen auf den Kugeloberflächen. Auch wenn bei einer Schwarz-Weiß-Kamera viele Graustufen zur Verfügung stehen, gelingt es nicht, diese Objekte rein farblich zu unterscheiden (z.B. weiße Kugel mit schwarzen Punkten vor grauem Hintergrund). Die weichen Helligkeitsgradienten in den Übergangsbereichen dieser drei Objekttypen verhindern eine zuverlässige Unterscheidung. Objekterkennung und -verfolgung ist eine Fähigkeit, die die Auge-Gehirn-Kombination des Menschen sehr gut beherrscht, aber eine algorithmisch stabile Umsetzung für den Computer ist problematisch. Kommerziell existieren nur Speziallösungen, bei denen Kamera und Aufnahme- bzw. Auswertungssystem gekoppelt sind. Diese Lösungen sind jedoch sehr teuer oder wenig flexibel, daher wurden die Algorithmen zur Auswertung vollständig selbst implementiert. Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten Methoden erläutert.

1.3.2 Erfassung der Kugelpositionen (Beleuchtung von unten)

Bei Aufnahme eines Videos im Gegenlicht erhält man optimalen Kontrast für die Kugeln und man vermeidet Schatten, da die Kugeln selbst die “Schatten” vor der diffusen Hintergrundbeleuchtung sind. Allerdings kommt es auch hier zu Problemen: Zwei kollidierende Kugeln bilden optisch eine zusammenhängende Fläche (siehe Abb. 1.3.1, links). Der zuverlässigste Weg führt hier über die sog. Erosion: Für jeden schwarzen Bildpunkt wird eine Nachbarschaft mit einem Radius R definiert. Alle schwarzen Bildpunkte mit mindestens einem benachbarten weißen Bildpunkt sind Teil des Randes der Kugel und werden grau gefärbt. Nachbarschaften mit $R > 1$ Bildpunkt sind rechenintensiver, führen aber zu erodierten Flächen mit gleichmäßig dicken Rändern, während die Nachbarschaft der nächsten Nachbarn (oben, unten, rechts, links) bei häufiger Iteration bevorzugt 45° geneigte Kanten produziert.

Zur Bestimmung, welche Bildpunkte zusammenhängen, eignet sich der sog. rekursive *floodfill*-Algorithmus: Alle Bildpunkte werden auf ihren Grauwert getestet. Wird ein schwarzer Bildpunkt gefunden, so startet der *floodfill*. Der Bildpunkt wird weiß gefärbt und der *floodfill* ruft sich selbst für alle seine direkten Nachbarn (oben, unten, links, rechts) als Startkoordinaten erneut auf, sofern sie ebenfalls schwarz sind. Jede besuchte Koordinate wird aufsummiert. Die Rekursion endet, wenn alle zusammenhängenden Punkte besucht wurden und so die Kugel aus dem Bild gelöscht ist, da keine benachbarten Bildpunkte mehr schwarz sind. Dabei sind alle besuchten n_i Punkte gezählt und ihre Koordinaten $\vec{p}_{i,k}$ aufsummiert, sodass $\vec{S}_i$ berechnet werden kann.

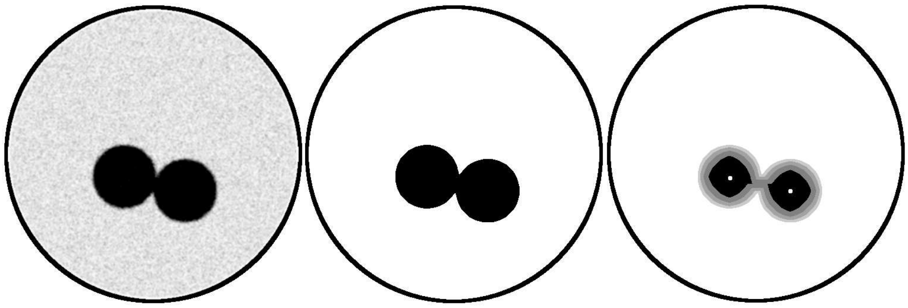

Abbildung 1.3.1: Bestimmung des Kugelschwerpunktes. Bei Kollision von zwei (oder mehr) Kugeln ist die Zuordnung der Bildpunkte zu den jeweiligen Kugeln nicht trivial. Links: Originalbild; mitte: Grauwert-Cutoff; rechts: Dreistufige Erosion mit Schwerpunktsbestimmung (Schwerpunkt weiß markiert).

Um Kugelpositionen zu bestimmen werden u.a. die beiden beschriebenen Algorithmen kombiniert: Zunächst wird der Hintergrund von den Kugeln getrennt, indem eine Schwarz-Weiß-Konvertierung mit einem definierten Graustufenschwellwert durchgeführt wird. Dadurch wird der Hintergrund monochrom weiß und jede Kugel monochrom schwarz (s. Abb. 1.3.1, mitte). Als nächstes wird die Erosion durchgeführt. Iteriert man diese Erosion (bzw. wählt man einen geeignet großen Erosionsradius), so kann man selbst dicht zusammen liegende Kugeln trennen. Auch wenn die Erosion eigentlich nur für die Bilder nötig ist, bei denen gerade eine Kollision stattfindet, wird der gesamte Algorithmus auf alle Bilder angewendet.

Dieser Vorgang ist stabil und verhältnismäßig schnell. Die einzustellenden Parameter (Graustufenschwellwert, Erosionsradius und Anzahl der Erosionsiterationen) ändern sich während einer Zeitreihe kaum, sodass prinzipiell (bei niedrigen Erosionsradien) in Echtzeit gemessen und auf eine Speicherung der Videobilddaten verzichtet werden kann.

Alternative Möglichkeiten zur Bestimmung der jeweiligen Kugelzentren sind z.B. Kantendetektion oder Korrelationsanalyse. Die Ergebnisse dieser Methoden sind jedoch entweder zu ungenau oder zu rechenintensiv.

1.3.3 Erfassung der Position und Orientierung (Beleuchtung von oben)

Der oben beschriebene Vorgang zur Bestimmung der Koordinaten der Kugeln reicht alleine nicht aus, wenn man die Orientierung der Kugeln bestimmen möchte. Hierzu muss von oben beleuchtet und Markierungen auf der Kugeloberfläche müssen detektiert werden. Um Schattenbildung auf dem Boden der Schale zu vermeiden, werden weiße Kugeln mit schwarzen Markierungspunkten auf einer schwarzen Unterlage betrachtet (s. Abb. 1.3.2). Dazu werden die Holzkugeln weiß und die Polystyrolschalen von außen mit matter Acrylfarbe schwarz angemalt. Die experimentellen Voraussetzungen[14] begrenzen die Anzahl der zu verfolgenden Markierungspunkte. Daher wurden nur sechs Punkte markiert (Nord- und Südpol und vier äquidistante Punkte auf dem Äquator, ebenfalls mit Acrylfarbe). So ist gesichert, dass immer mindestens ein Punkt, maximal aber drei Punkte pro Kugel sichtbar sind. Ein Markierungspunkt am Rand kann nicht vom gleichfarbigen Hintergrund unterschieden werden. Ebenso entstehen zusammenhängende, schwarze Flächen, wenn zwei Kugeln fast Kontakt haben, oder wenn mehr als zwei Kugeln als Ring Kontakt haben (s. Abb. 1.3.2).

Der Vorgang zur Bestimmung der Kugelpositionen mit Belichtung von unten muss um einen zusätzlichen Schritt erweitert werden, um die Markierungspunkte zu berücksichtigen. Nachdem mit einem Graustufenschwellwert binär schwarze und weiße Flächen erzeugt werden, wird der Schwerpunkt aller zusammenhängenden, schwarzen Flächen bestimmt und diese Liste gespeichert. Nun füllt man alle schwarzen Flächen (außer der größten, die dem Hintergrund entspricht) weiß auf, und führt die oben beschriebene Erosion zur Kugeldetektion mit weißen Vollkugeln auf schwarzem Hintergrund durch. Hierbei erhält man eine Liste aller Kugelpositionen.

Allerdings müssen noch drei Probleme angesprochen werden. Erstens kann man die von (z.B. drei in Abb. 1.3.2) Kugeln eingeschlossene Hintergrundfläche nicht immer anhand der Größe von Markierungspunkten unterscheiden. Daher werden zunächst in einer Kopie des Bildes alle kleinen schwarzen Flächen weiß aufgefüllt (Situation in Abb. 1.3.2 unten mitte), die Kugeldetektion ausgeführt und die Anzahl der gefundenen Kugeln mit der erwarteten Kugelzahl verglichen. Gibt es eine Diskrepanz, so werden – in der absteigenden Reihenfolge der gezählten Bildpunktgröße – die Auffüllungen rückgängig gemacht, bis die erwartete Kugelzahl auch detektiert wird (Situation in Abb. 1.3.2 oben rechts). Zweitens gibt es am Rande zweier Kugeln bei Beinahekontakt häufig kleine Flächen (1 bis 5 Bildpunkte, Abb. 1.3.2, unten links),

[14] Eine Bildwiederholrate von min. 200 Hz ist für die benutzten Abmaße und Parameter des Experiments nötig. Dadurch ist die Anzahl der Bildpunkte auf 256×256 beschränkt. Für die Schale mit $49,7 \cdot 10^{-3}$ m Durchmesser und Kugeln mit $6 \cdot 10^{-3}$ m Durchmesser ergibt sich ein Kugeldurchmesser von etwa 30 Bildpunkten. Dieser lässt sich nicht beliebig dicht mit Markierungspunkten (> 1 Bildpunkt) besetzen, sodass sie sich noch trennen und verfolgen lassen. Auch beschränken hohe Rotationsgeschwindigkeiten den minimal sinnvollen Abstand zwischen zwei Markierungspunkten.

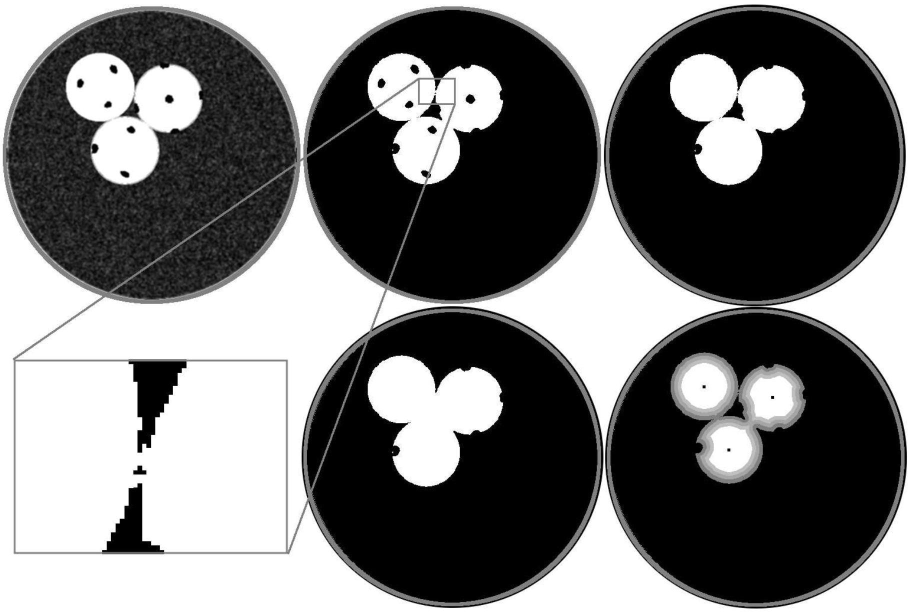

Abbildung 1.3.2: Bestimmung von Kugelschwerpunkt und Orientierung mit Hilfe von Markierungspunkten. Oben: links – Originalbild; mitte – Schwarz-Weiß-Konvertierung; rechts – Auffüllen der Markierungspunkte, die vom Hintergrund zu unterscheiden sind. Unten: links – Vergrößerung zur Veranschaulichung "verirrter" Hintergrundbildpunkte; mitte – Auffüllen aller schwarzen Flächen führt zu einem nicht mehr trennbaren Bildpunkthaufen (fälschliches Auffüllen der zentralen schwarzen Fläche wird rückgängig gemacht, um die Situation oben rechts zu erhalten); rechts – vierstufige Erosion zur Trennung der drei Kugeln; trotz asymmetrischer Deformation der unteren Kugel wird das Zentrum der Kugel (hier schwarz markiert) durch den Korrekturschritt richtig bestimmt.

die aus der Rasterung in Bildpunkte resultieren. Sie haben charakteristischerweise nahezu identischen Abstand zu zwei Kugelzentren und werden mithilfe dieses Kriteriums herausgefiltert. Drittens verschmelzen Markierungspunkte im Randbereich der Kugeln untrennbar mit dem Hintergrund und führen bei Erosion zu asymmetrischen Verformungen des verbleibenden Kugelkerns (s. Abb. 1.3.2, untere Kugel). Dieses Problem wird behoben, indem eine Kreisscheibe mit der gleichen Bildpunktfläche des im *floodfill* gemessenen Zentrums über eben dieses Zentrum gelegt wird. Nun wird der *floodfill* und das Setzen der Kreisscheibe iterativ solange wiederholt, bis sich das neugefundene Zentrum weniger als 1% vom alten unterscheidet. Auf diese Weise werden die Kugelschwerpunkte auch bei ungünstiger Lage der Markierungspunkte und Kugeln sehr exakt bestimmt.

Dieser Algorithmus ist so rechenaufwendig, dass eine Aufnahme nicht in Echtzeit ausgewertet werden kann. Es verbleibt als einzige Alternative, den Bilddatenstrom zu speichern, und erst danach zu verarbeiten. Die große Datenmenge (ca.

1 GByte/min) verhindert Aufnahmen über lange Zeiträume. Im Allgemeinen werden Sequenzen von 20 min Länge aufgenommen, das entspricht etwa $3 \cdot 10^5$ Einzelbildern.

Hat man eine Liste der Kugelpositionen und der Markierungspunkte in einem Bild, so werden alle Markierungspunkte anhand des Abstandes von den Kugelpositionen ihren jeweiligen Kugeln zugeordnet. Mit dieser Information können sowohl Geschwindigkeit als auch Rotationsgeschwindigkeit jeder Kugel bestimmt werden. Die hierfür verwendeten Methoden sind in Anhang B näher beschrieben.

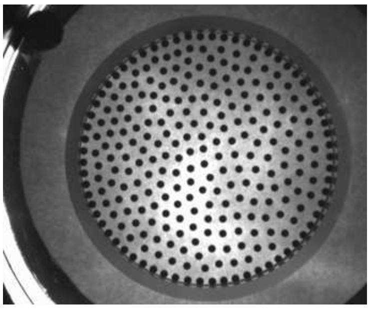

Abbildung 1.4.1: 275 Stahlkugeln mit $2 \cdot 10^{-3}$ m Durchmesser bei $B_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ T konstantem Magnetfeld in einer Petrischale mit Durchmesser $63 \cdot 10^{-3}$ m. Die Dipol-Dipol-Abstoßung sorgt dafür, dass die Kugeln maximalen Abstand zueinander einnehmen.

1.4 Erste Experimente

Bereits vorbereitende Experimente mit diesem Aufbau und Kugellagerkugeln zeigen überraschende Phänomene. Betreibt man die Spule mit Gleichstrom, so sorgt die relative Permeabilität der Kugeln für ein verhältnismäßig starkes Dipolmoment. Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung der Kugeln untereinander, durch parallele Ausrichtung ihrer Magnetisierung entlang des äußeren Feldes, sorgt für eine Abstoßung der Kugeln, sodass sie den größtmöglichen Abstand zueinander einnehmen (s. Abb. 1.4.1). Hält man die magnetische Feldstärke niedrig, sodass die Kugeln nicht bis zur Sättigungsmagnetisierung magnetisiert werden, so behalten sie kaum eine Remanenzmagnetisierung zurück.

1.4.1 Kugeln ohne Remanenzmagnetisierung im Wechselfeld

Auch in einem magnetischen Wechselfeld mit Frequenz ν und Amplitude B_0 kommt es zu einer Abstoßung der induzierten Dipole. Die Magnetisierung der Kugeln folgt dem äußeren Feld. Stellt man die Schale ein wenig schief (d.h. so, dass die Gravitation nicht mehr exakt senkrecht zum Schalenboden wirkt, sondern ein kleiner Anteil parallel zum Schalenboden existiert) und schaltet das Magnetfeld ab, so sammeln sich die Teilchen zunächst unter dem Einfluss der Gravitation an der tiefsten Stelle der Schale. Bei Einschalten des Magnetfeldes bildet sich ein Dichtegradient der Kugelpositionen aus, da die abstoßende Dipol-Dipol-Wechselwirkungen mit dem Gewicht der höherliegenden Teilchen konkurriert. Bei Erhöhen der Feldstärke vergrößert sich der Abstand der Teilchen. Dieses Verhalten ähnelt der Ausdehnung eines Festkörpers bei Erhöhung der thermischen Energie. Bei niedrigen Frequenzen erkennt man, wie der Abstand der Kugeln mit der Oszillation ab- und zunimmt

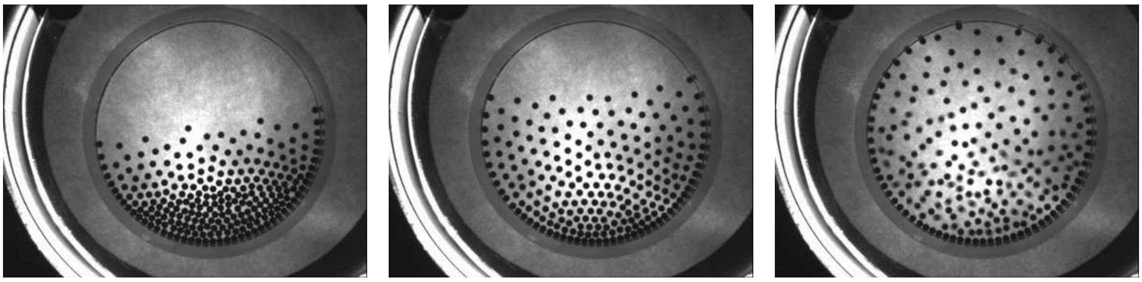

Abbildung 1.4.2: 250 Stahlkugeln ($2 \cdot 10^{-3}$ m) bei Neigung der Schale von $1,5°$ gegen die Horizontale in einem magnetischen Wechselfeld der Frequenz $\nu = 20\,\mathrm{Hz}$ und Amplitude $B_0 = 15 \cdot 10^{-3}$ T (links), $B_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ T (mitte), $B_0 = 30 \cdot 10^{-3}$ T (rechts). Links erkennt man deutlich den durch die Gravitation hervorgerufenen Dichtegradienten. Im mittleren Bild "vibrieren" die Kugeln um ihre Ruheposition, die Anregung reicht aber noch nicht für Bewegung. Rechts: Die Kugeln bewegen sich gasartig, aber der Einfluss der Gravitation ist immer noch zu erkennen.

(allerdings natürlich mit doppelter Frequenz, da bei Vorzeichenwechsel des Feldes die kleinste Abstoßung vorliegt). Bei höheren Frequenzen sind die Kugeln zu träge, um der Oszillation merklich zu folgen.

Diese Sensibilität der Teilchendichte auf kleinste Abweichungen von dem Winkel $\alpha = 90°$ zwischen Schalenboden und Gravitation wird in dieser Arbeit als hochempfindliche "Wasserwaage" benutzt. In allen Experimenten mit $\alpha = 90°$ wird auf diese Weise sichergestellt, dass der Schalenboden so senkrecht wie möglich zur Gravitation eingestellt ist.

Setzt man Stahlkugeln einem so starken Feld aus, dass die Sättigungsmagnetisierung erreicht wird, behalten sie die stärkste Remanenzmagnetisierung zurück. Dadurch verändert sich ihr Verhalten bei periodischer Anregung. Stehen die Remanenzdipole nicht exakt parallel zum Feld, so übt das Feld ein Drehmoment auf diese Dipole, und somit auf die Kugeln aus. Ändert die Orientierung des äußeren Magnetfeldes ihr Vorzeichen, so kann es dann energetisch für die Kugel günstiger sein, um (fast) 180° zu rotieren (um wieder parallel und nicht fast anti-parallel zum Feld zu stehen), anstatt die Koerzitivkraft aufzubringen und die Magnetisierung umzukehren. Unter Einfluss von Reibung wird dieses Drehmoment in Translation umgewandelt. Dieses Verhalten der magnetischen Anregung kinetischer Energie macht dieses granulare Medium bei geeigneten Parametern erst gasähnlich.

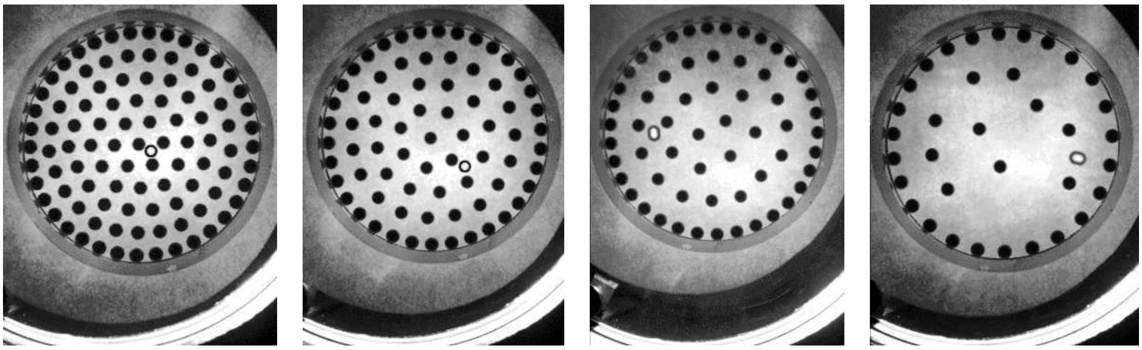

Abbildung 1.4.3: Eine PVC-Dipolkugel (weiß markiert) in einem Gitter von N nicht magnetisierten Stahlkugeln; Durchmesser $4 \cdot 10^{-3}$ m, Magnetfeld $\nu = 15$ Hz und $B_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ T; $N = 100, 80, 65, 35$ (von links nach rechts). Das "Gitter" bleibt ortsfest. Man erkennt an der einzelnen bewegten Kugel bei den beiden Bildern rechts die Bewegungsunschärfe, bedingt durch eine hohe Belichtungszeit pro Bild.

1.4.2 Kugeln mit Remanenzmagnetisierung im Wechselfeld

Für Teilchen mit Restmagnetisierung verläuft das Experiment in der schiefen Schale zunächst wie für unmagnetisierte (s.o.). Oben gelegene Teilchen fangen bei weiterer Steigerung der Feldstärke an, sich zu bewegen, bleiben aber zunächst noch lokalisiert an ihrem Gitterplatz. Bei weiterer Erhöhung steigt ihre kinetische Energie, bis sie sich als "Gas" frei bewegen. Diese Entwicklung ist in Abb. 1.4.2 in Schnappschüssen exemplarisch dargestellt und ähnelt den Phasenübergängen zwischen fest, flüssig und gasförmig. Die Ähnlichkeit ist allerdings qualitativ, da die Kräfte rein repulsiv sind und das Verhalten stark durch die Randbedingungen und Gravitation beeinflusst wird (im Gegensatz zu üblichen thermodynamischen Phasenübergängen). Der immer noch vorhandene Dichtegradient in der Verteilung der Kugeln im Gasmodus ähnelt übrigens der barometrischen Höhenformel, der ein Gas im Schwerefeld unterworfen ist. Der Mechanismus der gasartigen Bewegung wird etwas später in Abschnitt 1.6.1 ausführlich erläutert.

Die Größe der Remanenzmagnetisierung ist von dem Material (Art und Struktur), der vorherigen Magnetisierung, der Dauer des Experiments, dem äußeren Feld und der Anzahl und Art der Kollisionen abhängig. Bringt man eine wesentlich stärker magnetisierte Kugel[15] oder eine der beschriebenen Dipolkugeln unter Einfluss des

[15] Eine stärkere Magnetisierung wird erreicht, indem man z.B. eine Kugel längere Zeit in Kontakt mit einem $Nd_2Fe_{14}B$-Permanentmagnet bringt.

Magnetfeldes in ein statisches “Gitter” von magnetisierbaren Kugeln[16], so bewegt es sich unter schwachen Kollisionen durch dieses hindurch. Dies ist vergleichbar mit der Diffusion eines Gasatoms in einem Festkörper. Abb. 1.4.3 zeigt Momentaufnahmen eines solchen Experiments.

Aufgrund der veränderlichen und schlecht zu bestimmenden Größe der Remanenzmagnetisierung sind obige Experimente schwer zu quantifizieren. Dennoch sollten die in diesem Abschnitt dargestellten Experimente zukünftige Arbeiten zu diesen interessanten Beobachtungen inspirieren, da sie qualitativ einfach zu reproduzieren sind. Die Simulation von magnetisierbaren Teilchen ist so aufwendig, dass darauf im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wird. Dipolkugeln, wie die in Abb. 1.4.3 hingegen können leichter modelliert werden, wie es im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

[16] Das Gitter bildet sich wie in Abschnitt 1.4.1 beschrieben durch die Dipol-Dipol-Abstoßung selbständig aus.

1.5 Dipolkugeln im Magnetfeld – Molekulardynamische Simulationen

Das in diesem Kapitel vorgestellte magnetische granulare Medium mit Dipolkugeln wird auch numerisch simuliert. Hierzu werden Methoden der Molekulardynamik verwendet. Im Prinzip werden die Newton'schen Bewegungsgleichungen für Translation und Rotation gelöst. Auch wenn das Experiment auf zwei Dimensionen im Ortsraum beschränkt ist, finden doch Interaktionen auf verschiedenen Ebenen in z-Richtung statt (Boden, Schalenrand und Kugel-Kugel-Interaktionen) und die resultierenden Kräfte sind ebenfalls Vektoren in 3D. Um alle Interaktionen gleichberechtigt betrachten zu können, werden daher sowohl Translation als auch Rotation in 3D gerechnet und Rotationen um alle drei Raumachsen berücksichtigt.

1.5.1 Motivation der Bewegungsgleichungen in 3D

Während es für die translatorischen Freiheitsgrade eine Differentialgleichung (Dgl.) zweiter Ordnung zu lösen gilt (Ort als Vektor, Geschwindigkeit als vektorielle zeitliche Ableitung), wird die Rotation üblicherweise als Dgl. erster Ordnung betrachtet, wenn eine Orientierung des Teilchens nicht relevant ist.

Im Gegensatz zu den Variablen im Ortsraum ist die Orientierung $\vec{\Theta}$ eines Objektes in 3D (z.B. Eulerwinkel) nicht einfach über ihre zeitliche Ableitung mit der Winkelgeschwindigkeit verknüpft. Orientierungen sind nicht additiv. Um eine Orientierung um einen Winkel $\alpha = \omega \, \Delta t$ entlang einer Rotationsachse $\hat{R}$ (mit $\omega \, \hat{R}$ als vektorielle Winkelgeschwindigkeit) zu ändern, muss man auf Rotationsmatrizen zurückgreifen. Also ist die aktuelle Orientierung eines Objektes gegeben als die zeitabhängige aktuelle Drehmatrix, angewandt auf die Ausgangsorientierung. Anstatt dieser 3×3 Drehmatrix und eines 3D-Vektors für die Orientierung, wird in dieser Arbeit auf Quaternionen[17] zurückgegriffen. Diese haben sich als numerisch stabile Möglichkeit

[17] Quaternionen kann man als Erweiterung komplexer Zahlen betrachten, bei denen die imaginäre Einheit i zu einem 3D Vektor wird. Daher haben sie vier Komponenten. Die Einheitsquaternionen kann man als Rotationen in 3D interpretieren. Sie bestehen aus einem Skalar für den Rotationswinkel und drei Skalaren für die Rotationsachse. Über ihre Algebra kann man z.B. infinitesimale Drehungen zu einer Gesamtdrehung verketten oder zwischen zwei Orientierungen interpolieren. Eine Aufstellung der hier benötigten Rechenvorschriften ist in Anhang A zu finden.

zur Integration von Rotationen etabliert [28]. Die Orientierung einer Kugel wird als Integral der Winkelgeschwindigkeit verwaltet. Der Einfluss der eingebetteten Magnete auf das Trägheitsmoment der Kugel wird vernachlässigt und das Trägheitsmoment als Skalar

$$I = \frac{2}{5} m R_K^2 \tag{1.5.1}$$

für eine Kugel des Radius R_K mit Masse m (für Holzkugeln mit $R_K = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ wurde $m = (124 \pm 2) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$ gemessen) behandelt. Auf diese Weise kann man auf die Euler'schen Kreiselgleichungen verzichten und erhält als Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \Theta, \omega) \\ I\dot{\vec{\omega}}_i &= \vec{M}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \Theta, \omega) \\ \vec{\Theta}_i^q &= \int \vec{\omega}_i^q \, dt, \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

wobei $\vec{\Theta}_i^q$ und $\vec{\omega}_i^q$ die Quaternionen-Darstellung von Orientierung und Winkelgeschwindigkeit sind.

1.5.2 Wahl des Integrationsalgorithmus

Die Kräfte, die auf eine Kugel in dem vorgestellten experimentellen Aufbau wirken, haben dreierlei Ursprung:

1. Schalenboden und -wand sind statische, dissipative Einflüsse, mit denen eine Kugel in dauerhaften (Boden) oder sporadischen Kontakt (Wand) kommt.
2. Andere Kugeln interagieren dynamisch über kurzreichweitige Repulsion bei Kontakt und langreichweitige Dipol-Dipol-Wechselwirkungen.
3. Das äußere Magnetfeld bewirkt ein periodisches Drehmoment.

Diese Vielfalt an unterschiedlichen Wechselwirkungen schränkt die Wahl der Methode für eine numerische Integration ein. Für sich zeitlich stark verändernde Potenziale hat sich die *Soft-sphere Gear-predictor-corrector* (GPC) Methode bewährt (s. z.B. [29,30]). Die Kugeln werden als elastoplastische Teilchen approximiert. Der “Überlapp” ζ (s. Abb. 1.5.1, links) der unverformten Kugeln mit Radius R_K bei einer Kollision mit einem Hindernis dient als Maß für die Stärke des wirkenden repulsiven Potenzials. In einem predictor-Schritt werden nach Taylor-Entwicklung die Phasenvariablen für den nächsten Zeitschritt (z.B. Ort und Geschwindigkeit) aus den aktuellen berechnet. Für die neuen Werte werden die Kräfte und Drehmomente bestimmt und damit ein Korrekturterm berechnet, der die zuvor gemachte Vorhersage verbessert.

Eine Erweiterung des in [12] dargestellten Formalismus von 2D auf 3D für die Translation stellt kein Problem dar. Für den Rotationsfreiheitsgrad wird die skalare Dgl. erster Ordnung zu einer vektoriellen Dgl. Getrennt davon wird zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit wie in Abschnitt A.2 im Anhang beschrieben integriert. Als Ordnung der GPC wird fünf[18] gewählt, der Integrationszeitschritt beträgt $\delta t = 10^{-5}\,\mathrm{s}$.

1.5.3 Mechanische Kräfte und Drehmomente

Alle Kugeln unterliegen der Schwerkraft ($g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$):

$$\vec{F}_g = m\,(0, 0, g) = mg\,\hat{e}_z. \tag{1.5.3}$$

Für die repulsive Normalkraft (s. Abb. 1.5.1) während einer Kollision gilt nach [31]

$$\vec{F}_{n,ij} = \left[Y\zeta^{\frac{3}{2}} - \gamma_n\zeta^{\frac{1}{2}}(\vec{v}_i - \vec{v}_j)\hat{n}\right]\hat{n}, \tag{1.5.4}$$

wobei $\zeta = 2R - |\vec{r}_{ij}|$ der Überlapp, $\vec{r}_i$ die Position und $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeit von Kugel i, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ den Verbindungsvektor der Kugelzentren, $\hat{n} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}$ der Normaleneinheitsvektor, $Y = 10^5\,\mathrm{kg\,m}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-2}$ die elastische Steifigkeit und $\gamma_n = 15\,\mathrm{kg\,m}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1}$ die Dämpfungskonstante darstellen. Y ist mit dem Elastizitätsmodul verknüpft, γ_n karikiert die Verluste durch plastische Verformung. Stoßen zwei Kugeln mit Relativgeschwindigkeit v_i aufeinander, so wird durch die damit verbundene Dissipation Energie verbraucht und die Kugeln laufen mit der Relativgeschwindigkeit v_o auseinander. Man definiert den Restitutionskoeffizienten $\epsilon_r = v_o/v_i$. Bei der Kollision mit einer Wand wird $\zeta = R - |\vec{r}_i - \vec{w}_n|$ verwendet, wobei $\vec{w}_n$ der Ortsvektor derjenigen Wandnormalen ist, die durch das Kugelzentrum geht.

[18] GPC fünfter Ordnung bedeutet, dass neben der nullten vier weitere zeitliche Ableitungen für die Taylor-Entwicklung und den *corrector*-Schritt verwaltet werden. Dies führt bei den typischerweise vorkommenden schnellen zeitlichen Änderungen der Kräfte während Kugel-Kugel-Kollisionen zu numerisch stabilem Verhalten (Konstanz der Energie, etc.) bei vertretbar großem Zeitschritt.

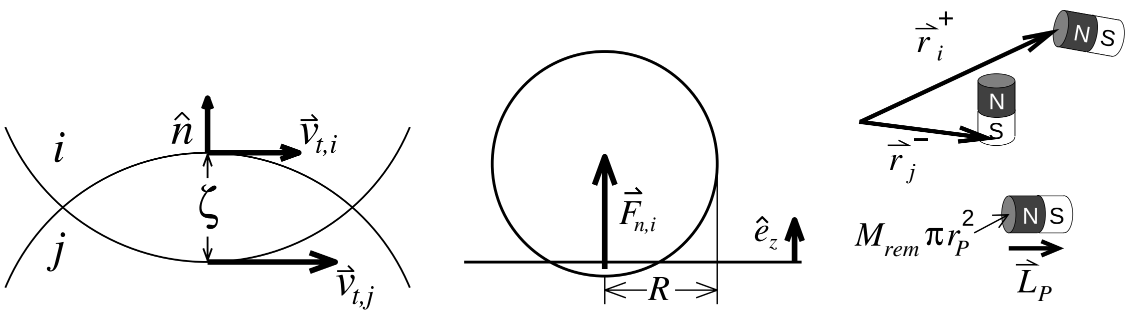

Abbildung 1.5.1: Verdeutlichung der für die Bestimmung der Kräfte relevanten Variablen. Links: Kugel-Kugel-Stoß führt zu einem "Überlapp" ζ der unverformten Kugeln; Normalenrichtung $\hat{n}$ der Stoßkraft; tangential zur Stoßrichtung verlaufende Geschwindigkeiten $\vec{v}_{t,i}$ und $\vec{v}_{t,j}$. Mitte: Angriffspunkt und Richtung der Auflagekraft $\vec{F}_{n,i}$ auf dem Boden in z-Richtung. Rechts: Ortsvektoren der Dipol-Pole; Polstärke $P = \pi r_P^2 M_{rem}$; Dipol-Richtung und Länge $\vec{L}_P$. Zu beachten: Normalenkräfte (links und mitte) bewirken kein Drehmoment.

Die Gleitreibung zwischen den Kollisionspartnern ist hauptsächlich für die Umwandlung von Translation in Rotation verantwortlich [32]. Sie wird als

$$\begin{aligned} \vec{F}_{s,ij} = & \; -\tfrac{\vec{t}_{ij}}{|\vec{t}_{ij}|} \min\left\{\mu_s|\vec{F}_{n,ij}|, \gamma_s|\vec{t}_{ij}|\right\} \\ \vec{t}_{ij} = & \; \vec{v}_{t,i} - \vec{v}_{t,j} + \vec{\omega}_i \times (R_K\hat{n}) - \vec{\omega}_j \times (R_K\hat{n}) \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

dargestellt. $\vec{t}_{ij}$ ist die Oberflächenrelativ-Geschwindigkeit der Kollisionspartner mit $\vec{v}_{t,j} = \vec{v}_j - (\hat{n}\vec{v}_j)\hat{n}$. Das erste Argument der Minimumsbedingung entspricht der Coulombschen Gleitreibung mit Gleitreibungskoeffizienten μ_s. Das zweite berücksichtigt die viskose Verformung des Materials mit einer Dämpfungskonstante von $\gamma_s = 0,5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Für den Kontakt mit dem Schalenboden bleibt μ_s ein Simulationsparameter, der die unterschiedlichen Bodenbeläge im Experiment charakterisiert, und zwischen 0 und 1 variiert wird.

Im Experiment lässt sich Rollreibung mit zwei Aspekten beobachten. Zum einen wird die Translation von abrollenden ($\vec{t}_{ij} = 0$) Kugeln gebremst. Dies wird durch

$$\vec{F}_{r,i} = -\mu_r \, \frac{|\vec{F}_{n,i}|}{R_K} \, \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} \tag{1.5.6}$$

berücksichtigt, mit dem Rollreibungskoeffizienten $\mu_r = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Zum anderen verlangsamt sich das Kreiseln einer Kugel um die z-Achse. Es wirkt in Form eines Drehmoments in Richtung der z-Komponente (s. Abb. 1.5.1, mitte) der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{z,i}$ entgegen:

$$\vec{M}_{R,i} = -\mu_R \, \omega_{z,i} \, \hat{e}_z \;, \tag{1.5.7}$$

mit dem Kreiselreibungskoeffizienten $\mu_R = 1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$. Die Werte für μ_r und μ_R wurden empirisch über das Ausrollen von Kugeln mit verschiedenen Startgeschwindigkeiten im Vergleich zwischen Simulation und Experiment abgeschätzt.

1.5.4 Dipol-Interaktionen

Wie in Abschnitt 1.1.2 diskutiert, ist die Reduktion der Permanentmagnete auf punktförmige Dipole zur Betrachtung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung nicht besonders gut, denn l_P und $|\vec{r}_{ij}|$ können von derselben Größenordnung sein. Da schlanke Zylinder vorliegen, ist jedoch folgende Annahme, die zur Herleitung der Näherung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung ($F \propto r_{ij}^{-3}$) benutzt wird, gerechtfertigt: Man kann die Stirnfläche der Magnete als punktförmige Pole mit $P \approx 8,3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm}^2$ für die hier verwendeten Holzkugeln im Abstand $l_P = 3 \cdot 10^{-3}$m betrachten (s. Abb. 1.5.1 rechts).

Experimentell kann dies nachgeprüft werden, indem eine Dipolkugel in verschiedenen Orientierungen (Dipol waagerecht oder senkrecht) auf einer Waage befestigt wird. Nun bringt man eine zweite Dipolkugel mittels Mikrometerschraube auf definierte Abstände in definierte Orientierungen (Dipole jeweils parallel, anti-parallel und senkrecht zu r_{ij}). Die Veränderung im angezeigten Gewicht der ersten Kugel ist ein Maß für die Anziehung bzw. Abstoßung. Im Vergleich mit obiger Annahme wird $P = (8,05 \pm 0,15) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm}^2$ als beste Übereinstimmung zwischen Messung und Theorie ermittelt. Die Diskrepanz ist auf eine Veränderung des effektiven Polabstandes $\tilde{l}_P$ entweder bei der Herstellung der Dipole oder als Resultat der Näherung zu verstehen.

Für die magnetische Interaktion wurden daher die folgenden Kraftansätze benutzt. Für die Dipol-Dipol-Wechselwirkung:

$$\vec{F}^{\pm\pm}_{d,ij} = \mp P^2 \frac{(\vec{r}_i^{\,\pm} - \vec{r}_j^{\,\pm})}{|\vec{r}_i^{\,\pm} - \vec{r}_j^{\,\pm}|^3} \tag{1.5.8}$$

und für die Kopplung an das äußere Feld $\vec{B}(t) = B_0 \sin(2\pi\,\nu\,t)\,\hat{e}_z$, die nur ein Drehmoment erzeugt:

$$\vec{M}_{B,i} = \frac{1}{\mu_0} P\,\vec{L}_{P,i} \times \vec{B}(t), \tag{1.5.9}$$

wobei $\vec{L}_{P,i}$ der Verbindungsvektor zwischen Süd- und Nordpol von Dipolkugel i ist[19].

Im Ganzen ergeben sich dann für die zu berücksichtigenden Kräfte und Drehmomente, die auf Kugel i wirken:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i = \; & \vec{F}_g + \vec{F}_{r,i} + \sum_{k=j,w} \vec{F}_{n,ik} + \sum_{k=j,w} \vec{F}_{s,ik} + \sum_{k=j,\pm} \vec{F}^{\pm\pm}_{d,ik} \\ \vec{M}_i = \; & \vec{M}_{B,i} + \vec{M}_{R,i} + \vec{F}_{r,i} \times (-R\,\hat{n}) + \\ & \sum_{k=j,w} \vec{F}_{s,ik} \times \vec{R}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=j,\pm} \vec{F}^{\pm\pm}_{d,ik} \times \vec{L}_{P,i}. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Hierbei ist mit $\sum\limits_{k=j,w}$ die Summe über alle anderen Kugeln j und Randbedingungen (Rand und Boden der Schale) w gemeint. $\sum\limits_{k=j,\pm}$ stellt die Summe über alle vier Kombinationen (Nord-Süd, Nord-Nord, Süd-Nord, Süd-Süd) der Dipole i und j untereinander dar. Mit $\vec{R}_k$ ist der Verbindungsvektor von Kugel i zum Angriffspunkt der Kraft (z.B. Zentrum des Überlapp-Volumens) gemeint.

Diese Kräfte und Drehmomente müssen dann in Gleichungen 1.5.2 eingesetzt werden und mit der zuvor erklärten Methode integriert werden.

[19] $\vec{F}^{++}_{d,ij}$ wäre demnach die abstoßende Wechselwirkung zwischen dem Nordpol von Kugel i und dem Nordpol von Kugel j; $\vec{F}^{-+}_{d,ij}$ entsprechend die zwischen dem Südpol von Kugel i und dem Nordpol von Kugel j. Zu berücksichtigen sind jeweils vier Kräfte pro Kugelpaar. Dabei gilt $\vec{r}^{\pm}_i = \vec{r}_i \pm \vec{L}_{P,i}/2$

Abbildung 1.6.1: Ohne äußeres Magnetfeld ordnen sich die magnetischen Dipol-Kugeln Nord- an Südpol an. Hier: $N = 14$ Dipolkugeln.

1.6 Dynamik der Dipolkugeln im Magnetfeld

In diesem Abschnitt soll das granulare Medium mit permanentem Dipol näher betrachtet werden. Sofern nicht anders angegeben, handelt es sich um Holzkugeln ($R_K = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) mit eingebettetem Dipol. Zunächst werden experimentelle Beobachtungen in einem magnetischen Wechselfeld mit Amplitude B_0 und Frequenz ν vorgestellt[20].

1.6.1 Einfluss der Anregungsenergie

Abhängig von B_0 und ν, sind sechs verschiedene Bewegungsmodi zu beobachten. Sie werden im folgenden erklärt.

1.6.1.1 Statischer Modus

Bei abgeschaltetem Magnetfeld tendieren die Kugeln dazu, sich in Ringen oder Ketten Nord- an Südpol anzuordnen, um die freie Energie zu minimieren (s. Abb. 1.6.1). Dabei müssen sie natürlich die in Abschnitt 1.5.3 dargelegten Reibungskräfte überwinden, sodass jede Konfiguration nur als lokales Minimum der Energie zu sehen

[20] Bei den Abbildungen handelt es sich um Aufnahmen des Experiments. Der Schalenrand ist schwarz gefärbt und daher nicht sichtbar. Um die Schale ist der Spiegel aus Aluminiumblech zu sehen.

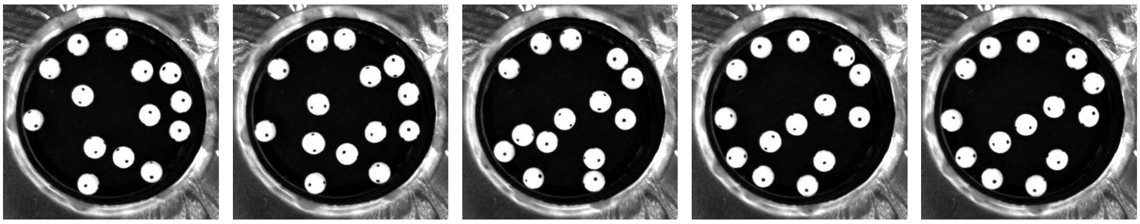

Abbildung 1.6.2: Random-Walk bei niedriger Amplitude und Frequenz über eine halbe Periode. Im mittleren Bild nähern sich die Kugeln einander an, da die Dipole nun horizontal orientiert sind und sich z.T. anziehen. Ohne Drehmoment würden sich Ketten bilden. $N = 14$; $\nu = 1\,\mathrm{Hz}$; $B_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$; $B(0\,\mathrm{s}) = -B(0,5\,\mathrm{s}) = B_0$; von links nach rechts: $t = 0\,\mathrm{s}$; $0,08\,\mathrm{s}$; $0,17\,\mathrm{s}$; $0,3\,\mathrm{s}$; $0,5\,\mathrm{s}$.

ist. Solange die Dipol-Dipol-Wechselwirkung stärker ist als das Drehmoment, das ein äußeres Magnetfeld verursacht, bleiben die Ketten stabil und in Ruhe. Dies ist von der Frequenz des Feldes weitgehend unabhängig, die Amplitude hingegen hat entscheidenden Einfluss.

Schaltet man ein konstantes Magnetfeld geringer Stärke an, so bleibt das System zunächst in Ruhe, da die Dipol-Dipol-Wechselwirkung dominierend ist. Erhöht man die Feldstärke, stellen sich zunächst einige und nach kurzer Zeit alle Dipole senkrecht, also parallel zum Feld. Ist das äußere Feld für zwei gebundene Dipole minimal stärker als die Dipol-Dipol-Anziehung, so entfernen sich die Pole voneinander und die Wirkung des äußeren Feldes wird sofort dominant. Das Aufbrechen einiger Nord-Süd-Bindungen destabilisiert die gesamte Kette. Während dieser sehr kurzen Phase der Bewegung, sorgt der abstoßende Teil der Dipol-Dipol-Wechselwirkung dafür, dass sich die Teilchen tendenziell voneinander entfernen. Schaltet man das Magnetfeld wieder ab, so verbleiben die Kugeln an ihrem Ort. Dieses Gleichgewicht wird stabilisiert durch Reibung und die sehr gleichmäßige Anordnung der Kugeln mit großen Abständen. Doch ist dieses Gleichgewicht labil, denn leichte Verkippungen, Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Kugeln, oder Erschütterungen lassen die Nord-Süd-Bindungen wieder zu Stande kommen. Erneut entstehen Ketten.

1.6.1.2 Random Walk

Polt man das Feld um, anstatt es nur abzuschalten, ist das vormalige Gleichgewicht sehr labil. Die Kugeln bilden dann keine Ketten, sondern werden von der Dipol-Dipol-Wechselwirkung geleitet, während sie abrollen. Sie folgen dem Weg der

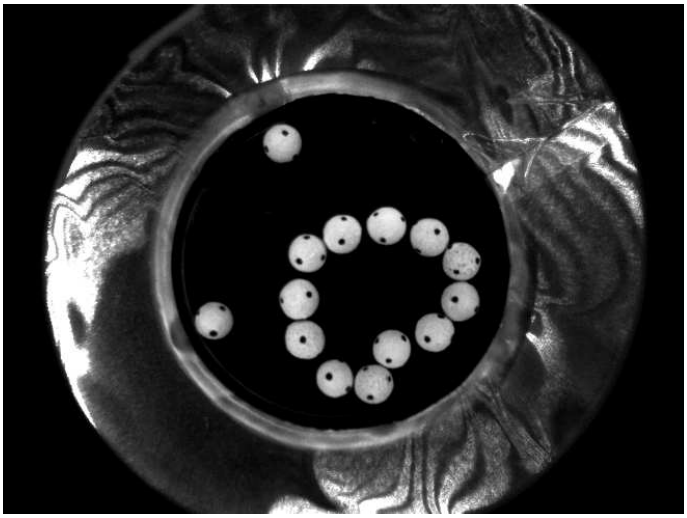

Abbildung 1.6.3: Die Ketten bleiben stabil, aber der mittlere Kugelabstand vergrößert sich und die Ketten fangen an, langsam zu driften. $N = 14$; $\nu = 35\,\text{Hz}$; $B_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$.

geringsten Abstoßung und der größten Anziehung und kommen schließlich auf neuen Positionen mit möglichst großem Abstand zueinander zur Ruhe. Je nach Kombination aus Drehmoment und Gleitreibungskoeffizienten können die Kugeln die Strecke $d_{max} = \pi R_K$ für eine Rotation um 180° abrollen oder drehen auf der Stelle fast durch (niedrige Reibung, hohes B-Feld $\Rightarrow\ d \to 0$).

Wiederholt man die Umpolung, bzw. setzt die Kugeln einem periodischen Wechselfeld mit niedriger Frequenz $\nu < 6\,\text{Hz}$ aus, so kann man einen Random-Walk mit diskreten Stopps zwei mal pro Treibungsperiode beobachten (s. Abb. 1.6.2). Die Kugeln behalten einen großen mittleren Abstand bei und Kollisionen finden (bei hinreichend kleinem N) selten statt. Bei sehr hohen Feldstärken verbleiben die Kugeln trotz heftiger Rotation an ihrem Ort. Sie rotieren für den kurzen Teil der Halbperiode nach dem Vorzeichenwechsel des Magnetfeldes auf der Stelle. Dabei ist das Drehmoment so groß, dass sie kaum translatorischen Impuls aufbauen (Drehmoment dominiert gegenüber Gleitreibung). Den Rest der Halbperiode sind sie parallel zum Feld stabil ausgerichtet. Während dieser Zeit sind Rotationen in x-y-Richtung stark unterdrückt. Allerdings ist der Rotationsfreiheitsgrad in z-Richtung nur durch die Kreiselreibung (vgl. Gleichung 1.5.7) gedämpft. Man kann kreiselnde Drehungen einiger Kugeln verfolgen, die durch die vorhergehende Bewegung noch einen Drehimpuls in z-Richtung zurückbehalten haben. Die Auswertung dieser gedämpften Rotationen bestätigen den benutzten Wert für μ_R.

1.6.1.3 Driftende Ketten

Betrachtet man den anderen Extremfall, nämlich den hoher Frequenzen, so sind bei niedrigen Feldstärken Ketten ebenfalls stabil. Erhöht man die Feldstärke, so werden die Dipole aus ihrer horizontalen Lage ausgelenkt und oszillieren mit der Frequenz des Wechselfeldes um ihre Bindungsruhelage. Je größer die Amplitude dieser Oszillation, desto stärker sind die Dipole einander bei maximaler Amplitude parallel gestellt und desto stärker stoßen sie sich im Mittel ab. Der mittlere Abstand zueinander vergrößert sich und die Ketten fangen an zu driften, da über die Gleitreibung ein wenig der oszillatorischen Rotations- in Translationsenergie umgesetzt wird (s. Abb. 1.6.3). Durch die hohe Frequenz bleibt die Drehgeschwindigkeit der Dipole phasenverschoben hinter dem Feld zurück. Dies stabilisiert die Richtung der Drehgeschwindigkeit entlang einer Achse in der x-y-Ebene, die gegeben ist durch die Anziehung zum nächsten Nachbarn. Wegen der hohen Drehgeschwindigkeit findet nur schwache Kopplung an die Translationsgeschwindigkeit statt.

1.6.1.4 Erzwungene Rotation

Bei hoher Feldstärke und hoher Frequenz drehen die Kugeln auf der Stelle durch. Der hohe Drehimpuls und das äußere Feld stabilisieren die Rotation (s. Abb. 1.6.4) und es kommt nur zu wenig Übertrag zwischen Rotation und Translation. Die Rotationsachsen können jedoch durch Stöße gestört werden. Die Kugeln bewegen sich langsam durcheinander, aber einige erreichen spontan auch hohe Geschwindigkeiten. Die Bewegung der Kugeln erinnert an Brownsche Bewegung, da sie unregelmäßig durcheinander driften und von Unebenheiten und ihren Nachbarn auf diesem Weg erratisch gestört werden.

1.6.1.5 Kontinuierliche Rotation – der Gasmodus

Es lohnt sich, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen driftenden Ketten und getriebener Rotation zu beleuchten. In beiden Fällen stabilisiert das äußere Feld die Richtung der Rotationsachse, die bei den driftenden Ketten ständig das Vorzeichen wechselt. Allerdings ist dies nicht gültig, wenn sie in senkrechter Stellung keinen Drehimpuls mehr haben. In dieser Situation befinden sich die Dipole in einer labilen

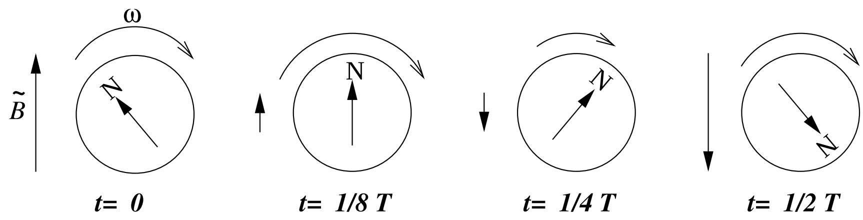

Abbildung 1.6.4: Getrieben von dem äußeren Wechselfeld, richtet sich der Dipol zunächst senkrecht auf und erreicht die Senkrechte etwa zu dem Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels von $\tilde{B}$. Der aufgebaute Drehimpuls trägt die Kugel über die Senkrechte hinaus, während das Magnetfeld wieder anti-parallel steht. Der Drehimpuls der Kugel steigt wieder, da ein Drehmoment in Richtung Drehimpuls wirkt. Die Rotationsgeschwindigkeit ist im Mittel gleich der Treibungsfrequenz.

Lage, sobald das äußere Feld sein Vorzeichen wechselt und die Kugel sucht sich ähnlich dem Random Walk eine neue Rotationsachse. Sind die Parameter so eingestellt, dass dies passieren kann, so bewegen sich die Kugeln gasartig durcheinander.

Ein Durchdrehen der Kugeln ähnlich der erzwungenen Rotation mit stabiler Rotationsachse findet man ebenfalls in diesem Parameterbereich. Er zeichnet sich jedoch durch niedrigere Winkelgeschwindigkeiten aus, sodass eine gute Kopplung an die Translationsbewegung erreicht werden kann. Die Güte der Kopplung ergibt sich aus dem Wechselspiel von Gleitreibung, Trägheitsmoment der Kugel, freier Weglänge der Kugel und Frequenz und Amplituden des Magnetfeldes. Hier maximiert sich bei geeigneten Parametern die kinetische Energie des Gasmodus.

1.6.1.6 Einfluss des Randes – der Ringmodus

Schon in Abb. 1.4.3 erkennt man bei genauer Betrachtung, dass der Rand der Schale dichter mit Kugeln besetzt ist, als das Innere. D.h. der mittlere Abstand der Kugeln zueinander ist am Rand niedriger als im Inneren der Schale. Der Schalenrand ist aus vier Gründen eine energetische Senke (zur Veranschaulichung s. Abb. 1.6.5):

1. Radiale Kollisionen dissipieren Energie entsprechend der Restitutionskoeffizienten und es muss sowohl Impuls- als auch Drehimpulsumkehr bei Abrollen in 3D stattfinden.

2. Gleit- und Rollreibung am Rand der Schale bewirken ein Drehmoment, welches die Kugelbewegung entlang des Randes stabilisiert.

3. Um auf dem Schalenrand und -boden abzurollen, ist wegen der Krümmung des Randes ein Drehmoment nötig, damit die Winkelgeschwindigkeit radial bleibt. Dieses Drehmoment muss ebenfalls durch Kontaktkräfte aufgebracht werden.

4. Das Drehmoment eines Dipols mit Neigung und Kontakt zum Rand wird ausgeglichen und der Dipol so sterisch inhibiert. Dies schränkt die sonst demokratische Energiezufuhr ein.

Es ist also nicht verwunderlich, dass die mittlere Teilchendichte am Rand wesentlich höher ist, als in der Schalenmitte. Tatsächlich bietet die in Abb. 1.6.5, mitte dargestellte Situation eine gewisse Stabilität für mehrere Kugeln, denn dann wirken das sog. *clustering*[21] und die Dipol-Dipol-Wechselwirkung strukturbildend. Man stelle sich zwei Kugeln mit senkrecht stehendem Dipol in Kontakt mit dem konkaven Schalenrand vor. Steht das Magnetfeld anti-parallel so reichen schon kleinste Störungen, um sie aus dem labilen Gleichgewicht zu bringen. Neigt sich durch eine solche Störung z.B. der rechte Dipol nach links, so weicht der linke wegen der Dipol-Abstoßung auch nach links aus. Dadurch verringert sich der Abstand zum Südpol der linken Kugel und beide kommen dem gebundenen Zustand (Nord- an Südpol) näher. Dabei wird die in Rollrichtung vordere abgebremst, während die hintere beschleunigt wird. Hat die hintere Kugel einen größeren Impuls, so kommt es zu einem Stoß mit der vorderen, die hintere Kugel ist also sterisch behindert (s. Abb. 1.6.6).

[21] Unter *clustering* versteht man die Ballung von einem granularen Medium (z.B. [33]) zu Bereichen hoher Teilchendichte. Durch die dissipative Natur der Stöße sinkt die Relativgeschwindigkeit von Teilchen im *cluster*. Je größer der *cluster*, desto wahrscheinlicher dissipieren freie Teilchen an ihm Energie, desto mehr Energie kann er "aufnehmen" und desto schneller wächst er.

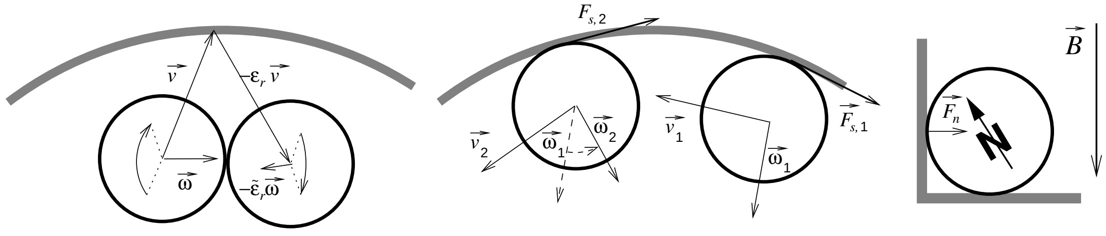

Abbildung 1.6.5: Vier Aspekte der besonders großen Energie-Dissipation des Schalenrandes. Links: "zentrale" Kollision mit dem Rand erfordert Impuls- und Drehimpulsumkehr unter Einfluss der Restitutionskoeffizienten. Mitte: Die Gleitreibungskräfte $\vec{F}_s$ dissipieren Energie; um $\vec{\omega}_1$ zu $\vec{\omega}_2$ zu verändern, braucht man Kontaktkräfte. Rechts: Sterische Inhibition der Anregung durch das Magnetfeld; die Rückstellkraft $\vec{F}_n$ verursacht eine Gleitreibungskraft, welche das Drehmoment des Magnetfeldes kompensiert.

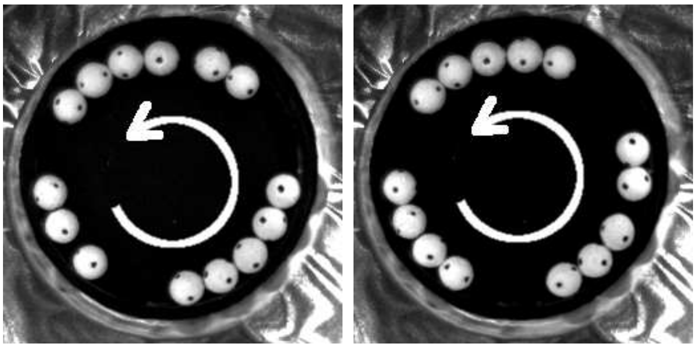

Abbildung 1.6.6: Exemplarische Darstellung des Ringmodus. Der Umlaufsinn des Ringes ist durch einen Pfeil angedeutet. Ringabschnitte können unterschiedliche Geschwindigkeiten haben, einzelne Kugel können sogar den *cluster* wechseln. $N = 14$; $B_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$; $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; Bodenbelag Papier; $\Delta t = 0,02\,\mathrm{s}$.

Die Richtung der Kraft, die so auf die linke ausgeübt wird, ist ebenfalls entlang der Wand gerichtet, sodass ein Ausbrechen der linken Kugel unwahrscheinlich ist (s. auch 1.6.7). Beide Kugeln rollen also in dieselbe Richtung am Schalenrand entlang. Dabei wechseln sich Phasen der gebundenen Zustände (Nord- an Südpol) mit kurzen Phasen der Instabilität (beide Kugeldipole senkrecht) je zwei mal pro Periode ab. Im Mittel überwiegt jedoch der anziehende Anteil und die beiden Kugeln sind so zu sagen gebunden.

Sind zwei Kugeln auf diese Weise gebunden, so schließen sich auch andere Kugeln, die sich am Rand befinden und nicht gerade entgegengesetzten Impuls haben, diesem Verbund an. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Rand durch seinen dissipativen Charakter größer ist, organisieren sich sehr schnell alle Kugeln in einem kollektiven, rollenden Ring und behalten diese Bewegungsform bei (s. Abb. 1.6.6). Dies wird im Folgenden als Ringmodus bezeichnet. Die Bindung der Kugeln untereinander ist allerdings nur schwach und kleinere Ringabschnitte werden mal langsamer, mal schneller, ohne dass sich die Bewegungsform sofort ändert. Es handelt sich hier also eher um einen Effekt der Selbstorganisation als nur um einen der Energieminimierung.

1.6.1.7 Destabilisierung des Ringmodus

Abb. 1.6.7 illustriert eine Kollision innerhalb des Ringes. Die Geschwindigkeit der hinteren (linken) Kugel zeigt am Zentrum der vorderen nach außen vorbei. Damit die hintere von den beiden Kugeln ausbrechen kann, muss ihre Geschwindigkeit so

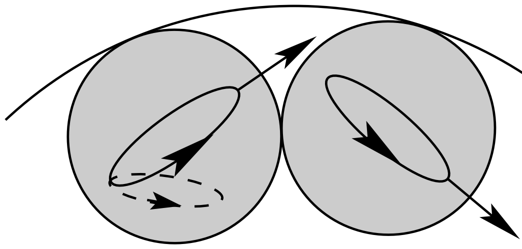

Abbildung 1.6.7: Schematische Darstellung des Ringmodus mit zwei Kugeln. Die Geschwindigkeit der Kugeln sind als gerade Pfeile skizziert, die Ellipsen zeigen die Position des Dipol-Nordpols und seine Rotationsrichtung. Die hintere Kugel ist durch die vordere sterisch "behindert" und dissipiert durch häufige Stöße genug Energie, um den Ringmodus zu stabilisieren. Als gestrichelte Linie ist die Bewegung des Dipol-Nordpols angedeutet, kurz bevor die hinter Kugel aus dem Ringmodus ausbricht.

weit gestört werden, dass sie ins Innere der Schale zeigt. Mit der nächsten Beschleunigungsphase von der Wand weg kann dann ein Stoß mit der vorderen Kugel eine Impulsänderung weiter ins Zentrum der Schale hervorrufen. In Abb. 1.6.7 ist dies durch die gestrichelte Ellipse angedeutet, die die Trajektorie des Nordpols darstellt. Eine solche Störung tritt z.B. auf, wenn die Winkelgeschwindigkeiten der Kugeln im Ring nicht mehr untereinander und mit der Treibungsperiode synchron laufen. Man kann die rotierenden Dipole auch als getriebene, gekoppelte nicht-lineare Oszillatoren auffassen. Es ist also nicht verwunderlich, dass der Ringbewegung eine chaotische Komponente überlagert ist. Im Experiment sind zusätzlich Varianzen z.B. in der Dipolstärke vorhanden. Dies ist in der Simulation unberücksichtigt geblieben.

Der Ringmodus existiert in diesem System also nicht als stabiler Attraktor, sondern nur als instabiler Repellor[22] in Koexistenz mit dem Gasmodus der ungeordneten Bewegung der Kugeln. Sofern der Ringmodus für gewählte Parameter existiert, wechselt sie sich immer mit dem Gasmodus ab. Solch eine unvorhersagbare Abfolge von geordneter Bewegung und chaotischen Ausbrüchen ist als "Intermittenz" bekannt und wird in Abschnitt 1.7 eingehender beschreiben. Auch wenn der Ringmodus bei niedrigen Amplituden stabiler ist und es dort selten zu chaotischen, gasförmigen Ausbrüchen kommt, so ist der Ringmodus nicht isoliert beobachtet worden. In der Nähe des Übergangs zum statischen Modus bleibt der Ringmodus z.T. mehrere Minuten lang stabil. Dies entspricht mehreren hundert Umläufen.

[22] Man definiert einen Attraktor als begrenzten Bereich im Phasenraum, den eine Trajektorie nicht verlässt. Ein Attraktor kann z.B. durch Variation eines Parameters instabil werden (man spricht dann von einem Repellor), sodass sich die Trajektorie zwar eine gewisse Zeit im ehemaligen Bereich des Attraktors aufhält, aber diesen Bereich irgendwann verlässt.

Der bestimmende Faktor für das Auftreten des Ringmodus ist der konkave Schalenrand. Für rechteckige Schalen ergeben sich die beschriebenen dissipativen Eigenschaften ebenso, wodurch auch hier Kugeln parallel zum Rand laufen. In den Ecken kommt die Dissipation und sterische Unterdrückung der Anregung am stärksten zum Tragen und meist befindet sich dort eine Kugel in Ruhe. Dadurch bildet sich für die restlichen Kugeln effektiv eine konkave Geometrie aus, aber es kommt nicht zu einer kontinuierlichen Bewegung am Rand.

Es sollte noch erwähnt werden, dass die Kugeln für sehr hohe Anregungsenergien bei Kollisionen die Einschränkung auf zwei Dimensionen verlassen. Sie können dann auch übereinander abrollen und über den Rand der Schale gelangen. Dies begrenzt für die jeweilige Frequenz die sinnvolle Wahl der maximalen Feldstärke, die verwendet werden kann.

Nach Diskussion der möglichen Bewegungsformen soll nun ihr Auftreten bei Variation der Systemparameter untersucht werden.

1.6.2 Diskussion der Treibungsparameter

In Abb. 1.6.8 ist die durch die Treibungsparameter ν und B_0 aufgespannte Ebene für verschiedene Bodenbeläge dargestellt. Es werden dynamische Regime für die sechs zuvor beschriebenen Phasen unterschieden. Diese sind bezeichnet mit: S für den statischen Modus, R für den Random Walk, D für die Drift von zusammenhängenden Ketten, G für den Gasmodus, I für das intermittente Wechseln zwischen Gas- und Ringmodus und E für die erzwungene Rotation durch hochfrequente Drehung einzelner ungebundener Kugeln. Um diese Diagramme zu erstellen, wird folgendermaßen vorgegangen: Im Experiment wird die Frequenz des Magnetfeldes konstant gehalten, und dessen Amplitude langsam erhöht, bis sich der Bewegungsmodus verändert. Nach einer zweiminütigen Wartezeit, um Transienten abklingen zu lassen, wird die Amplitude langsam zurückgeregelt, bis der alte Modus wieder eintritt. Dieser Vorgang wird unter Umständen wiederholt, um Transienten erkennen zu können. Schließlich wird der Wert für diese Übergangsamplitude notiert. Für die durchgezogenen Linien in Abb. 1.6.8 ist die Änderung der Amplitude während einer solchen Iteration kleiner als die Ablesegenauigkeit des Oszilloskops ($\approx 5\%$). Dort markieren sie scharfe Grenzen der verschiedenen Modi.

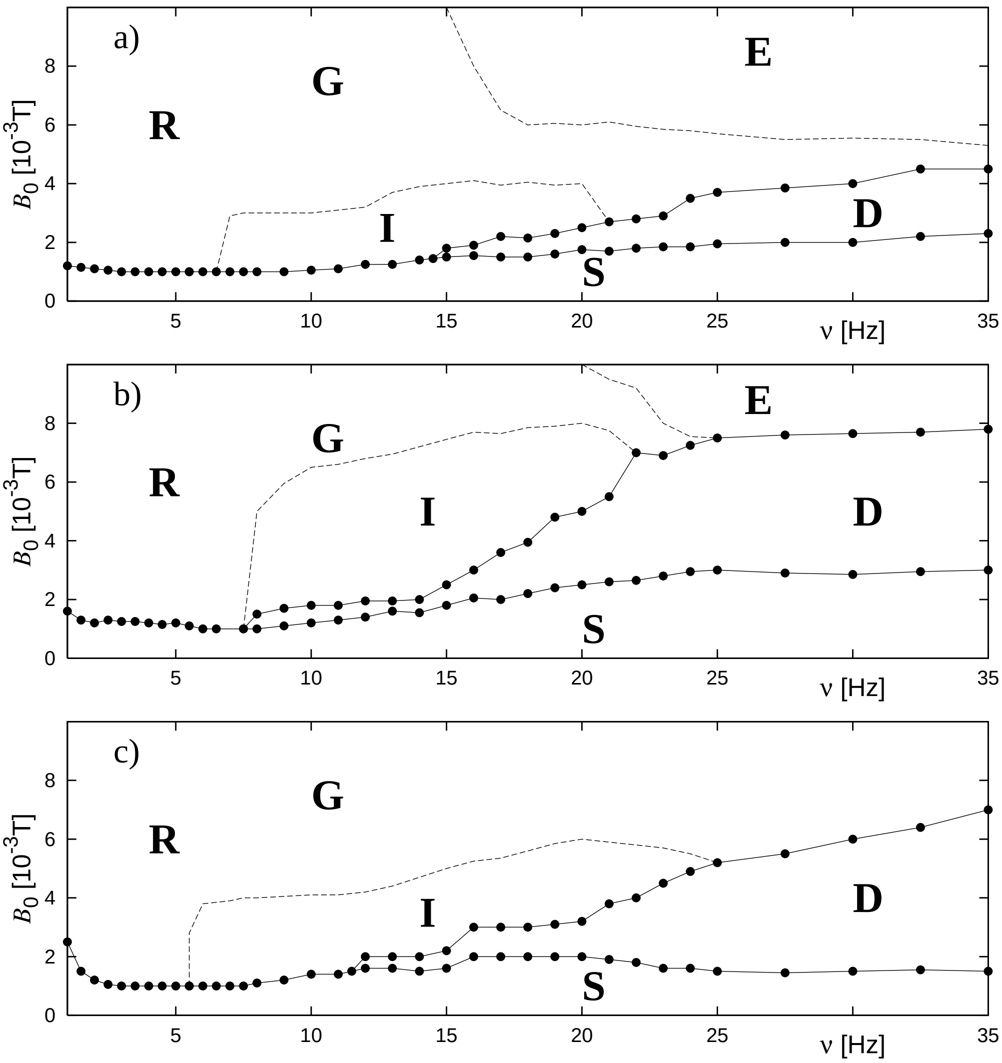

Abbildung 1.6.8: Experimentelles, dynamisches Verhalten von $N = 10$ Dipolkugeln bei Variation der Anregungsparameter B_0 und ν für verschiedene Bodenbeläge in aufsteigender Reihenfolge ihres Gleitreibungskoeffizienten: a) Papier; b) Parafilm; c) Filz. Es werden sechs dynamische Regime unterschieden: statische Ketten (S), driftende Ketten (D), erzwungene Rotation (E), Gasmodus (G), Random-Walk (R) und intermittenter Modus (I). Scharfe Übergänge (z.B. S→I) sind mit durchgezogenen Linien gezeichnet. Graduelle Übergänge (z.B. R→G) sind nicht eingezeichnet und schwer zu definierende Übergänge (z.B. I→G) mit gestrichelter Linie angedeutet.

Der intermittente Modus stellt eine Besonderheit dar. Die gestrichelte Trennlinie markiert den Übergang, bei dem nach zweiminütiger Beobachtung kein kompletter Umlauf aller Kugeln als Ring mehr zu erkennen war. Zwar laufen z.B. während des Gasmodus Teile der Kugeln ringförmig am Rand entlang, aber nicht alle Kugeln stabilisieren sich dort. Ähnliches gilt für den Übergang von G→SD. Die gestrichelte Linie markiert, bei welcher Amplitude zwei Minuten lang kein Ausbruch der Kugeln (d.h. keine Kugel legt in kurzer Zeit mehr als einen Schalenradius zurück) stattgefunden hat. Beim Übergang R$\rightarrow$G konnte kein geeignetes Unterscheidungskriterium definiert werden. Allerdings liegt der Übergang etwa in dem Frequenzbereich, bei dem Intermittenz zum ersten mal auftritt ($\nu \approx (5-7)\,\mathrm{Hz}$). Der Übergang von S zu jedem anderen Modus ist abrupt: sind die Ketten erst instabil, stellt sich sofort ein anderer Bewegungsmodus ein. Ebenso scharf ist der Übergang zwischen D und den anderen Modi, anhand des Aufbrechens der driftenden Ketten, zu erkennen.

Das Verlassen der Stabilität geschieht für alle Frequenzen bei annähernd derselben Amplitude. Für Papier als Bodenbelag mit dem niedrigsten Gleitreibungskoeffizienten ist das Durchdrehen der Kugeln auf der Stelle am leichtesten. Daher sind die beiden Bereiche I und D sehr schmal. Bedingt durch die hohe Gleitreibung tritt SD bei Filz im untersuchten Amplitudenbereich gar nicht auf. Außerdem hat ein Bodenbelag aus Filz den größten verfügbaren Frequenzbereich für I. Auf Parafilm hingegen ist I bis zu höheren Amplituden hin vorhanden, dafür fehlt der Übergang zwischen S und I, da der Drift-Modus schon bei $7,5\,\mathrm{Hz}$ zusammen mit der Intermittenz auftritt.

Eine Wiederholung dieses Experimentes mit $N = 5$ und $N = 15$ Kugeln und in einer größeren Schale ($90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) zeigt im Wesentlichen die selben Ergebnisse. Die Simulation liefert qualitativ ebenfalls die beschriebenen sechs Bewegungsmodi. Allerdings passt quantitativ nur das Verlassen von S einigermaßen mit den Experimenten überein. So ist das Verlassen von S in den Simulationen ebenfalls fast konstant, mit leichtem Anstieg für zunehmende Frequenzen. Die dazu nötigen Feldstärken liegen auch zwischen $(1-2)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$. Dies ist von den meisten Simulationsparametern unabhängig.

Reduziert man in der Simulation die freien Parameter auf die Gleitreibung, die im Experiment durch Austausch der Bodenbeläge verändert werden kann, so sieht man auch in den Simulationen eine Veränderung der dynamischen Regime, ähnlich dem Experiment. Allerdings macht es die große Anzahl von Parametern und die hohen Anforderungen an die Rechenzeit unmöglich im Rahmen dieser Arbeit, quantitative Übereinstimmungen zwischen Experiment und Simulation zu erreichen. Weiterhin vereinfacht die Simulation einige für die Intermittenz möglicherweise entscheidende Systemgrößen (z.B. Varianzen in der Dipolstärke der Kugeln bei der Herstellung).

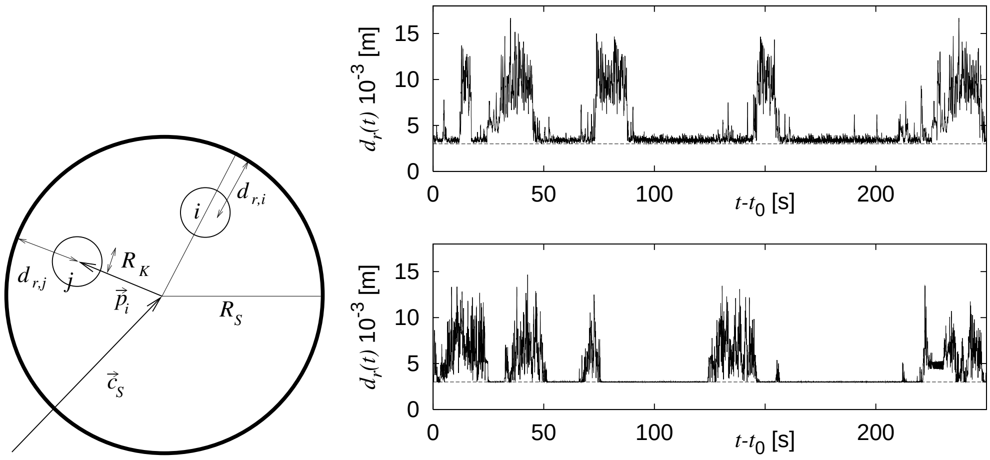

Abbildung 1.7.1: Links: Schematische Darstellung der benötigten Variablen um eine klar erkennbare intermittente Zeitreihe zu erhalten. Rechts: exemplarische Zeitreihen mit $N = 6$ Kugeln; oben: Experiment ($B_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$; $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; $t_0 = 50\,\mathrm{s}$; Bodenbelag Papier), unten: Simulation ($B_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$; $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; $t_0 = 250\,\mathrm{s}$; $\mu_s = 0{,}2$).

1.7 Intermittenz des granularen Mediums

In den letzten dreißig Jahren wurde Intermittenz in etlichen Systemen untersucht und verschiedene Formen der Intermittenz wurden charakterisiert. Während in einer der ersten Arbeiten zu diesem Thema [34] das Lorenz-Modell theoretisch behandelt wurde, wurden inzwischen eine breite Palette an Modellsystemen untersucht. Dazu gehören mathematische Abbildungen [35, 36], Billard-Systeme [37], elektrische Schaltkreise [38], optische Systeme [39], Entladugsplasmen [40] und ebenso granulare Medien [33, 41]. Experimentell ist Intermittenz in granularen Medien allerdings noch nicht untersucht worden, und so gehört das in diesem Kapitel beschriebene Beispiel zu den ersten seiner Art.

Charakteristisch für Intermittenz ist die unvorhersagbare Abfolge von dynamischen Modi. Hierbei ist häufig der eine Modus periodisch und der andere stellt einen chaotischen Ausbruch aus der Periodizität dar. Intermittenz ist einer der Wege, der über Variation eines Kontrollparameters A, von Periodizität ins Chaos führt [42]. Betrachtet man die Instabilität einer invarianten Mannigfaltigkeit [43], so findet man die sog. *On-Off*-Intermittenz. Weiterhin wird die kriseninduzierte Intermittenz bei der Kollision von getrennten Einzugsgebieten zweier Attraktoren beobachtet, die sich unter Veränderung eines Parameters berühren [44].

Um das intermittente Abwechseln des in Abschnitt 1.6.1.6 beschriebenen Ringmodus mit dem Gasmodus charakterisieren zu können, muss man eine geeignete Systemgröße als Zeitreihe darstellen. Eine Zeitreihe mit einem klaren Signal erhält man über die Mittelung der Ortskoordinaten der Kugeln. Man betrachtet speziell während eines Zeitpunktes t die radialen Abstände $d_{r,i}(t) = R_S - (\vec{r}_i(t) - \vec{c}_S)\hat{r}$ der Positionen $\vec{r}_i(t)$ aller n Kugeln zum Rand der Schale (Radius R_S und Zentrum c_S). Von dieser Größe bildet man den Mittelwert $\bar{d}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{r,i}(t) = d_r(t)$ und trägt diesen gegen die Zeit auf. Sind alle Teilchen im Ringmodus, so ist $\bar{d}_r \approx R_K$. Das Maximum von $\bar{d}_{r,i} = R_S$ kann nur für $n = 1$ erreicht werden, wenn sich die Kugel im Zentrum $\vec{c}_S$ der Schale befindet. Der Drehsinn $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ des Ringmodus wird hierbei nicht berücksichtigt, er stellt sich zufällig ein, determiniert durch den vorhergehenden Gasmodus. Abb. 1.7.1 verdeutlicht schematisch die benannten Variablen (links) und zeigt exemplarisch eine solche Zeitreihe für Experiment und Simulation (rechts)[23]. Es fällt auf, dass der Ringmodus in der Simulation konstanter ist. Ein Grund hierfür sind Ungenauigkeiten, die man bei der Bestimmung des Zentrum der Schale und der Kugelpositionen in den Experimenten macht.

Die Festlegung der Verweildauern in den beiden Modi ist nicht so eindeutig, wie Abb. 1.7.1 auf den ersten Blick suggeriert. Verlässt im Ringmodus eine Kugel kurzzeitig den Rand, so soll dieses Ausbrechen nicht sofort als Gasmodus interpretiert werden. Ebenso kommt es vor, dass sich im Gasmodus alle Kugeln am Rand der Schale befinden, ohne dort als Ring zu kreisen. Daher werden alle Übergänge mit kleineren Zeiten als τ_{min} bei der Auswertung ignoriert. τ_{min} wurde für jedes Experiment so gewählt, dass es einem Achtel der Umlaufdauer einer Kugel im Ringmodus entspricht.

Ausgehend von Abb. 1.6.8 wurde die Amplitude B_0 des magnetischen Feldes als Parameter variiert, während ν konstant blieb. Dabei wurden jeweils Zeitreihen von 3 h Dauer aufgenommen. Gestartet wurde bei $B_0 \simeq B_c$, bei dem der intermittente Modus zum ersten Mal auftritt.[24] Aus diesen Zeitreihen wurde die Dauer des Verbleibens im Ringmodus $\tau_{R,i}$ bestimmt und die Verteilung dieser Zeiten als Wahrscheinlichkeitsdichte ausgewertet. Zusätzlich wurde dieses Messprogramm für verschiedene Bodenbeläge und bei verschiedenen Grundfrequenzen wiederholt.

[23] Zwar stimmen die experimentellen Übergänge der Abb. 1.6.8 nicht gut mit den Simulationen überein, jedoch sind die Modi durchaus vergleichbar in Experiment und Simulation.

[24] B_c wurde in Abschnitt 1.6.2 als Trennung z.B. zwischen I und S als die Amplitude bestimmt, bei der gerade noch S vorherrscht

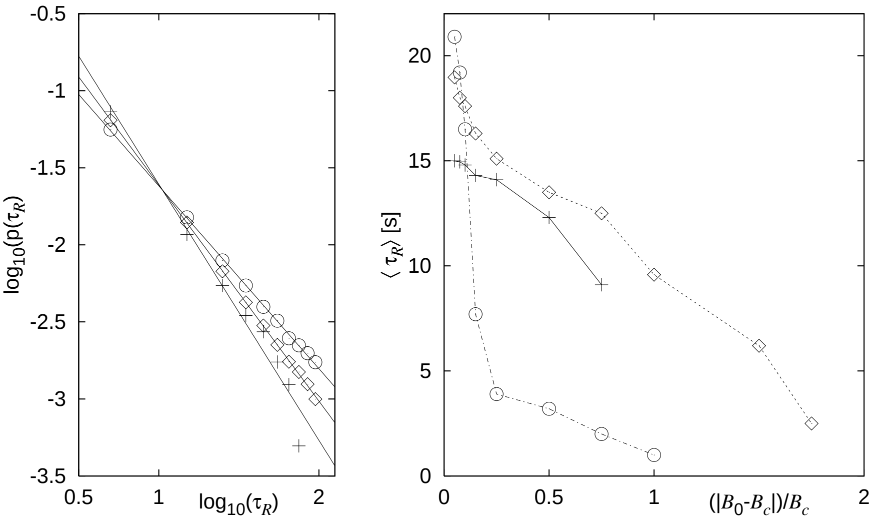

Abbildung 1.7.2: Experimentelle Wahrscheinlichkeitsdichte und mittlere Aufenthaltsdauer im Ringmodus für Papier ($+$), Parafilm ($\diamond$) und Filz ($\circ$) als Bodenbelag. Links: Doppelt-logarithmische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte gegen die Aufenthaltsdauern τ_R im Ringmodus für $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; $B_0 = 1,47 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$(Papier); $B_0 = 1,26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$(Parafilm); $B_0 = 1,1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$(Filz). Die Steigungen s_τ ergeben sich zu $s_{\tau,+} = -1,66 \pm 0,08$; $s_{\tau,\diamond} = -1,4 \pm 0,02$; $s_{\tau,\circ} = -1,19 \pm 0,02$. Rechts: $\langle \tau_R \rangle$ dargestellt gegen den relativen Abstand $\frac{|B_0 - B_c|}{B_c}$ zum kritischen Parameter B_c aus Abb. 1.6.8.

In Abb. 1.7.2 sind links Verteilungsfunktionen für die verschiedenen Bodenbeläge bei $B_0 \simeq B_c$ und $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$ exemplarisch dargestellt. Im Rahmen der Charakterisierung verschiedener Typen von Intermittenz unterscheiden sich diese z.B. durch den Wert der konstante Steigung s_τ der Verteilung von τ_R. Hier allerdings variiert die Steigung der gefitteten Geraden für alle Messreihen. Es wurden Werte für s_τ im Bereich zwischen $1,1$ und $1,7$ errechnet.

Für alle Messreihen ist eine monotone Abhängigkeit für s_τ und auch für $\langle \tau_R \rangle$ von dem Abstand $|B_0 - B_c|$ zu erkennen (s. Abb. 1.7.2, rechts). Auf die Angabe von Fehlerbalken wurde verzichtet, jedoch sollte der Fehler für kleine Werte von $|B_0 - B_c|/B_c$ beträchtlich sein. Denn die Ablesegenauigkeit des zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke eingesetzten Oszilloskops liegt etwa bei $\approx 5\%$. Deshalb ist B_c, und somit auch $B_0 - B_c$, nur sehr unsicher zu bestimmen. Außerdem sind nahe B_c die Aufenthaltsdauern im Ringmodus groß, sodass im Rahmen einer konstanten Aufnahmedauer der statistische Fehler von $\langle \tau_R \rangle$ groß wird. Dies lässt keine Variation von $B_0 - B_c$ über mehrere Größenordnungen zu, wie es in der Literatur üblich ist. Für das Verifizieren eines Skalengesetzes waren die Daten nicht ausreichend und auch die Kurvenform lässt ein solches erst einmal nicht vermuten.

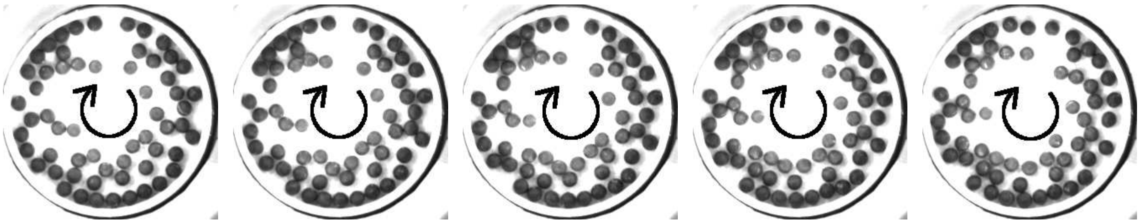

Abbildung 1.7.3: $N = 50$ PVC-Kugeln mit $R_K = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$; $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; $B_0 = 3,3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$; $\delta t = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$ zwischen den Bildern. Bei hoher Kugelzahl gibt es keinen stabilen Ringmodus mehr, trotzdem kreisen *cluster* von Kugeln parallel zum Rand.

Darüber hinaus muss noch folgendes bedacht werden: Der Ringmodus als periodische Phase existiert nicht für $B_0 < B_c$, wie es für Systeme mit Intermittenz in der Literatur üblicherweise der Fall ist. Dies wirft die Frage auf, ob der in Abb. 1.6.8 dargestellte Übergang zur Intermittenz wirklich gleichzusetzen ist mit dem kritischen Parameter, der die Häufigkeit der chaotischen Ausbrüche steuert.

Bei Variation der Kugelzahl zeigen sich kaum Änderungen im intermittenten Verhalten, solange man $N < 2\pi(R_S - R_K)$ wählt. Dies entspricht einem vollbesetzten Ring entlang des Schalenrandes. Wählt man ein größeres N, so kollidieren Kugeln aus dem Inneren mit denen aus dem Ring. Dabei fehlt ihnen der nötige Raum, um sich in den vollbesetzten Ring zu integrieren. Die Stabilität des Rings ist stark herabgesetzt. Trotzdem bleibt der Rand der Schale eine energetische Senke und *clustering* ist weiterhin ein dominanter Effekt. Man erkennt einen bevorzugten Drehsinn der Kugeln im Gasmodus für $N \gg 2\pi(R_S - R_K)$. Die Kugeln kreisen als *cluster* im oder gegen den Uhrzeigersinn entlang des Randes der Schale (s. Abb. 1.7.3). Dabei wechseln sie intermittent ihren Drehsinn. Diese Form der Intermittenz soll hier allerdings nicht weiter untersucht werden.

Obwohl auch die Simulation Intermittenz zeigt, wurde aufgrund der massiven Anforderungen an die Rechenzeit auf eine systematische Auswertung verzichtet. Wählt man die Parameter so, dass sie den Experimenten entsprechen, so zeigt sich, dass die mittleren Aufenthaltsdauern im Ringmodus wesentlich länger sind. Das heißt, in der Simulation ist der Ringmodus stabiler als im Experiment. Dies ist schon an Abb. 1.7.1 zu erkennen, wo der Ringmodus in der Simulation wesentlich schwächeren Schwankungen unterworfen ist, als im Experiment.

1.8 Geschwindigkeitsverteilungen

Über die bisher vorgestellten Aspekte hinaus, wird die Dynamik des magnetischen Mediums durch die Geschwindigkeitsverteilungen für Translation und Rotation charakterisiert. Für granulare Medien wurden eine Vielzahl von verschiedenen Geschwindigkeitsverteilungen nachgewiesen. In vielen Fällen sind Abweichungen für hohe Geschwindigkeiten von der Maxwellverteilung dokumentiert. Allerdings sind auch ungewöhnlichere, wie die Laplaceverteilung [45] veröffentlicht worden. Idealelastische Teilchen werden in Simulationen zur Demonstration der Maxwellverteilung herangezogen. Darüber hinaus sind nur zwei Beispiele für eine Maxwellverteilung, beide theoretisch als Simulation, bekannt: im ersten [46] führt – ähnlich den idealen, elastischen Stößen – der Limes für hohe Anregungsenergien und geringe Dissipation zu derartigen Verteilungen. Als zweites Beispiel wurde für ein rotationsgetriebenes granulares Gas in Bezug auf die Rotationsgeschwindigkeit der Teilchen eine Maxwellverteilungen vorhergesagt [22].

1.8.1 Einfluss des Randes

Betrachtet man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugeln in der Schale, so erkennt man zwei Ringe. Ein sehr ausgeprägter hat den Radius $R_S - R_K$ und rührt von dem dissipativen, strukturbildenden Einfluss des Randes her. Der zweite ist weit weniger ausgeprägt und liegt bei $R_S - 3\,R_K$. Er wird von vereinzelten Kugeln verursacht, die aus dem Inneren kommend mit Kugeln am Rand stoßen. Hier kommt es allerdings nicht zu der Ausbildung eines weiteren Ring-Modus.

Möchte man nur die Dynamik des Gasmodus charakterisieren, so kann man die Schale unterteilen. Man definiert einen inneren Radius R_I, derart dass $R_I < R_S - R_K$. Für die Kugeln mit einem Abstand $|\vec{r_i}| > R_I$ kommen die beschriebenen Randeffekte zu tragen. Daher kann man für den Rotationsfreiheitsgrad eine unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilung je nach Drehsinn der Kugel erwarten. Aus diesem Grund werden die äußeren Kugeln nochmals getrennt, nach Kugeln mit Bahndrehimpuls $(\vec{r_i} \times \vec{v_i})\hat{z} \geq 0$ und Kugeln mit negativem Bahndrehimpuls.

Bei den im Folgenden vorgestellten Verteilungsfunktionen handelt es sich um normierte Wahrscheinlichkeitsdichten. Auf eine Darstellung mit statistischen Fehlerbal-

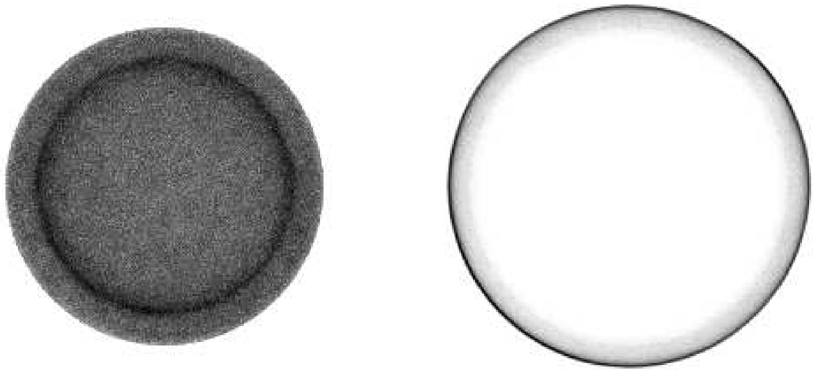

Abbildung 1.8.1: Experimentell: Verteilung der Kugelpositionen innerhalb (links) und außerhalb (rechts) von R_I. Der Ortsraum wurde in äquidistante Kästchen unterteilt und es wurde gezählt wie viele Kugeln in den jeweiligen Kästchen landeten. Schwarze Färbung entspricht der maximal auftretenden Häufigkeit, weiß bedeutet, dass der Bildpunkt nie besucht wurde. Links: innen erkennt man im Abstand $2R_K$ von R_I eine Häufung durch Kollisionen mit Kugeln am Rand. Die Häufung ($\approx 20\%$ mehr Treffer pro Bin als beim Hintergrund) ist allerdings für die Dynamik nicht erheblich. Rechts: Am Rand erkennt man einen sehr deutlichen Gradienten, da die größte Häufigkeit der Kugeln nur im Abstand von $\delta r \approx \frac{1}{5} R_K$ zum effektiven Rand auftritt.

ken wurde der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Sofern nicht explizit angegeben, entspricht einem Wert von 10^{-3} der Wahrscheinlichkeitsdichte hier ein statistischen Fehler von etwa 15%.

Abb. 1.8.1 zeigt typische Verteilungen der Kugelpositionen, gemittelt über alle Bilder einer Zeitreihe, unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Unterteilung. Man erkennt für das Innere eine fast homogene Verteilung. Die Häufung bei $R_S - 3R_K$ fällt bei der Auswertung jedoch nicht ins Gewicht. Man sieht in Abb. 1.8.2 (links), dass eine Variation von R_I und ein Ausblenden dieses Ringes durch Wahl von $R_I = R_S - 3,5R_K$ keine Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung liefert, unter Hinzunahme des Randes $R_I = R_S - R_K$ hingegen schon. Die Verteilungen für beide Drehsinne sind genauso wie die Verteilungen für v_x und v_y des jeweiligen Drehsinns deckungsgleich. Man erkennt deutlich, dass durch die Dissipation wesentlich niedrigere Geschwindigkeiten erreicht werden. Für verschiedene Frequenzen, Amplituden, Kugelzahlen und Bodenbeläge soll im Folgenden die Geschwindigkeitsverteilungen für Translation und Rotation betrachtet werden.

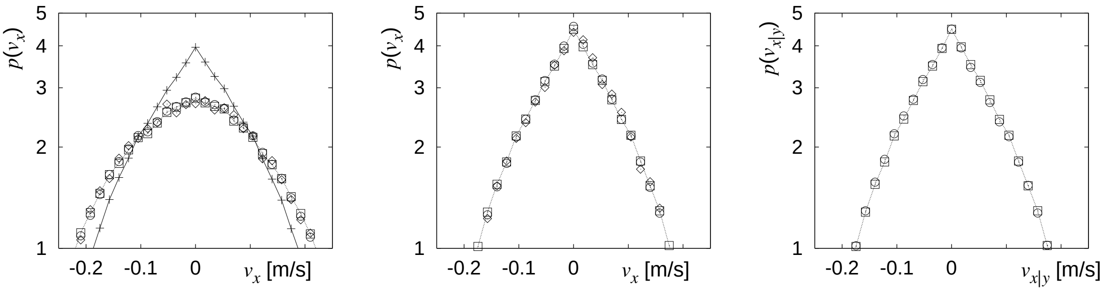

Abbildung 1.8.2: Experimentell: Veränderung der translatorischen Geschwindigkeitsverteilungen bei Variation des Radius R_I, um Gas- und Ringmodus zu unterscheiden; exemplarisch für $N = 10$, $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$, $B = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, auf Parafilm. Links: $R_I = R_S - R_K(+)$, $R_I = R_S - 1{,}5R_K(\Box)$, $R_I = R_S - 2{,}5R_K(\circ)$, $R_I = R_S - 3{,}5R_K(\diamond)$. Unter Berücksichtigung aller Kugeln($R_I = R_S - R_K$) ergibt sich eine andere Verteilung als für andere R_I. Diese unterscheiden sich hingegen nicht merklich voneinander. Mitte: bei der Geschwindigkeitsverteilung der x-Komponente mit Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn erkennt man keine Veränderung bei Variation des Radius (gleiche Symbole wie vorher). Rechts: für $R_I = R_S - 1{,}5R_K$ und alle Kugeln im Uhrzeigersinn($\circ$) bzw. gegen den Uhrzeigersinn($\Box$); v_x und v_y sind austauschbar.

1.8.2 Translatorische Geschwindigkeitsverteilungen

Die Translationsgeschwindigkeit hat nur zwei Komponenten, die in allen Messreihen im Rahmen der statistischen Fehler identisch waren (s. z.B. Abb. 1.8.2, links). In den folgenden Abbildungen ist die jeweilige x-Komponente dargestellt, aber durch $x|y$ wird ausgedrückt, dass diese Wahl willkürlich ist

Abb. 1.8.3 zeigt den Einfluss der Variation von verschiedenen Systemparametern auf die Geschwindigkeitsverteilungen. Systematisch lässt sich feststellen, dass bei vergleichbarer Amplitude und steigender Frequenz die Breite der Verteilung zunimmt. Das bedeutet, das System besitzt eine höhere kinetische Energie. Dies ist ebenso bei konstanter Frequenz und steigender Amplitude der Fall. Die Kurvenform wird stärker von der Frequenz beeinflusst. Tendenziell erhält man bei höheren Energien eher für Verteilungen bei kleine Geschwindigkeiten Laplace-Form[25], die dann bei höheren Geschwindigkeiten abknickt. In Abb. 1.8.3 d) erkennt man für die größte Amplitude ($\circ$) ein Plateau für kleine Geschwindigkeiten. Hier ist die Frequenz so groß, dass die Teilchen auf der Stelle durchdrehen und nur noch geringe Kopplung

[25] Die Laplaceverteilung hat die Form $f(x) = 1/(2\sigma)\,e^{-|x-\mu|/\sigma}$ und besteht aus Geraden bei logarithmischer Skalierung der Ordinate.

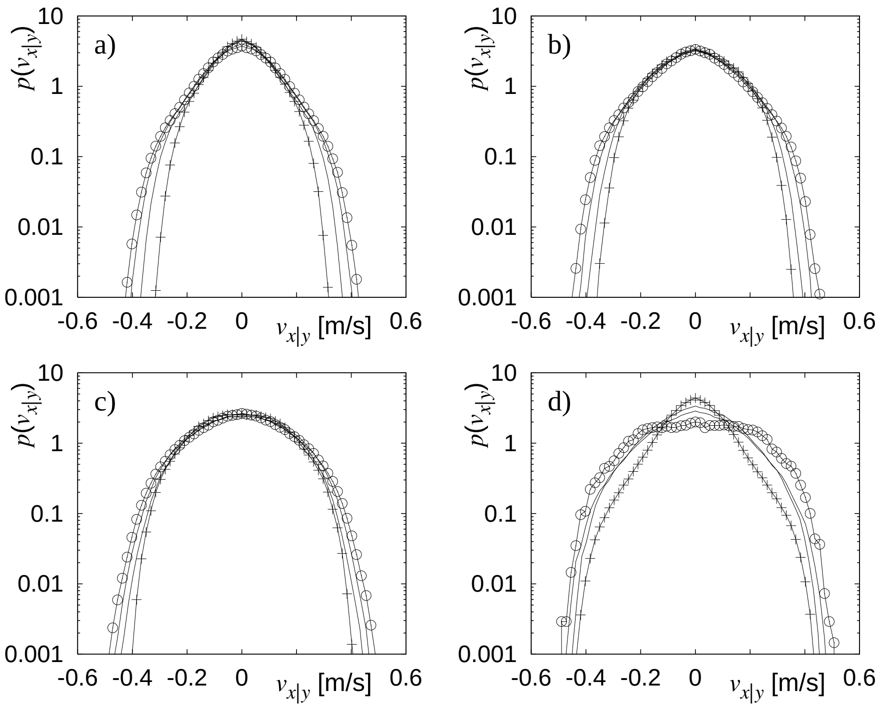

Abbildung 1.8.3: Experimentell: Wahrscheinlichkeitsdichten $p(v_{x|y})$ der Translationsgeschwindigkeiten $v_{x|y}$ (identisch für x- und y-Komponente) auf Parafilm für $N = 10$; mit a) $\nu = 5\,\mathrm{Hz}$, b) $\nu = 7{,}5\,\mathrm{Hz}$, c) $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$, d) $\nu = 12{,}5\,\mathrm{Hz}$. Für jede Frequenz ist eine Amplitude (+) in der Nähe des Übergangs gewählt, bei dem der Gasmodus existiert: a) $B_0 = 13{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, b) $B_0 = 1{,}85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, c) $B_0 = 1{,}85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, d) $B_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$. Außerdem werden $B_0 = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, $B_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ (beides durchgezogene Linien) und $B_0 = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ ($\circ$) ausgewertet.

zwischen Rotation und Translation vorliegt. Für die anderen Bodenbeläge präsentiert sich ein vergleichbares Bild, allerdings bei anderen Anregungsparametern.

Um die Übereinstimmung der Verteilungsfunktionen mit bekannten Verteilungen (z.B. Laplace und Maxwell) zu quantifizieren, wird eine generische Verteilungsfunktion

$$p(x) = le^{-|k\,x^n|} \tag{1.8.1}$$

definiert. $n = 1$ entspricht dann der Laplaceverteilung, $n = 2$ entspricht Maxwell. Gefittet wurden die Daten über die Fehlersummenquadratmethode[26].

Betrachtet man die bisher gezeigten Verteilungen, so kann man die Maxwellverteilung als singuläre Übergangsform erwarten (in Abb. 1.8.3 zwischen b) und c)). Tatsächlich liefert der Fit nach Gl. 1.8.1 im günstigsten Fall in Abb. 1.8.3 b) einen

[26]Benutzt wurde der Marquardt-Levenberg Algorithmus.

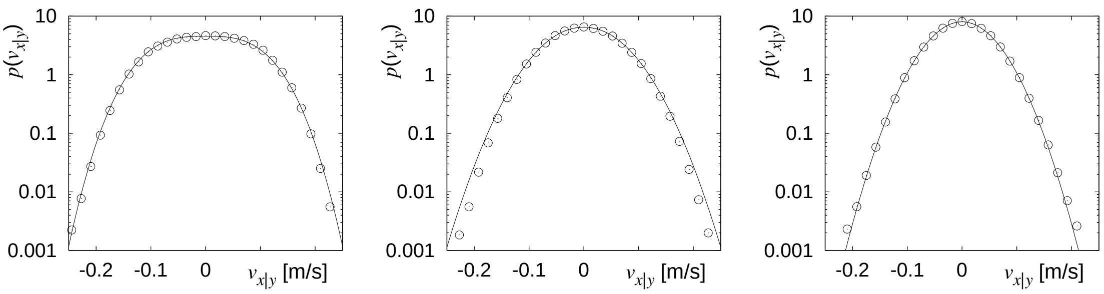

Abbildung 1.8.4: Experimentelle Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v_{x|y})$ der Geschwindigkeiten $v_{x|y}$ für $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$; $N = 10$; Bodenbelag: Papier. Variiert ist $B_0 = 4,5 \cdot 10^{-3}$T (links), $B_0 = 3 \cdot 10^{-3}$T (mitte), $B_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}$T (rechts). Die durchgezogene Linie markiert den Fit.

Exponenten von $2,06 \pm 0,06\,(R = 7,5\%)$ und in Abb. 1.8.3 c) $1,94 \pm 0,04\,(R = 4,2\%)$. In Klammern angegeben ist die relative Fehlerquadratsumme, die ein Maß für die Qualität des Fits darstellt.

Abb. 1.8.4 zeigt den äquivalenten Parameterbereich für Papier als Bodenbelag. Für den Exponenten n errechnen sich folgende Werte: $n_{rechts} = 2,000 \pm 0,004(R = 0,4\%)$, $n_{mitte} = 2,06 \pm 0,02(R = 5\%)$ und $n_{links} = 3,00 \pm 0.12(R = 2\%)$. Für Abb. 1.8.4 rechts kann man also mit exzellenter Konfidenz eine Maxwellverteilung annehmen, während der Fit für das mittlere Diagramm nicht mehr ganz so gut ist und für links sogar ein Exponent von drei gewählt werden muss. Bei Papier folgt aus seinem Gleitreibungskoeffizienten eine schlechtere Kopplung zwischen Rotation und Translation. Daher findet man niedrigere kinetische Energien bei vergleichbaren Anregungsparametern als Parafilm oder Filz als Bodenbelag.

Bei festem Schalenradius beeinflusst die Kugelzahl die mittlere freie Weglänge der Teilchen und somit die Häufigkeit von Kollisionen. Eine höhere Kugeldichte ($N \leq 30$) verringert die Breite der Kurven leicht, nicht aber die Kurvenform. Erst bei sehr dichten Packungen ($N \leq 30$) ändern sich Kurvenform und Breite, da *clustering* ein dominanter Einfluss wird.

1.8.3 Rotatorische Geschwindigkeitsverteilungen

Für die Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeiten können nur etwa 30% der Kugeln verwendet werden (s. Anhang B.2). Diese Auswahl ist jedoch nicht systematisch und führt nur zu einer Verschlechterung der Statistik, da nur eine kleinere Menge

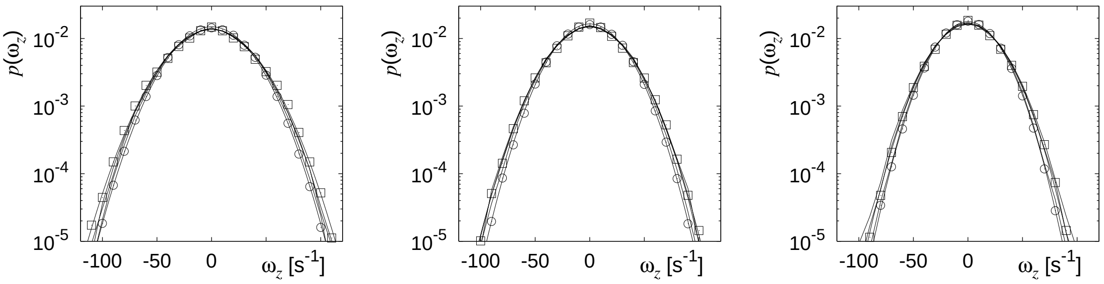

Abbildung 1.8.5: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\omega_z)$ für $N = 10$ und $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$ auf den drei benutzten Bodenbelägen: Filz (links), Parafilm (mitte) und Papier(rechts). Variiert wurde B_0 in dem Bereich $1,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}(\circ)$ bis $6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}(\square)$; die Kurvenschar der durchgezogenen Linien entspricht den Fits an Parabeln.

an Datenpunkten zur Auswertung zur Verfügung steht. Hier entspricht einer Wahrscheinlichkeitsdichte von 10^{-5} ein statistischer Fehler von $\approx 20\%$.

In x-y-Richtung ist im Inneren der Schale auch die Rotationsgeschwindigkeit symmetrisch. Für sie gilt im Prinzip dasselbe wie für die Translationsgeschwindigkeiten. Die z-Komponente hingegen wird nur indirekt durch Stöße angeregt und daher ist die Breite der Verteilung merklich schmaler, als die der Rotationsgeschwindigkeiten in der x-y-Ebene. Für alle Parameter liefert die z-Komponente einen guten Fit an die Parabel einer Maxwellverteilung (s. Abb. 1.8.5; für alle Fits war die relative Summe der Fehlerquadrate kleiner als $0,5\%$).

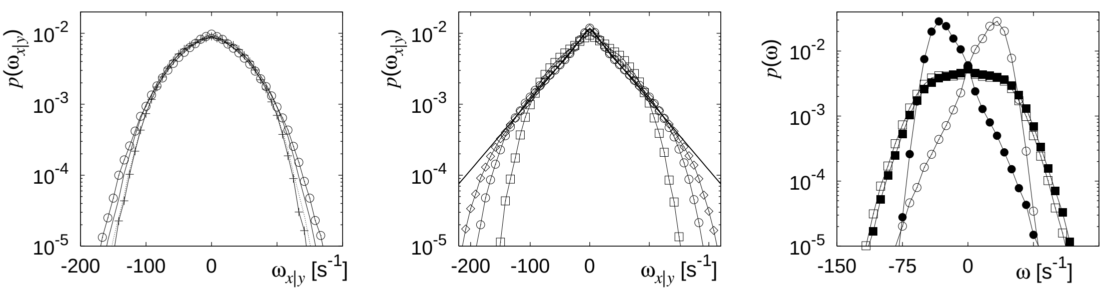

Abbildung 1.8.6: Experimentell: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\omega)$ für die verschiedenen Komponenten von $\vec{\omega}$ bei Variation der Systemparameter; $N = 10$. Links: Verteilung von $\omega_{x|y}$ für die Parameter aus Abb. 1.8.3 c); Die Rotation spiegelt das Verhalten der Translation wider. Mitte: Verteilung von $\omega_{x|y}$ für die Parameter aus Abb 1.8.4 c)($B_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ ($\square$), $B_0 = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ ($\circ$), $B_0 = 4,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ ($\diamond$)). Rechts: exemplarisch auf Parafilm für $B_0 = 1,85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ sind die Komponenten $\omega_{x|y}$ (Quadrate) und ω_z (Kreise) für die Kugeln außerhalb R_I mit Drehrichtung im Uhrzeigersinn (gefüllt) und gegen den Uhrzeigersinn (leer) dargestellt. Die Symmetriebrechung in z-Richtung der Rotation ist deutlich.

Abb. 1.8.6 (links) zeigt exemplarisch für die Parameter aus Abb. 1.8.3 c) die Rotationsgeschwindigkeitsverteilungen in x-y-Richtung; in Abb. 1.8.6 (mitte) wurden die Parameter von Abb. 1.8.4 gewählt. Auch hier ist analog zu den Translationsgeschwindigkeiten eine Veränderung der Kurvenform von parabolischen Verteilungen zu Laplace-ähnlichen zu beobachten. Den besten Fit an eine Parabel liefert Abb. 1.8.6 (mitte) für $B_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ mit $n = 2,08 \pm 0,07\,(R = 6,5\%)$. Schränkt man den Wertebereich auf das Intervall $\{-100, 100\}\,\mathrm{s}^{-1}$ ein, so erhält man hier für $B_0 = 4,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ den besten gefundenen Fit an eine Laplaceverteilung ($n = 0,98 \pm 0,02$; $R = 0,01\%$).

Für Kugeln im Randbereich ($|\vec{r}_i| > R_I$) hingegen findet in der z-Komponente eine Symmetriebrechung statt (s. Abb. 1.8.6, rechts). Sie wird deutlich, wenn man sich Abb. 1.6.5 (mitte) vor Augen hält. Im Uhrzeigersinn sind positive, gegen den Uhrzeigersinn negative Geschwindigkeiten stärker vertreten. Diese Symmetriebrechung tritt auch in ähnlichem Maße in Parameterbereichen außerhalb des Ringmodus auf, da das Abrollen am Schalenrand auch im Gasmodus vorkommt.

1.9 Energetische Betrachtungen

Nachdem im letzten Abschnitt die Geschwindigkeitsverteilungen untersucht wurden, stellt sich die Frage, wie viel Energie zum Aufrechterhalten der Dynamik des Systems nötig ist. Der einzige Energielieferant dieses Systems ist das treibende Magnetfeld, aber im System liegt die Energie in unterschiedlicher Form vor:

- kinetische Energie der Translation,
- Rotationsenergie,
- Verformungsenergie zur Zeit eines Stoßes,
- Dipol-Dipol-Wechselwirkungsenergie der Orientierungen.

Möchte man auswerten, welche Leistung das granulare Medium von dem Magnetfeld B erhält, so gilt es, folgendes Integral für jede Kugel zu bestimmen:

$$J_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_i \int_t^{t+\tau} \vec{M}_{B,i} \vec{w}_i \, dt, \tag{1.9.1}$$

wobei $\vec{M}_{B,i}$ (s. Gl. 1.5.9) das auf Kugel i durch das Magnetfeld ausgeübte Drehmoment darstellt. Ist das Skalarprodukt von Winkelgeschwindigkeit und Drehmoment größer als Null, so wird Energie auf die Kugel übertragen, ansonsten leistet das granulare Gas Arbeit gegen das Magnetfeld. Dies äußert sich hier allerdings in kaum messbaren induktiven Stromschwankungen in der Spule. Im zeitlichen Mittel wird ein Strom gegen die Stromrichtung des Verstärkers induziert. Für kurze Zeiten allerdings, verstärkt sich der Spulenstrom, wenn das Medium seine Energie wieder abgibt. Es wäre in dieser Situation prinzipiell möglich, die Treibung auszuschalten und Strom aus dem Medium zu beziehen. Dies deutet die Möglichkeit an, dass dieses System ein weiteres Beispiel für die sog. "Verletzung" des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik darstellt [47].

Um das Integral aus Gl. 1.9.1 im Experiment auswerten zu können, muss man gleichzeitig sehr genaue Informationen über die Stärke des Magnetfeldes, die Orientierung der Dipole und ihre Winkelgeschwindigkeit haben. Wie in Abschnitt B.2 des Anhangs erklärt, hat man keinen direkten Zugriff auf die Orientierung der Kugel. Man könnte lediglich die Orientierung als Integral der Winkelgeschwindigkeit bestimmen.

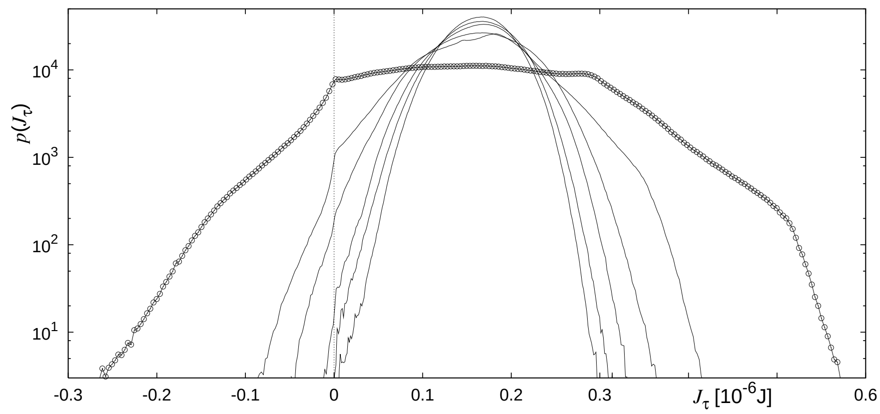

Abbildung 1.9.1: Auswertung der Energiebilanz der Simulation bei $B_0 = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$, $\mu_s = 0,5$, $N = 10$. Verteilung der über τ gemittelten Leistung J_τ für $\tau = 0,05\,\mathrm{s}(\circ)$; $0,1\,\mathrm{s}$; $0,15\,\mathrm{s}$; $0,2\,\mathrm{s}$; $0,25\,\mathrm{s}$; $0,3\,\mathrm{s}$.

Dies ist jedoch gerade bei Rotationen in 3D und den hier auftretenden Bildwiederholraten sehr ungenau. Außerdem muss die Messung der Stärke des Magnetfeldes mit der Aufnahme synchronisiert werden. Dies gelang im Rahmen dieser Arbeit nicht.

Die Simulation hingegen, unterliegt nicht solchen Schwierigkeiten, da alle benötigten Daten in die Integration der Bewegungsgleichungen einfließen. Gl. 1.9.1 kann also ohne großen Mehraufwand berechnet werden. Abb. 1.9.1 zeigt die Verteilungen der, jeweils über verschiedene Zeiten τ gemittelten, Leistung J_τ für typische Parameter im Gasmodus ($B_0 = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$, $\mu_s = 0,5$, $N = 10$). Man kann deutlich erkennen, dass das Maximum der Verteilungen bei etwa $0,16 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}$ bleibt, was der mittleren Leistungsaufnahme einer einzelnen Kugel entspricht. Mit steigendem τ werden die Verteilungen jedoch immer schmaler und parabolischer. Für kurze Zeiten gibt es jedoch eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass das Medium auf den Treiber Energie überträgt. Dieser Sachverhalt wird im Rahmen des Fluktuationstheorems erforscht, welches Gegenstand des nächsten Abschnitts ist.

1.9.1 Das Fluktuationstheorem

Wie der letzte Abschnitt gezeigt hat, kommt es auf kurzen Zeitskalen und für kleine Teilchenzahlen zu einer interessanten Situation. Entgegen der Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, leistet das Medium zeitweise Arbeit gegen das energetische Reservoir. Daher wurde das Fluktuationstheorem als Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes eingeführt [47]. Hier wurden die Entropiefluktuationen bei Prozessen fern des Gleichgewichts am Beispiel einer gescherten Vielteilchen-Flüssigkeit betrachtet. Die Formulierung des Fluktuationstheorems kann man jedoch auf fast beliebige Formen von Flüssen übertragen, z.B. Materiefluss, Leistung als Energiefluss, etc. Auf dieser Grundlage gibt es zahlreiche Untersuchungen verschiedenster Systeme, von theoretischen Arbeiten [48] über numerische Simulationen [49, 50] bis hin zu Auswertungen von Experimenten. Bei letzteren konnte das Fluktuationstheorem z.B. für Partikel in turbulenten Rayleigh-Bénard Flüssen [51] oder bei einem kolloidalen Partikel unter dem Zug einer bewegten optischen Falle [52] nachgewiesen werden (für weitere Beispiele, siehe [53, 54] und dortige Zitate).

In dieser Arbeit wird die folgende Formulierung des Fluktuationstheorems benutzt:

$$\frac{p(J_\tau)}{p(-J_\tau)} = e^{J_\tau \tau / \beta_\tau} \ , \tag{1.9.2}$$

$$\text{mit} \quad J_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} F \cdot \dot{x} \ dt \ . \tag{1.9.3}$$

Hierbei ist J_τ die allgemeine Formulierung von dem Spezialfall, den Gl. 1.9.1 darstellt. Es repräsentiert die mittlere Leistung über einen Zeitraum τ und $J_\tau \tau$ die Energie, die ein Reservoir mit der Wahrscheinlichkeit $p(J_\tau)$ während dieser Zeit an das Medium abgibt. $p(-J_\tau)$ ist entsprechend die Wahrscheinlichkeit, dieselbe Menge Energie an das Reservoir abzugeben. Die Aussage dieses Theorems trägt der Tatsache Rechnung, dass eine Leistung $J(t)$ auf einer kurzen Zeitskala um die über lange Zeiten gemittelte Leistung schwankt. Ist die mittlere Leistung groß gegenüber ihren Fluktuationen, so wird die Wahrscheinlichkeit, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik "zu verletzen" exponentiell unterdrückt. Dabei wird β_τ als effektive Temperatur des Systems interpretiert [55] und es konnte dort eine monoton wachsende Abhängigkeit mit der kinetischen Energie gezeigt werden. Eine Analyse für die Fluktuationen der Dipolkugeln folgt im nächsten Abschnitt.

1.9.2 Das Fluktuationstheorem im simulierten Dipolgas

Ausgehend von den in Abb. 1.9.1 dargestellten Verteilungsfunktionen kann man das Verhältnis $p(J_\tau)$ zu $p(-J_\tau)$ mit logarithmisch skalierter Ordinate gegen J_τ darstellen. Das Ergebnis für verschiedene τ ist in Abb. 1.9.2 dargestellt. Man erkennt zwar eine monotone Abhängigkeit, aber weder ist ein (zu erwartender) linearer Fit ge-

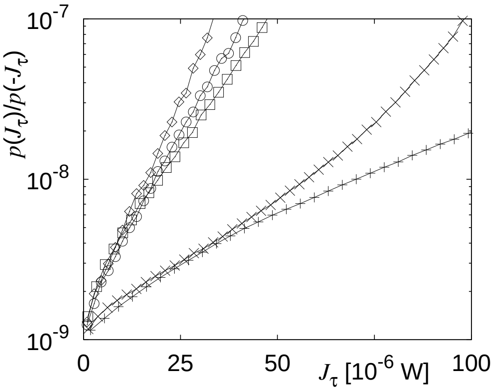

Abbildung 1.9.2: Darstellung von $\ln[p(J_\tau)/p(-J_\tau)]$ gegen J_τ für die Simulation aus Abb. 1.9.1; $\tau = 0{,}05\,\mathrm{s}(+)$; $0{,}075\,\mathrm{s}(\times)$; $0{,}1\,\mathrm{s}(\Box)$; $0{,}125\,\mathrm{s};(\circ)$ $0{,}15\,\mathrm{s}(\diamond)$.

rechtfertigt, noch kann man von einer systematischen Abhängigkeit der Steigung der Gerade von τ ausgehen.

Das hier dargestellte Medium ist also kein geeignetes Beispiel für den Nachweis des Fluktuationstheorems, obwohl es auf den ersten Blick nach einem guten Kandidaten aussieht. Das könnte zum Einen an der Größe der Fluktuationen in Relation zur benötigten mittleren Leistung des Mediums liegen. Zum Anderen stehen verschiedene Formen der Energie als Zwischenspeicher zur Verfügung, nicht nur die kinetische. Für ein tieferes Verständnis der Voraussetzungen, die ein System erfüllen muss, werden im nächsten Kapitel minimalistische Modelle, bzw. ein einfaches Experiment konzipiert.

Kapitel 2 – Nachweis des Fluktuationstheorems in Minimalsystemen

In den bisher in der Literatur untersuchten Systemen zum Nachweis des Fluktuationstheorems war die Ursache solcher Fluktuationen die Unordnung, die durch große Teilchenzahlen oder stochastische Prozesse entsteht. Auch in dem in Kapitel 1 vorgestellten Systemen wird eine ungeordnete Bewegung durch die Wechselwirkung der Teilchen untereinander hervorgerufen. Andererseits kann man sich die Frage stellen, wie ein Minimalsystem mit intrinsischem, deterministischem Chaos aussehen könnte. Dies ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

2.1 Eine Punktmasse im Duffingpotenzial

Das eindimensionale Duffingpotenzial

$$V(x) = k_1\,x^4 - k_2\,x^2 \tag{2.1.1}$$

ist inzwischen in Lehrbücher über nicht-lineare Dynamik als eines der einfachsten Beispiele eingegangen, chaotische Zeitreihen zu erhalten. Es weist einen Punkt labilen Gleichgewichts ($x = 0$) zwischen zwei Minima auf. Fügt man dem Potenzial nun noch eine Treibung hinzu und stellt geeignete Treibungsparameter ein, so wird das System chaotisch. Auch hier kann man sich die Frage nach der Leistung stellen, die durch die Treibung auf das Teilchen übertragen wird, bzw. die das Teilchen abgeben muss.

2.1.1 Bewegungsgleichung im Duffingpotenzial

Auf eine Punktmasse wirkt in dem getriebenen Potenzial die Kraft

$$F(x,t) = A\cos(\omega t) - \partial V(x)/\partial x\ . \tag{2.1.2}$$

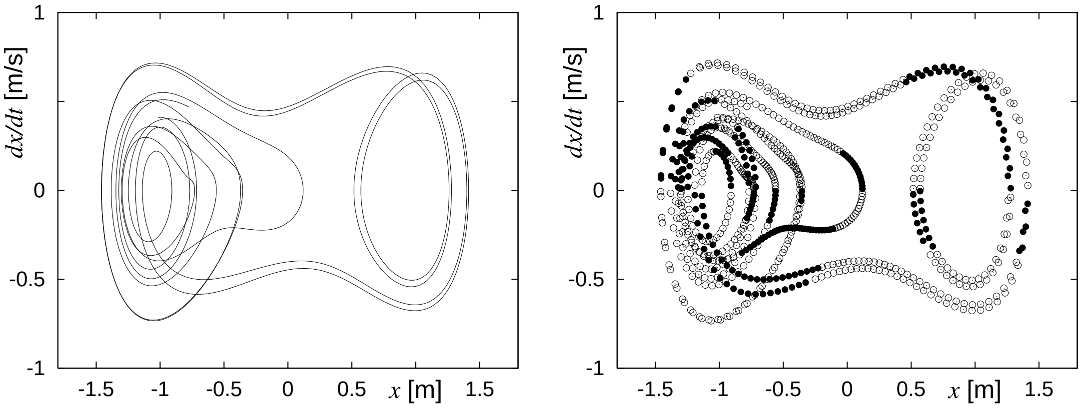

Abbildung 2.1.1: Links: Beispieltrajektorie einer Punktmasse im einfach getriebenen Duffingpotenzial im Phasenraum $(x, \dot{x})$ für $T = 300\,\mathrm{s}$ nach $t_0 = 20\,\mathrm{s}$. Rechts: Ergebnis des Integrals 1.9.3 für $\tau = 0,1\,\mathrm{s}$; positive ($\circ$) und negative ($\bullet$) Werte von J_τ auf der Trajektorie nach τ markiert.

Die Bewegungsgleichung mit einfachem Reibungsterm nach Stokes lautet:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = F(x,t) \; . \tag{2.1.3}$$

Um sie zu integrieren, wird der *GPC* aus Abschnitt 1.5 verwendet, allerdings nur für eine Dimension der Translation und ohne Rotation. Als Integrationszeitschritt wurde $\delta t = 10^{-4}\,\mathrm{s}$ gewählt. Für geeignete Konstanten[1] erhält man chaotische Trajektorien. Abb. 2.1.1 zeigt für die Startwerte $x = 0$ und $\dot{x} = 1\,\mathrm{m/s}$ eine exemplarische Trajektorie und markiert in welchen Phasen der Trajektorie J_τ positiv bzw. negativ ist. Man kann leicht erkennen, dass in den Umkehrpunkten $\dot{x} = 0$ auch J_τ das Vorzeichen wechselt. Zu diesen Zeitpunkten trägt die Punktmasse die größte potenzielle Energie und musste dafür Arbeit gegen das Reservoir leisten, anstatt aus diesem Energie zu beziehen.

Stellt man die Verteilung von J_τ für einen langen Simulationslauf ($T = 3,5 \cdot 10^8\,\mathrm{s}$; im Folgenden für alle Simulationsläufe benutzt) und für verschiedene Werte von τ dar, so erhält man Abb. 2.1.2. Die mittlere Leistung, welche die Punktmasse aufnimmt, liegt bei etwa $0,9\,\mathrm{W}$. Wie zu erwarten, wird die Verteilung schmaler, je größer τ gewählt wird. Es ist zu erkennen, dass die Verteilung des größten dargestellten $\tau = 25,8\,\mathrm{s}$ für $J_\tau < 0$ hier keine erkennbaren Beiträge mehr liefert. Trotzdem ist die Kurvenform für dieses τ nicht annähernd eine Parabel, wie man es für eine Normalverteilung vermuten würde. Das bedeutet, bei diesem System handelt es

[1] Hier wurden o.B.d.A gewählt: $k_1 = \frac{1}{4}\,\mathrm{kg\,m^{-2}s^{-1}}$, $k_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 0,25\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, $A = 0,38\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ und $\omega = 1\,\mathrm{s^{-1}}$.

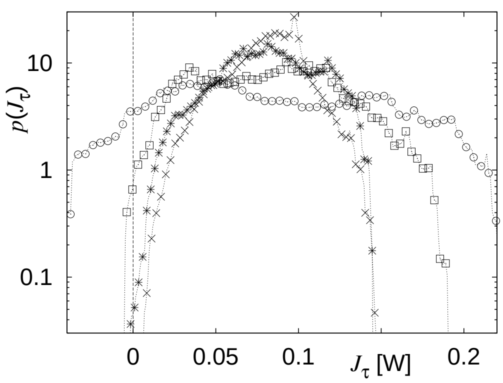

Abbildung 2.1.2: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(J_\tau)$ gegen J_τ für verschiedene $\tau = 7,1\,\mathrm{s}(\circ)$; $13,4\,\mathrm{s}(\square)$; $19,6\,\mathrm{s}(*)$; $25,8\,\mathrm{s}(\times)$.

sich nicht um einen stochastischen Prozess und man darf für die Varianz der mittleren Leistung in diesen Größenordnungen von τ keine Normalverteilung annehmen. Die Form der Verteilungsfunktion ist noch zu stark von der Dynamik des Systems geprägt und es ist nicht zu erwarten, dass man Gl. 1.9.2 hier nachweisen kann.

Bei Variation der sechs Systemparameter erhält man keine Verbesserung der Ergebnisse. In Anlehnung an die Literatur liegt es daher nahe, das System stärker zu "chaotisieren". Dazu kann man z.B. die Treibung um einen nicht-linearen Term erweitern. Anstatt eine willkürliche zusätzliche Treibung zu benutzen, kann man auch das intrinsische Chaos der schon berechneten Punktmasse nutzen. Mit

$$F_\xi(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \xi\, m\ddot{\tilde{x}}_n(t) \tag{2.1.4}$$

koppelt man die Trajektorien $\tilde{x}_n$ zusätzlicher n Punktmassen im Duffingpotenzial an die Treibung einer einzelnen. Hierbei ist ξ der Kopplungsparameter. Damit kann man die modifizierte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = F(x,t) + F_\xi(t) \tag{2.1.5}$$

aufstellen. Es wird gefordert, dass

$$\tilde{x}_n(t) = x_{\xi=0}(t - \phi_n) \tag{2.1.6}$$

als Lösung von Gl. 2.1.5 im Spezialfall $\xi = 0$ gilt, also die Lösung von Gl. 2.1.3 ist. Die Phase $\phi_n = nP$ sorgt dafür, dass eine Korrelation zwischen x und $\tilde{x}_n(t)$ ausgeschlossen wird. Im Folgenden wird $P = 10^6\,\mathrm{s}$ benutzt. Die Eleganz dieser Umsetzung liegt darin, dass das System seine eigene chaotische Treibung bereitstellt. Man kann Gl. 2.1.5 auch als Verzögerungsgleichung auffassen.

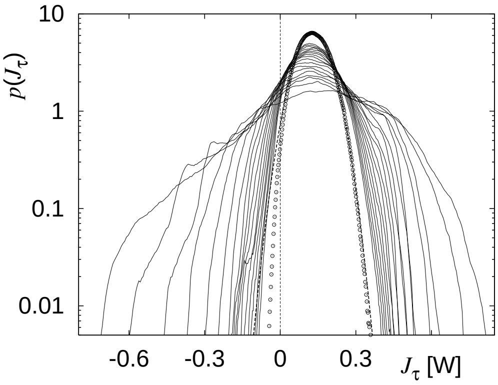

Abbildung 2.1.3: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(J_\tau)$ gegen J_τ für verschiedene τ. Der Bereich $\tau = 1,2\,\mathrm{s}$ bis $21,2\,\mathrm{s}$ ist als Kurvenschar eingezeichnet; $\tau = 35,3\,\mathrm{s}$ ($\circ$) ist an eine Gaußkurve gefittet (gestrichelt).

2.1.2 Nachweis des Fluktuationstheorems

Schon für $N = 1$, also bei nur einer zusätzlichen Treibung, verändert sich die Varianz der mittleren Leistung des Systems grundlegend. Abb. 2.1.3 zeigt dies für $\xi = 1$ anhand der Verteilung von J_τ. Auch wenn für kleinere τ noch eine das System charakterisierende Kurvenform mit Peaks vorliegt, nähert sie sich für größere τ schon einer leicht verzerrten Normalverteilung deutlich an, und behält dabei einen signifikanten Anteil für $J_\tau < 0$. Wie man in Abb. 2.1.4 (links) erkennen kann, verbessert eine größere Zahl von Treibungstermen die Kurvenform nicht sonderlich. Setzt man ξ auf einen niedrigeren Kopplungswert, so kann man das Ausbilden von Peaks in den Verteilungsfunktionen beobachten (s. 2.1.4, rechts). Jedoch werden erst im Limes $\xi \to 0$ die Kurven mit denen aus Abb. 2.1.2 identisch.

Man kann nun aus den Verteilungen das Verhältnis $\frac{p(J_\tau)}{p(-J_\tau)}$ bestimmen. Entsprechend der Vorhersage des Fluktuationstheorems, erhält man Geraden bei logarithmisch skalierter Ordinate. Dies ist exemplarisch für $N = 1$ und $\xi = 1$ in Abb. 2.1.5 a)

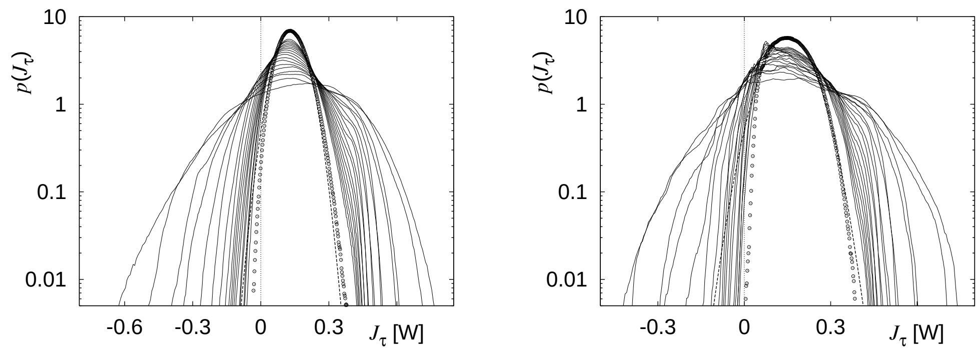

Abbildung 2.1.4: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(J_\tau)$ gegen J_τ für $N = 2$ und $\xi = 1$ (links) und für $N = 1$ und $\xi = 0,5$ (rechts). τ entspricht den Werten in Abb. 2.1.3.

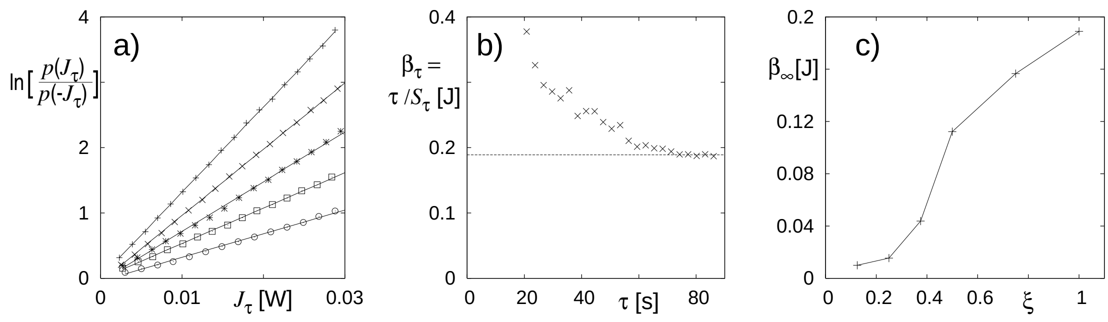

Abbildung 2.1.5: Auswertung der Verteilungen von J_τ. a) $\ln[p(J_\tau)/p(-J_\tau)]$ gegen J_τ für $N = 1$ und $\xi = 1$. b) Lineare Regressionen der Punkte aus a) liefern die Steigungen S_τ. Dargestellt: $\beta_\tau = \tau/S_\tau$ gegen τ. c) Wert der Sättigungswerte β_∞ bei Variation des Kopplungsparameters ξ der chaotischen Treibung ($N = 1$).

dargestellt. Nun bestimmt man mittels linearer Regression die Steigung S_τ dieser Geraden. S_τ ist mit der Normierungskonstanten β_τ aus Gl. 1.9.2 über $\beta_\tau = \tau/S_\tau$ verknüpft und man kann β_τ gegen τ auftragen. Man erkennt, dass sich der Wert β_τ für wachsende τ gegen einen Grenzwert β_∞ sättigt (s. Abb. 2.1.5 b)). Abb. 2.1.5 c) zeigt den Wert von β_∞ bei Variation von ξ. Bei Werten von $\xi < 0,1$ ist der Einfluss der zusätzlichen Treibung so gering, dass wieder die Situation aus Abb. 2.1.2 vorliegt und eine weitere Auswertung nicht angemessen ist.

Das Duffingpotenzial ist nur ein mathematisches Modellsystem. Eine experimentelle Umsetzung ist zwar vorgeschlagen worden [56], wäre aber nur schwierig exakt zu realisieren. Besonders die Kopplung, die hier durchgeführt wurde, wäre schwer zu realisieren. Daher wurde ein weiteres, fast ebenso simples, System mit intrinsischem Chaos experimentell konzipiert und auch simuliert. Dieses wird in den folgenden Abschnitten vorgestellt und untersucht.

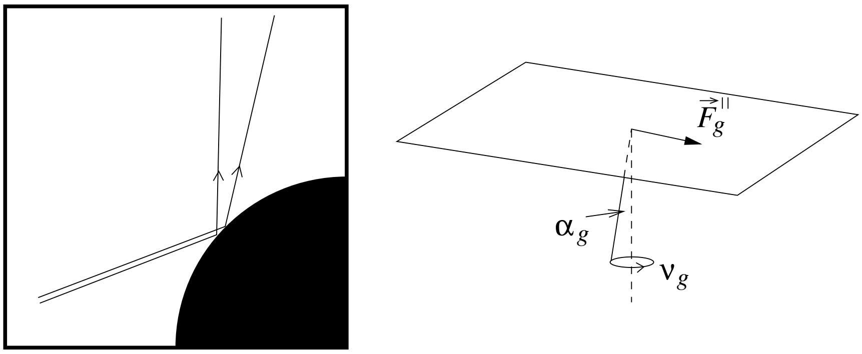

Abbildung 2.2.1: Links: Einfaches Sinai-Billard. Die eingezeichneten Wände sind elastisch und es gilt Impulserhaltung. Benachbarte Trajektorien trennen sich. Rechts: *Gyratory Mixer*. Die Senkrechte auf die Ebene hat den Winkel α_g zur Vertikalen. Während diese Achse (und somit die Richtung der effektiven Gravitation $\vec{F}_g^{||}$) mit Frequenz ν_g kreist, werden Körper auf der Ebene angehoben und abgesenkt. Diese Treibung hält eine dissipative Punktmasse im Sinai-Billard in Bewegung.

2.2 Das getriebene, dissipative Sinai-Billard

Ein einfaches Hamiltonsystem, das chaotische Trajektorien produziert ist das sog. Sinai-Billard. In Abb. 2.2.1 (links) ist sein Aufbau angedeutet. Bewegt sich eine Punktmasse unter elastischen Stößen, so divergieren Trajektorien nach jeder Kollision mit dem viertelkreisförmigen Wandstück. Dies führt schon nach wenigen Kollisionen zu merklicher Trennung einer beliebig wenig gestörten Trajektorie von der ungestörten. Diese Eigenschaft des intrinsischen Chaos der Sinai-Billard-Geometrie soll als experimentelles – und daher dissipatives – System umgesetzt werden. So wird eine möglichst einfache, chaotische Anordnung generiert, an der das im vorigen Abschnitt besprochene Fluktuationstheorem nachgewiesen werden könnte.

2.2.1 Experimenteller Aufbau

Ein Teilchen in einem Sinai-Billard kommt aufgrund von Dissipation schnell zur Ruhe. Möchte man eine dauerhafte Bewegung ermöglichen, muss man dem System Energie zuführen. Mit einem Gyratory Mixer[2] kann man dies erreichen. Abb. 2.2.1 (rechts) veranschaulicht seine Funktionsweise. Auf einer Achse, die leicht (Winkel

[2]Gyratory Mixer GM 1, *Ratek Instruments*, Australia. Mit diesem Gerät werden in der Biologie Zellen in wässriger Umgebung schonend durchmischt.

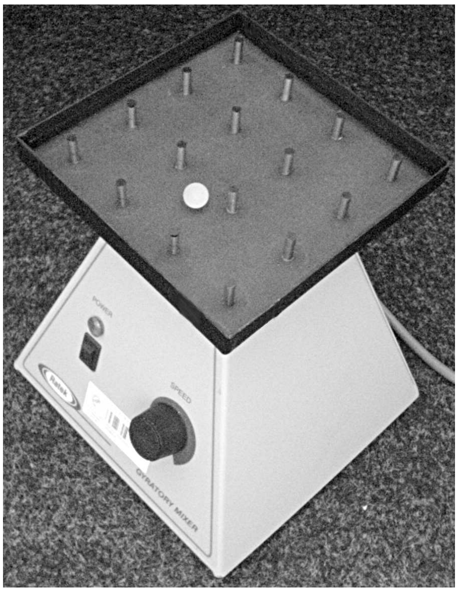

Abbildung 2.2.2: Experimenteller Aufbau mit einer Glaskugel ($R_K = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$; $m = 2,21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$) in einer Kiste mit 4×4 Stahlzylindern als Pins ($R_P = 2,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$; $L_P = 15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) in äquidistantem Abstand $d = 37,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Der Abstand zwischen Rand der Kiste und äußerster Reihe Pins beträgt $d/2$. Die Ebene hier ist mit dem Winkel $\alpha_g = 5°$ gegen die Horizontale geneigt und präzediert mit der Frequenz $\nu_g = 0,6\,\mathrm{Hz}$.

α_g) gegen die Vertikale geneigt ist, ist im rechten Winkel eine Ebene befestigt. Diese Achse präzediert um die Vertikale, sodass sich ein Punkt in der Ebene in z-Richtung ständig auf- und abbewegt, in x-y-Richtung hingegen so gut wie raumfest bleibt. Die Komponente der Gravitation parallel zur Ebene rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $2\pi\nu_g$ um das Zentrum der Ebene in ihrem Ruhesystem.

Stöße mit den geraden Kanten sind im Hamiltonsystem äquivalent zu periodischen Randbedingungen. Da die geraden Kanten keinen direkten Beitrag zur Chaotizität des Systems liefern, jedoch auch zu dissipativen Stößen führen, sollten Stöße mit ihnen vermieden werden. Daher wird das Sinai-Billard auf ein äquidistantes $n \times n$ Gitter erweitert. Dazu werden "Pins" in einer Kiste angebracht und diese auf dem *Gyratory Mixer* befestigt. Jeder Pin im Gitter entspricht dem schwarzen Kreis, der geviertelt in Abb. 2.2.1 (links) dargestellt ist. Ein Foto des fertigen Versuchsaufbaus wird in Abb. 2.2.2 dargestellt.

2.2.2 Videoerfassung des Experiments

Auch dieses Experiment wird, wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, senkrecht von oben per Videokamera[3] aufgenommen. Beleuchtet wird es mit einer ringförmigen Leuchtstoffröhre[4]. Diese wird von einem Vorschaltgerät[5] hochfrequent versorgt. Dadurch

[3] *Basler* A602f-2
[4] *Osram* Ring-Leuchtstoffröhre T5; 40 W
[5] *Osram* Vorschaltgerät Quicktronic Professional QTP 1x36; Betriebsfrequenz ca. $50 \cdot 10^3$ Hz.

werden Helligkeitsschwankungen (z.B. durch Schwebung) bei der Aufnahme vermieden. Zur Bestimmung der Neigungsrichtung der Ebene sind außerhalb der Ecken der Kiste vier weiße Punkte angebracht, deren Durchmesser kleiner ist als der Kugeldurchmesser. Zur Bestimmung der Kugel- und Eckpunktpositionen wurde der Schwerpunkt der zusammenhängenden weißen Bildpunkte berechnet (vgl. Abschnitt 1.2). Da Kugel und Markierungspunkte nie Kontakt haben, kann auf Erosion verzichtet werden (vgl. Abschnitt 1.3.2). Mit Hilfe der deutlich unterschiedlichen Anzahl der Bildpunkte kann man die Kugel von den Markierungspunkten unterscheiden und alle fünf Koordinatenpaare aufnehmen. Da auf komplexe Bildbearbeitungsalgorithmen verzichtet werden kann, läuft dies in Echtzeit und die Videodaten können verworfen werden.

2.2.3 Auswertung der Objektkoordinaten

Jeder der vier Markierungspunkte an den Ecken bewegt sich aus Sicht der Kamera auf einer ellipsenähnlichen Bahn. Das Zentrum jeder dieser Bahnen wird durch zeitliche Mittelung über die gesamte Aufnahme errechnet. Die aktuelle Richtung der Neigung zu jedem Zeitpunkt ergibt sich dann als Differenz des jeweiligen Bahnpunktes und des dazugehörigen Zentrums. Das exakte Zentrum der Kiste ergibt sich wiederum aus dem Mittelpunkt der vier Bahnzentren.

Die Kamera nimmt nur eine Projektion der geneigten Kiste auf. Mithilfe des aktuellen Neigungsvektors und des Kistenmittelpunktes werden die Kamerakoordinaten der Kugel in das Bezugssystem der Kiste transformiert. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, wie sich in diesem Bezugssystem eine einfache Bewegungsgleichung formulieren lässt, die numerisch integrieren wird.

2.3 Simulation des getriebenen Sinai-Billards

Um die Modellierung des Experimentes so einfach wie möglich zu gestalten, wird eine *Hard-sphere* Simulation ohne Rotation und Reibung in zwei Translationsdimensionen durchgeführt. Das Vernachlässigen der Reibung ist gerechtfertigt, da die Kugel im Experiment rollt und Rollreibung nur geringfügig zur Dissipation beiträgt.

Für den hier üblichen Neigungswinkel von 5° kann man den Schlupf der Kugel vernachlässigen und ein perfektes Abrollen annehmen. Ein leichter Fehler entsteht, wenn die Rotationsenergie der Kugel ignoriert wird. Mit der Annahme, dass die Kugel perfekt abrollt, kann man die Rotationsenergie der Kugel $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$, mit $I = \frac{2}{5} m R_K^2$ zu $E_{rot} = \frac{1}{5} m v^2$ bestimmen. Im Vergleich mit einem reibungsfrei gleitenden Teilchen ist die Gesamtenergie der Bewegung also $E_{ges} = E_{kin} + E_{rot} = \frac{1}{2}(\frac{7}{5} m) v^2$. Daher wird in der Simulation die effektive Masse $m_{eff} = \frac{7}{5} m$ als Masse des Teilchens verwendet.

2.3.1 Die Bewegungsgleichung

Im Bezugssystem der Kiste wird

$$m_{eff} \ddot{\vec{x}} = m\, g\, \sin(\alpha) \begin{pmatrix} \sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} , \qquad (2.3.1)$$

mit $\hat{x}$ und $\hat{y}$ als Einheitsvektoren und dem zeitabhängigen Neigungswinkel $\phi(t) = 2\pi f t + \phi_0$ mit einem *time-stepped Verlet*-Algorithmus integriert. Als Integrationszeitschritt wurde $\delta t = 10^{-3}$ s gewählt. Verkleinerung von δt verändert die Ergebnisse nicht merklich.

2.3.2 Die Randbedingungen

Das Teilchen kann mit den Pins und mit der Wand interagieren. Das Experiment ist so konzipiert, dass nur jeweils eine Kollision während der Zeit δt stattfinden kann. Das Betrachten der Kugel als *Hard-sphere* bedeutet, dass eine Kollision als instantan angenommen wird und deshalb nicht als Kraftterm in der Bewegungsgleichung auftaucht. Wird geometrisch eine Kollision mit den Randbedingungen entdeckt, so wird zunächst durch Interpolation der Auftreffpunkt ermittelt. Hier wird die Geschwindigkeit des Teilchens in normale und tangentiale Komponente zu der Randbedingung zerlegt. Die tangetiale Geschwindigkeit bleibt unverändert, die normale wird gespiegelt und mit dem jeweiligen Restitutionskoeffizienten (ϵ_w für die Wand, ϵ_p für die Pins) multipliziert. Hierbei entspricht $\epsilon = 1$ einem elastischen Stoß, während $\epsilon = 0$ den inelastischen Fall darstellt. Der Vorgang der Kollision wird in Abb. 2.3.1 illustriert.

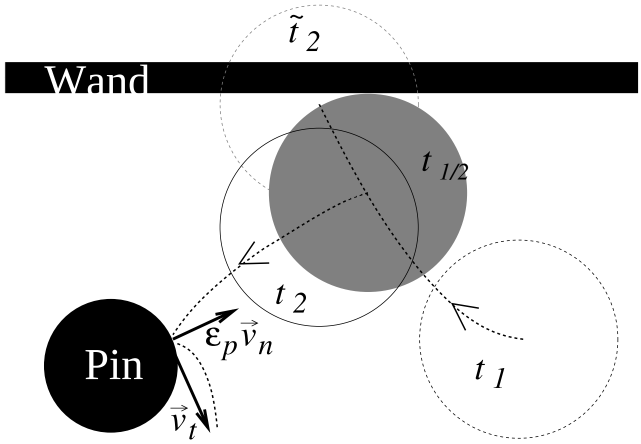

Abbildung 2.3.1: Kollisionsschema der Simulation. Die Kugel zum Zeitpunkt t_1 wird durch Integration mit festem δt auf Position $\vec{x}(\tilde{t}_2)$ gesetzt. Der Überlapp mit der Wand wird detektiert und durch Interpolation zwischen $\vec{x}(t_1)$ und $\vec{x}(\tilde{t}_2)$ wird Position $\vec{x}(t_{1/2})$ berechnet. Hier wird die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand gespiegelt und mit ϵ_w multipliziert. Die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit bleibt unverändert. Über den tangentialen Abstand zwischen $\vec{x}(\tilde{t}_2)$ und $\vec{x}(t_{1/2})$ lässt sich berechnen, wie weit in Normalenrichtung korrigiert werden muss, um die Kugel auf Position $\vec{x}(t_2)$ zu bringen. An dem Pin sind normale und tangetiale Geschwindigkeit für die nächste Kollision eingezeichnet.

2.4 Ergebnisse von Experiment und Simulation

Abb. 2.4.1 zeigt die Ergebnisse für eine Messung von $T = 12\,\mathrm{h}$ Dauer. Dies entspricht $1,2 \cdot 10^7$ ausgewerteten Bildern. Aus der Kugelgeschwindigkeit und dem Neigungs-

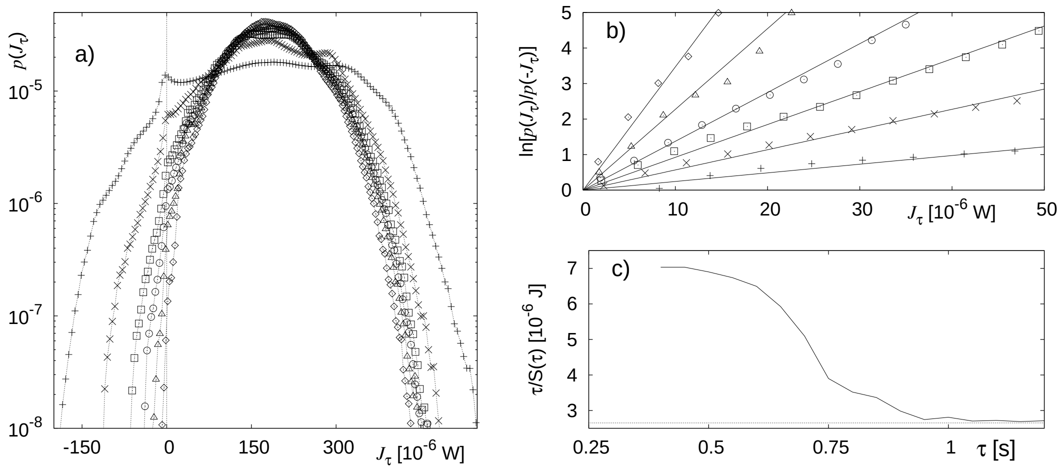

Abbildung 2.4.1: Ergebnisse des Experiments für $\tau = 0,1\,\mathrm{s}$ ($+$), $0,4\,\mathrm{s}$ ($\times$), $0,6\,\mathrm{s}$ ($\square$), $0,7\,\mathrm{s}$ ($\circ$), $0,8\,\mathrm{s}$ ($\triangle$) und $1,0\,\mathrm{s}$ ($\diamond$). a) Wahrscheinlichkeitsdichte $p(J_\tau)$. b) Verhältnis $\ln[p(J_\tau)/p(-J_\tau)]$ der Werte aus a) gegen J_τ dargestellt. c) gefittete Steigungen S_τ aus b) dargestellt als $\beta_\tau = \tau/S_\tau$ gegen τ.

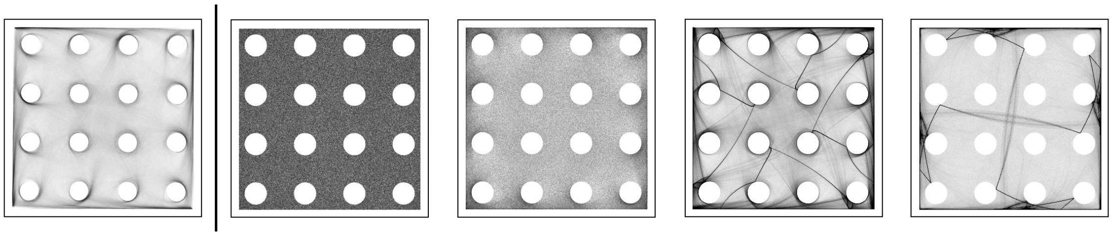

Abbildung 2.4.2: Darstellung der räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugel. Für jedes Bild bedeutet schwarz den am häufigsten besuchten Punkt, weiße Punkte werden nicht erreicht. Der Rand der Kiste ist durch ein schwarzes Quadrat markiert. Die weißen Kreise im Inneren haben den Radius $R_K + R_P$ und markieren die Position der Pins. Links: Experiment. Rechts: von links nach rechts: $e_p = e_w = 0,7$ (Abb. 2.4.4 b)); $e_p = e_w = 0,5$ (Abb. 2.4.4 a)); $e_p = e_w = 0,15$ (Abb. 2.4.7 a)); $e_w = 0,1$, $e_p = 1$ (Abb. 2.4.7 b)).

vektor jedes Bildes kann man mit Gl. 1.9.3 die von der Kugel aufgenommene bzw. abgegebene Leistung berechnen. Ausgewertet wurden diese Daten wie in Abschnitt 2.1. Man erkennt qualitativ sehr ähnliche Ergebnisse: für verschiedene τ lassen sich Geraden im $p(J_\tau)/p(-J_\tau)$-Diagramm fitten und man erhält die Steigungen S_τ. Trägt man den Normierungsparameter $\beta_\tau = \tau/S_\tau$ gegen τ auf, so erkennt man die Sättigung von $\beta_\tau \to \beta_\infty$.

Damit das Experiment sinnvolle Ergebnisse liefert, darf die mittlere Leistung, die auf die Kugel übertragen werden muss, nicht so groß sein, dass keine verwertbaren $p(-J_\tau)$ verbleiben. Das bedeutet, dass dissipative Stöße vermieden werden sollten. Andererseits sind die Richtungsänderungen durch Stöße erst dafür verantwortlich, dass die Kugel Energie gegen die Treibung leistet. Um jeden Satz von Parametern (Masse der Kugel, Neigungswinkel und -geschwindigkeit der Ebene, Restitutionskoeffizienten) gibt es daher einen Bereich, bei dem die Konditionen geeignet sind. Offensichtlich führt die Kombination von niedriger Frequenz und großem Winkel zu einem Abrollen der Kugel am Rand und eine Kombination aus hoher Frequenz und kleinem Winkel zu keiner merklichen Bewegung. Für die in Abb. 2.4.1 gewählten Parameter ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen den Pins optimal.

Experimentell lassen sich ν_g und α_g leicht variieren. Die dargestellten Ergebnisse sind exemplarisch für $\nu_g = 0,6\,\mathrm{Hz}$ und $\alpha_g = 5°$. Bei der gewählten Kugel und Kiste gibt es um diese Werte ein breites Fenster ($\nu_g = (0,2 - 2)\,\mathrm{Hz}$ und $\alpha_g = 1° - 10°$), in dem der beobachtete Effekt auftritt.

Für die Simulation bieten sich diese Parameter als Startpunkte an, d.h. die Werte für Größe der Kugel, Neigungswinkel und Rotationsgeschwindkeit und Abmessun-

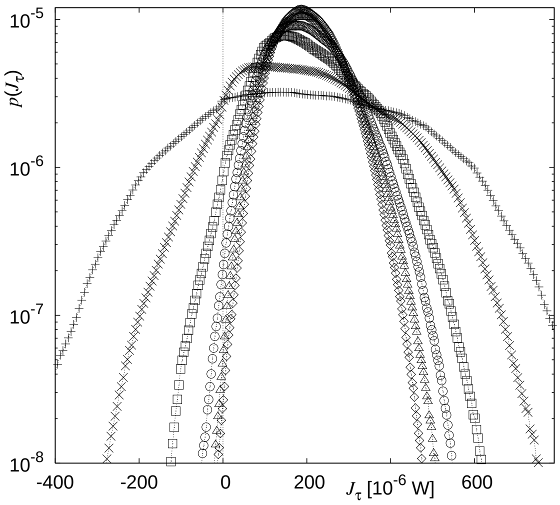

Abbildung 2.4.3: Simulation: Wahrscheinlichkeitsdichte der Leistung J_τ aus der Simulation, exemplarisch dargestellt für $e_p = e_w = 0,5$. J_τ wurde berechnet für folgende Werte von τ: $0,05\,\mathrm{s}$ ($+$); $0,2\,\mathrm{s}$ ($\times$); $0,4\,\mathrm{s}$ ($\Box$); $0,6\,\mathrm{s}$ ($\circ$); $0,8\,\mathrm{s}$ ($\triangle$) und $1,0\,\mathrm{s}$ ($\diamond$).

gen der Kiste werden vom Experiment übernommen. In der Simulation ist es ohne weiteres möglich, die Restitutionskoeffizienten zu verändern. Dies kann im Experiment nur durch Wahl anderer Materialien erreicht werden. Um einen Eindruck von dem Einfluss der Restitutionskoeffizienten zu bekommen, ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugeln in Abb. 2.4.2 dargestellt. Auch hier entsprechen die Simulationsläufe einer Dauer von 12 h. Links ist zum Vergleich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugel im Experiment gezeigt. Die beste qualitative Übereinstimmung mit der Simulation erhält man für $\epsilon_w = \epsilon_p = 0,5$ (mitte). Man erkennt homogene Verteilungen für hohe Restitutionskoeffizienten, aber auch deutliche "Spuren" erhöhter Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei niedrigen Werten von ϵ_p bzw. ϵ_w.

Die Simulationsergebnisse können ebenfalls in Hinblick auf das Fluktuationstheorem ausgewertet werden. Qualitativ ergeben sich sehr ähnliche Ergebnisse im Vergleich zum Experiment. Durch die Karikatur der Realität, die der Simulation zugrunde

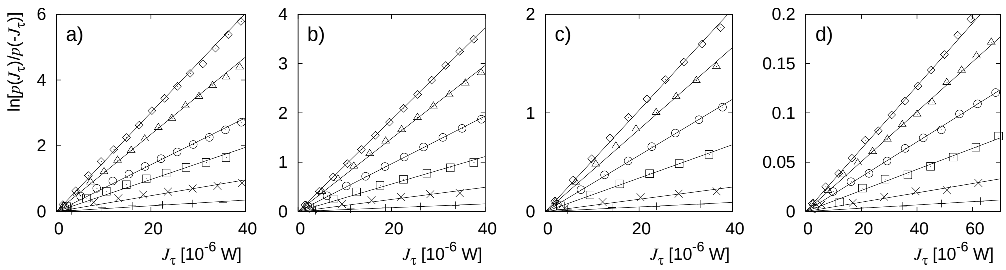

Abbildung 2.4.4: Simulation: Darstellung von $\ln[p(J_\tau)/p(-J_\tau)]$ gegen J_τ. Die verschiedenen τ sind mit denselben Symbolen wie in Abb. 2.4.3 gekennzeichnet. Es gelten für die Restitutionskoeffizienten: a) $e_p = e_w = 0,5$; b) $e_p = e_w = 0,7$; c) $e_p = 0,7$ und $e_w = 1$; d) $e_p = 1$ und $e_w = 0,975$.

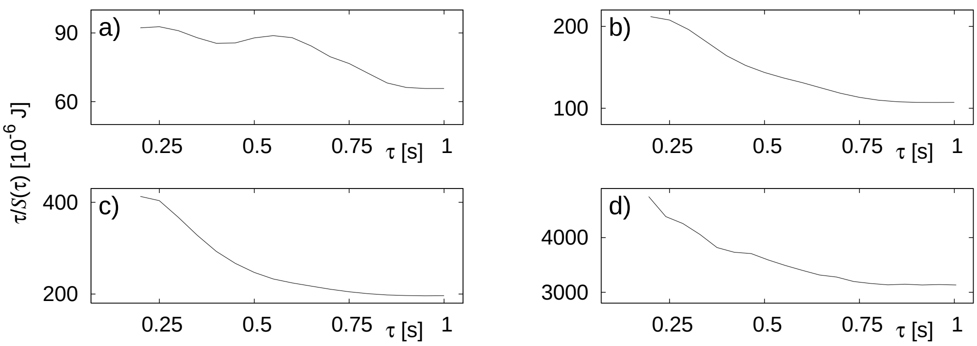

Abbildung 2.4.5: Simulation: Sättigung der gefitteten Steigungen aus Abb. 2.4.4. Parameter korrespondieren mit den Angaben dort.

liegt, sind keine exakten quantitativen Übereinstimmungen zu erwarten. Abb. 2.4.3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichten für J_τ bei $\epsilon_p = \epsilon_w = 0,5$, die mit Abb. 2.4.1 a) am besten übereinstimmen sollten. Abb. 2.4.4 zeigt die Verhältnisse $p(J_\tau)/p(-J_\tau)$ und ihre gefitteten Steigungen für typische Kombinationen von ϵ_p und ϵ_w. Auch hier erkennt man deutlich, dass für einen weiten Parameterbereich das Fluktuationstheorem anwendbar ist und sich die Normierungskonstante β_τ für große τ sättigt (s. Abb. 2.4.5). Halbiert man die Auswertungsdauer der Simulation, so erhält man, abgesehen von einem größeren statistischen Fehler, dieselben Ergebnisse.

Man könnte erwarten, dass für $\epsilon_w = 1$ die elastischen Wände periodische Randbedingungen darstellen und die Systemgröße (hier 4×4) irrelevant wird, wie es beim ursprünglichen Sinai-Billard der Fall ist. Allerdings sorgt die Richtung der Gravi-

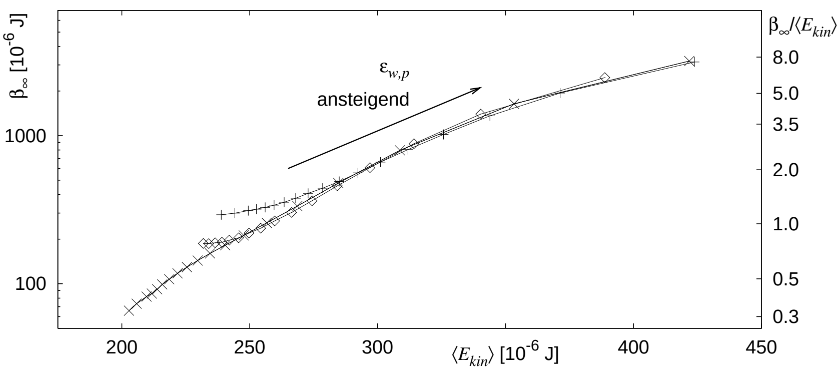

Abbildung 2.4.6: Simulation: Korrelation zwischen der mittleren kinetischen Energie $\langle E_{kin}\rangle$ der Kugel und dem Sättigungswert β_∞. $\epsilon_{p,w}$ wurden von links nach rechts aufsteigend variiert: $e_p = e_w \in [0,5; 0,975]$ ($\times$); $e_w = 1$ und $e_p \in [0,5; 0,95]$ ($\diamond$); $e_p = 1$ und $e_w \in [0,5; 0,95]$ ($+$). $\beta_\infty/\langle E_{kin}\rangle$ für $e_p = e_w$ ($\times$) wird als rechte Ordinate gesetzt.

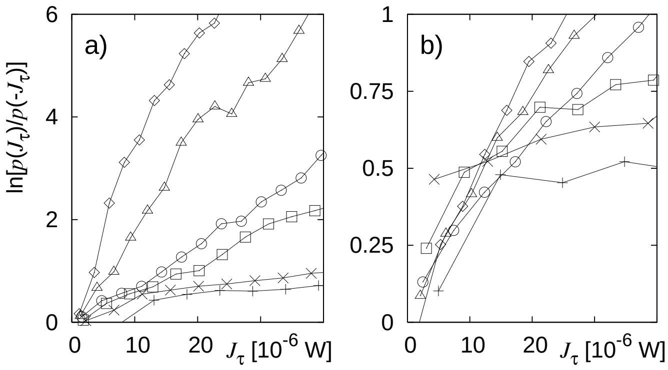

Abbildung 2.4.7: Die Gültigkeit des Fluktuationstheorems bricht zusammen, ein linearer Fit der Daten ist nicht gerechtfertigt. Die verschiedenen τ sind mit den selben Symbolen wie in Abb. 2.4.3 gekennzeichnet. a) $e_p = e_w = 0,15$; b) $e_w = 0,1$ und $e_p = 1$.

tation dafür, dass die Wände als Begrenzungen sehr wohl eine Rolle spielen. Die Analogie zum Sinai-Billard ist also nur oberflächlich. Simulationen auf einem größeren (z.B. 10×10) Feld liefern jedoch ebenfalls qualitativ vergleichbare Ergebnisse.

Für $\epsilon_p = \epsilon_w = 1$ sind die Stöße im System elastisch und eine Treibung überflüssig. Man kann also erwarten, dass die Energie im System steigt, wenn man $\epsilon_{p,w}$ erhöht. Daher ist es interessant, sich die Entwicklung der mittleren kinetischen Energie $\langle E_{kin} \rangle$ der Kugel bei Variation von $\epsilon_{w,p}$ zu betrachten. Es stellt sich eine deutliche Korrelation zwischen dem Sättigungswert β_∞ des Normierungsparametes und $\langle E_{kin} \rangle$ heraus, die in Abb. 2.4.6 dargestellt ist. Im Gegensatz zu Feitosa und Menon [55], die ein konstantes Verhältnis $\beta_\tau / \langle E_{kin} \rangle \approx 5$ für ein granulares Medium zeigen konnten, variiert das Verhältnis hier zwischen 0,3 und 7,6.

Niedrige Restitutionskoeffizienten sollten der Situation im Experiment entsprechen, dass Neigungswinkel und Rotationsgeschwindigkeit nicht optimal passend zur Masse der Kugel gewählt sind. Tatsächlich bricht hier das Fluktuationstheorem zusammen, wie Abb. 2.4.7 belegt.

Die beiden rechten in Abb. 2.4.2 dargestellten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten entsprechen gerade Abb. 2.4.7. Eine räumlich nahezu homogene Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kugel ist für die Validität des Fluktuationstheorems notwendig, die Anwesenheit von häufig besuchten “Wegen” zerstört die Chaotizität des Systems und somit das Fluktuationstheorem.

Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde ein demokratisch getriebenes, magnetisches, granulares Medium vorgestellt. Dieses Medium ist durch eine große Vielseitigkeit gekennzeichnet. Dies äußert sich in einer Vielzahl von interessanten Phänomenen, aber auch in einer großen Menge von Parametern. Dadurch wird die exakte quantitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation verhindert. Der Einfluss von Amplitude und Frequenz der Treibung als wichtigste Parameter auf exemplarische Dipolkugeln wies verschiedene dynamische Regime, u.a. Intermittenz, auf. Hierbei handelt es sich um *two-state on-off intermittency* (vergleichbar mit [57]). Dies stellt den ersten experimentellen Nachweis von Intermittenz in einem granularen Medium dar.

Die Geschwindigkeitsverteilungen des Gasmodus dieses Mediums wurden sowohl experimentell als auch in der Simulation untersucht. Sie zeigten für die Translationsfreiheitsgrade und die Rotationsgeschwindigkeiten in der x-y-Ebene durchstimmbare Verteilungsformen je nach Anregung. Bei bestimmten Parametern verhielt sich das Dipolgas wie ein ideales Gas und wies eine Maxwellverteilung auf. Ebenso konnten Laplace-ähnliche Verteilungen nachgewiesen werden. Für den z-Rotationsfreiheitsgrad stellte sich eine andere Situation dar. Hier herrscht über einen weiten Parameterbereich die Maxwellverteilung vor. Dies korrespondiert mit den Ergebnissen von Cafiero et al. [22], die für die Simulation eines im Rotationsfreiheitsgrad getriebenen Gases ebenfalls die Maxwellverteilung erhielten. In dem hier vorgestellten magnetischen Medium erfolgt in z-Richtung der Rotation keine direkte Anregung. Stochastische Stöße mit anderen Dipolkugeln und Dipol-Dipol-Wechselwirkungen sind der Grund für einen Drehimpuls in z-Richtung, womit dieses System vergleichbar mit dem Aufbau von Cafiero et al. wird.

Untersuchungen der Energiebilanz diese Gases warfen die Frage auf, ob das granulare Medium den Nachweis des Fluktuationstheorems [47] erlaubt. Experimentell war dies nicht möglich. Daher wurde die Untersuchung der Verallgemeinerung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik an einem mathematischen Modellsystem (dem Duffing-Potenzial) und einem minimalistischen Experiment inklusive Simulation (dem getriebenen, dissipativen Sinai-Billard) durchgeführt. Beide Systeme stellten sich als gute Beispiele für die Gültigkeit des Fluktuationstheorems heraus. Während bisher nur an hoch-komplexen Vielteilchensystemen oder aufwendigen stochastischen Systemen gearbeitet wurde, kommt das Duffing-Potenzial mit einer gekoppelten, chaotischen Treibung aus, die es selbst zur Verfügung stellt. Das getriebene Sinai-Billard ist meines Wissens nach die einfachste je gebaute Anordnung hierzu. Es kommt ganz ohne stochastischen Prozess aus und begnügt sich mit dem ihm innewohnenden unvorhersagbaren Verhalten.

Es konnte gezeigt werden, dass für die Gültigkeit des Fluktuationstheorems die Kurvenform nicht auf eine Gaußverteilung beschränkt ist. Weiterhin konnte eine monotone Abhängigkeit des Normierungsparameters β_τ von der mittleren kinetischen Energie der Kugel gezeigt werden, wie es auch schon von Feitosa und Menon [55] gefunden wurde.

Zwar stimmen Experiment und Simulation in dieser Arbeit quantitativ nicht überein, aber die qualitativen Vergleiche sind aufschlussreich und liefern einen tieferen Einblick in die Dynamik der vorgestellten Systeme, vor allem bei Variation der Parameter, deren Änderung experimentell sonst schlecht möglich sind (z.B. Gleitreibungskoeffizient oder Restitutionskoeffizient).

Anhang A – Darstellung von Rotationen und Orientierung mit Quaternionen

Die Quaternionen[1] sind eine Erweiterung der reellen Zahlen, ähnlich den komplexen Zahlen. Sie erlauben in vielen Fällen eine rechnerisch elegante Beschreibung des dreidimensionalen Raumes, insbesondere im Kontext von Drehungen.

A.1 Aufbau und Rechenvorschriften

Die vier skalaren Komponenten einer Quaternion

$$q = q_0 + q_1\, i + q_2\, j + q_3\, k = (q_0, \vec{q}) \tag{A.1.1}$$

folgen besonderen Rechenregeln. Analog der imaginären Einheit i gilt hier für die "Einheitsvektoren":

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{A.1.2}$$

und ähnlich wie für das Kreuzprodukt von Einheitsvektoren in 3D:

$$\begin{aligned} i \cdot j = k = -(j \cdot i), \\ j \cdot k = i = -(k \cdot j), \\ k \cdot i = j = -(i \cdot k) \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

Daraus folgt für das Skalarprodukt zweier Quaternionen:

$$qp = q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 = q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p} \tag{A.1.4}$$

und für ihr Quaternionen-Produkt:

$$\begin{aligned} q \cdot p = \;& (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) \\ + \;& (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)i \\ + \;& (q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1)j \\ + \;& (q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0)k \\ = \;& (qp,\; q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p}). \end{aligned} \tag{A.1.5}$$

[1] von lat. *quaternio* "Vierheit"

Die Konjugierte einer Quaternion ist definiert als

$$q^* = q_0 - q_1\, i - q_2\, j - q_3\, k = (q_0, -\vec{q}). \tag{A.1.6}$$

Mit ihrer Hilfe kann man den Betrag einer Quaternion bestimmen (wieder analog zu den komplexen Zahlen):

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{A.1.7}$$

und somit auch das Inverse zur Multiplikation:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|} \Rightarrow qq^{-1} = 1, \tag{A.1.8}$$

wobei Multiplikation und Division einer Quaternion mit einem Skalar komponentenweise definiert ist:

$$a\, q = aq_0 + a\vec{q}. \tag{A.1.9}$$

Einheitsquaternionen sind somit definiert über $|u| = 1$ und es gilt $u^* = u^{-1}$. Man kann sie auch einfach darstellen als:

$$u = \cos(\theta) + \sin(\theta)(u_1 i + u_2 j + u_3 k) = (\cos(\theta), \sin(\theta)\, \hat{u}), \tag{A.1.10}$$

wobei $\hat{u}$ einen Einheitsvektor in 3D darstellt. Als echte Quaternionen bezeichnet man solche Einheitsquaternionen, deren erste Komponente Null ist (also $\theta = \pi/2$). Sie besitzen folglich nur einen vektoriellen Anteil, der wiederum ein 3D-Einheitsvektor ist.

Betrachtet man eine echte Quaternion v als eine Orientierung im 3D-Raum, d.h. die Richtung eines beliebigen 3D-Vektors, so kann man leicht zeigen, dass folgende Notation:

$$R(v) = u \cdot v \cdot u^* \tag{A.1.11}$$

für eine beliebige Einheitsquaternion u wieder eine echte Quaternion (also eine Orientierung) ist, dessen Richtung im 3D-Raum einer Drehung von v um einen Winkel 2θ in Bezug auf die Drehachse $\hat{u}$ entspricht. Verkettet man mehrere Einheitsquaternion u_n mit dem Quaternionenprodukt, so entspricht dies einer Nacheinanderausführungen von n Rotationen um die jeweiligen Drehachsen und -winkel.

A.2 Anwendung auf Rotationsdifferentialgleichungen

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ lässt sich sehr leicht in eine Rotationsquaternion für eine infinitesimale Rotation während eines Zeitschrittes δt überführen:

$$u_{\delta t} = \left(\cos\left(\frac{\omega\,\delta t}{2}\right), \sin\left(\frac{\omega\,\delta t}{2}\right)\,\hat{\omega}\right),\ \omega = |\vec{\omega}|,\ \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \tag{A.2.1}$$

und die Gesamtdrehung eines Objektes ist entsprechend $u_{t+\delta t} = u_{\delta t} \cdot u_t$.

Eine echte Quaternion alleine reicht nur zur Beschreibung der Orientierung eines Objektes aus, wenn dieses rotationssymmetrisch ist. Für nicht-rotationssymmetrische Objekte muss man die Ausgangsorientierung über zwei unabhängige Quaternione definieren. Bei den hier vorliegenden Dipol-Kugeln ist dies unnötig und es reicht aus, die zeitliche Entwicklung einer echten Quaternion für die Nord-Süd-Orientierung des eingebetteten Dipols zu betrachten. Wählt man o.B.d.A. als Orientierung zum Zeitpunkt $t = 0$ die echte Quaternion $v_0 = (0, 0, 0, 1)$, so vereinfacht sich die Berechnung der Orientierung $v_t = R_t(v_0) = u_t \cdot v_0 \cdot u_t^*$ zum Zeitpunkt t zu:

$$v_t = \big(0,\ 2(u_1 u_3 + u_0 u_2),\ 2(u_2 u_3 - u_0 u_1),\ 1 - 2(u_1^2 + u_2^2)\big)\,. \tag{A.2.2}$$

Auf diese Weise kann man für die Kraft- und Drehmomentbestimmung die Orientierung v_t des Dipols aus dem zeitabhängigen Rotationsquaternion u_t berechnen und u_t durch Integration aktualisieren.

Anhang B – Bestimmung von Translations- und Rotationsgeschwindigkeit

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten ist es notwendig, die Kugeln (bzw. Markierungspunkte) aus zwei aufeinanderfolgenden Bilder so einander zuzuordnen, dass jede Kugel aus dem ersten Bild einen Nachfolger im zweiten Bild besitzt. Diese auf den ersten Blick triviale und für das menschliche Auge einfache Aufgabe ist technisch mit erheblichen Schwierigkeiten versehen, die nur mit beträchtlichem Aufwand und z.T. neuer Hard- und Software gelöst werden können. Die folgenden Algorithmen wurden vollständig selbst entwickelt.

B.1 Translationsgeschwindigkeit

Zunächst wird für alle k Kugeln aus Bild n das Abstandsquadrat zu allen Kugeln im nachfolgenden Bild $n+1$ bestimmt. Man erhält eine $k \times k$-Matrix aller Abstände $(\vec{x}_{n,i} - \vec{x}_{n+1,j})^2$. Für jede Spalte i wird das Minimum bestimmt und die zugehörige Zeile j so vertauscht, dass sie an i-ter Stelle steht, sofern gilt $j \geq i$ (d.h. diese Zeile enthält nicht das Spaltenminimum einer vorhergehenden Spalte). Dies lässt sich im Allgemeinen immer durchführen, wenn die zwischen zwei Bildern bei maximal auftretender Geschwindigkeit zurückgelegte Strecke dx klein ist gegen den Radius der Kugeln (hohe Bildwiederholraten bei kleinen Geschwindigkeiten der Kugeln). Es führt zu vernachlässigbar wenigen Mehrdeutigkeiten der Zuordnung, wenn dx klein gegenüber der mittleren freien Weglänge zwischen Kollisionen ist.

Gilt jedoch $j < i$ für irgendeine Spalte der Abstandsmatrix, so ist eine Zuordnung nicht auf Anhieb eindeutig möglich. Abb. B.1.1 zeigt ein solches einfaches Beispiel, das durchaus typisch für die in Kapitel 1 vorgestellten Experimente ist. Für die Zuordnung wurden verschiedenste Ansätze getestet. Der zweifellos rechenaufwendigste war die Simulation des Systems wie in Abschnitt 1.5 beschrieben, mit den Positionen und Geschwindigkeiten der Kugeln des vorhergehenden Bildes als Startwerte. Die erreichte Stabilität der Lösung rechtfertigte allerdings nicht den immensen Aufwand.

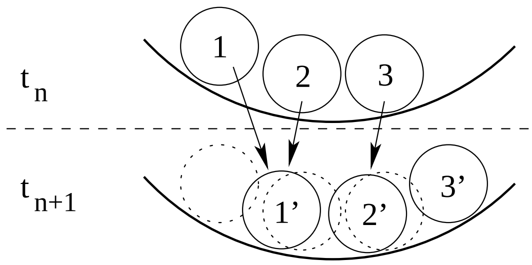

Abbildung B.1.1: Einfaches Beispiel, bei der die Betrachtung der minimalen Abstände nicht zu einer eindeutigen Zuordnung führt sind. Kugel 1' ist für Kugel 1 und Kugel 2 nächster Nachbar.

Für jede Permutation mit $\forall z \in \{1 \ldots k\} : z \mapsto f(z)$, die jede Kugel aus Bild n genau einer Kugel aus Bild $n+1$ zuordnet, kann man die Summe S der Abstandsquadrate bilden:

$$S = \sum_{z=1}^{k} (\vec{x}_{n,z} - \vec{x}_{n+1,f(z)})^2 \propto E_{kin} \tag{B.1.1}$$

In Abb. B.1.1 ergibt sich die richtige Permutation f_{min} als diejenige, die S minimiert. Dies macht auch physikalisch Sinn, da der Quotient aus Abstandsquadrat und Zeitunterschied δt zum Quadrat gerade das Quadrat der Teilchengeschwindigkeit ergibt, wodurch S proportional zur kinetischen Gesamtenergie E_{kin} des Systems wird. Es ist also diejenige Permutation mit großer Wahrscheinlichkeit richtig, welche die niedrigste kinetische Energie erfordert, um die Kugelpositionen in Bild n in die aus Bild $n+1$ zu überführen. Durch diese Annahme besteht die Möglichkeit der falschen Zuordnung; z.B. verursachen Kollisionen mit großem Impulsaustausch, zu einem Zeitpunkt "zwischen" den Bildern statt finden, einen Fehler. Dieser Fehler kann jedoch vernachlässigt werden.

Für sehr kleine Kugelzahlen k lassen sich alle möglichen Permutationen und das dazugehörige E_{kin} noch in akzeptablem Zeitaufwand berechnen, aber da die Anzahl der Permutationen mit $k!$ ansteigt, sind auch diesem Ansatz Grenzen gesetzt. Unter der Maßgabe, dass die mittlere freie Weglänge größer ist als das maximal zurückgelegte δx, kann man durch geschickte Sortierung der obigen Matrix die Anzahl der zu berechnenden Permutationen stark einschränken. Ordnet man die obige Matrix z.B. zunächst nach Größe der Spaltenminima (Spalte mit dem größten Spaltenminimum nach links oben, etc.), so kann man sich iterativ auf immer kleiner werdende $l \times l$-Teilmatrizen rechts unten beschränken, bis eine Mehrdeutigkeit auftritt oder der zweitkleinste Abstand in der Spalte ungefähr gleich dem Spaltenminimum ist[1].

[1] Vergleiche die Situation in Abb. B.1.1. Kugel 1 hat das größte Abstandsminimum (nämlich zu Kugel

Trotzdem war im Rahmen dieser Arbeit die Zuordnung der Kugeln lange Zeit ein Problem und, zusammen mit der Aufgabe, die Rotationsgeschwindigkeit der Kugeln zu bestimmen, ausschlaggebend für die Anschaffung einer Kamera mit größerer Bildwiederholrate.

B.2 Rotationsgeschwindigkeit

Wie in Kap. 1.3.3 beschrieben, erhält man eine Liste von Markierungspunktkoordinaten pro Kugel für jeden Zeitschritt. Das Aufbringen der Markierungspunkte auf definierte Koordinaten der Kugeloberfläche ist nur ungenau möglich, da die Klebelinie der zwei Halbkugeln, die den Äquator kenntlich macht, nach dem weißgrundieren kaum noch zu erkennen bleibt. Weiterhin stellt das Positionieren eines submillimetergroßen Farbtupfers auf einer 6 mm großen Kugel eine handwerkliche Herausforderung dar. Da die Markierungspunkte zusätzlich ununterscheidbar von einander sind, lässt sich die Orientierung der Kugeln anhand der Markierungspunkte alleine nicht bestimmen. Also kann nur derjenige Rotationswinkel (aus dem sofort die Winkelgeschwindigkeit folgt) bestimmt werden, der die Lage eines Markierungspunktes zum Zeitpunkt t_n in die Lage zum Zeitpunkt t_{n+1} überführt.

Anders als bei der Zuordnung von Kugeln kann man nicht davon ausgehen, dass jeder Punkt aus Bild n genau einem Punkt in Bild $n+1$ zugeordnet werden muss. Punkte am Rand der Kugeln können verschwinden und auftauchen. Im Allgemeinen sieht man von den sechs Punkten auf jeder Kugel höchstens drei, mindestens aber jedoch einen.

Definiert man einen maximalen Suchradius von 2/3 eines Kugelradius im Bezugssystem der Kugel um die alten Markierungskoordinaten, so gelang in den vorgestellten Experimenten fast immer eine sinnvolle Zuordnung. Hierdurch legt man eine maximal detektierbare Rotationsgeschwindigkeit (etwa 300 rad/s) fest, und diese kommt auch leider in dieselbe Größenordnung, wie die tatsächlich maximal auftretende Rotationsgeschwindigkeit. Zwei Lösungswege für diese Problematik erscheinen möglich, waren jedoch nicht praktikabel:

$1'$. Eliminiert man Kugel $1'$ indem man die Zuordnung 1 zu $1'$ festlegt, so ist Kugel $2'$ mehrdeutig zugeordnet, aber Kugel 2 hat wieder eindeutig das größte Abstandsminimum und kann Kugel $2'$ zugeordnet werden, etc.

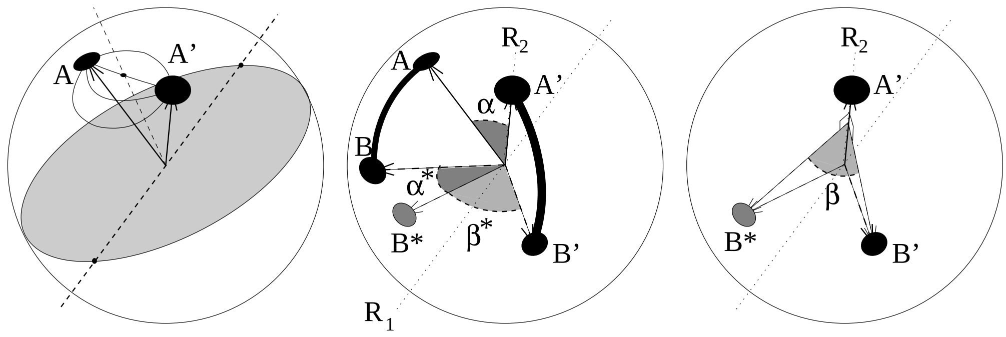

Abbildung B.2.1: Rotationbestimmung. Links: Mehrdeutigkeit bei nur einem zugeordneten Punkt; für Punkt A aus Bild n gibt es beliebig viele Möglichkeiten, durch Rotation zu Position A' (in Bild $n+1$) zu gelangen. Markiert sind die Rotationsachse für die kleinste Drehung α und die Winkelhalbierende. Alle Drehachsen, die in der von diesen beiden Achsen aufgespannte Ebene liegen, sind erlaubt, um A in A' zu transformieren. Mitte: Eindeutige Bestimmung einer Rotation; die Verbindung zwischen den Markierungspunkten A und B aus Bild n kann nur durch eine eindeutige Gesamtrotation in die Verbindung zwischen A' und B' überführt werden. Man kann sie z.B. so konstruieren: Rotiere A und B um Rotationsachse R_1 mit Winkel α so, dass A auf A' abgebildet wird (kürzeste Rotation). Dadurch wird B auf B* abgebildet. Rotiere nun B* um Rotationsachse R_2 (identisch mit dem Vektor A') mit dem Winkel β, sodass B* auf B' transformiert wird. A' bleibt dabei unverändert. Die Gesamtrotation ergibt sich durch Verkettung der beiden Einzelrotationen. Rechts: Der zweite Rotationswinkel β berechnet sich aus den senkrecht auf A' stehenden Anteilen von B* und B'.

- Eine Kamera mit höherer Bildwiederholrate bei besserer Ortsauflösung mit passendem Auswertungssystem, das mit der potenzierten Datenrate zurechtkommt.

- Eine komplette Umskalierung des Experiments, sodass man bei Verlangsamung der Zeitskala um eine Größenordnung mehr als sechs Markierungspunkte pro Kugel bei größerem Zuordnungs-Cutoff-Radius verfolgen und zuordnen kann.

Es wurde außerdem versucht, über Korrelationsanalyse charakteristisch gefärbter Kugeloberflächen, Verschiebungsvektoren zu errechnen. Diese Technik wird z.B. in optischen Computermäusen verwendet und fand so ähnlich Anwendung in [27]. Allerdings verhinderten der extreme Rechenaufwand, die optische Güte des Versuchsaufbaus und die Genauigkeit der Ergebnisse eine Anwendung im Rahmen dieser Arbeit.

Abb. B.2.1 illustriert die verwendete Methode und ihre Schwierigkeiten. Bei Rotationen in 3D gibt es beliebig viele Drehachsen und dazugehörige Drehwinkel, um einen einzelnen Punkt auf einer Kugeloberfläche zu einer anderen Position zu rotieren (links). Man braucht eine Zwangsbedingung, um aus dieser Rotationsgeschwindigkeitsschar zu selektieren. Weder die Annahme, Rotationen fänden auf kürzestem Wege statt[2], noch die Annahme, Rotationen fänden ausschließlich in der x-y-Ebene statt (da das Feld ein Drehmoment in ausschließlich dieser Ebene aufbaut), können als richtig erachtet werden. Bei einer typischen Zeitreihe ist für etwa 60-70% aller Kugeln in aufeinanderfolgenden Bilder nur eine Markierung zu verfolgen, sodass diese für eine Auswertung der Rotationsgeschwindigkeit verworfen werden müssen.

Kann man in Bild n jeweils zwei Markierungen A und B den Markierungen A' und B' in Bild $n+1$ zuordnen, so ist dies ebenfalls eine Zwangsbedingung in obigem Sinne. Denn Länge und Orientierung ihres Verbindungsvektors lassen nur eine eindeutige Rotationsachse mit eindeutigem Rotationswinkel zu. Zur Bestimmung dieser Rotationsachse wird die im Folgenden beschriebene Methode benutzt (s. Abb. B.2.1). Zunächst wird für die zwei Punktpaare (A,B und A',B') jeweils aus den 2D-Koordinaten (unter der Zwangsbedingung, dass sich die Markierung auf einer Kugeloberfläche mit Radius R_K befindet), die z-Komponente ($z = \sqrt{R_K^2 - x^2 - y^2}$) der Vektoren bestimmt, wobei x und y die Relativkoordinaten der Markierungspunkte im Bezugssystem der Kugel darstellen. Nun wird über das Kreuzprodukt A×A' die Rotation R_1 bestimmt, die den 3D-Vektor A auf kürzestem Wege in A' überführt: Die Rotationsachse ist der Einheitsvektor des Kreuzproduktes A×A', der Winkel ergibt sich als $\alpha = \arcsin(\frac{|\mathrm{A}\times\mathrm{A'}|}{|\mathrm{A}|\,|\mathrm{A'}|})$. Wendet man R_1 auch auf B an, so konstruiert man B* als Zwischenergebnis. Der "kürzeste" Winkel zwischen B und B* ist α^*, den Winkel α erkennt man wieder, indem man die senkrecht auf R_1 stehenden Anteile von B und B* betrachtet. Üblicherweise gilt B*≠B', allerdings liegen beide auf demselben Breitengrad um die Achse durch A'. Daher bestimmt man nun die Rotation R_2, die B* in B' überführt, indem man das Kreuzprodukt der senkrecht auf A' stehenden Anteile von B* und B' auswertet. Durch Verketten von R_1 und R_2 kann man leicht die Gesamtrotation ausrechnen, die diese Kugelorientierung aus Bild n in Bild $n+1$ transformiert. Die Reihenfolge der Verkettung ist dabei wichtig, da Rotationen als Gruppe nicht abelsch sind. Bei der Berechnung der Rotationen wurden (wie auch schon in Abschnitt 1.5) Quaternionen verwendet.

Kugeln, für die in aufeinanderfolgenden Bildern zwei oder mehr Markierungspunkte verfolgt werden können, machen ungefähr 25-40% aller Kugeln einer Messung aus. Nur bei $< 2\%$ aller Kugeln lässt sich kein Markierungspunkt denen im nachfolgenden

[2]Für die Gültigkeit dieser Annahme ist die Bildwiederholrate zu niedrig. Als Beispiel sei ein Punkt in der Nähe des Kugelrandes bei ausschließlicher Rotation um die z-Achse angeführt.

Bild zuordnen (z.B. wegen ungünstiger Positionierung oder zu hoher Rotationsgeschwindigkeit).

Danksagung

Mein Doktorvater, Prof. Dr. Mario Markus, liebt die Naturwissenschaften und weiß es, diese Hingabe auf andere zu übertragen. Mit Kreativität, Fleiß und Spieltrieb motiviert er durch sein Beispiel seine Mitarbeiter und schafft es, Neugier auch bei Fachfremden zu wecken. Dabei schaut er selber immer wieder gerne über den Tellerrand hinaus, um neue Ideen zu sammeln. Dieses Engagement und seine Unterstützung haben diese Arbeit inspiriert und erst möglich gemacht. In meiner langen Zeit bei ihm war er mir Mentor, Doktorvater und Freund. Das Vorbild, dass er vorlebt, so kompromisslos es manchmal scheint, soll mir auch weiterhin dienen.

Für die kritischen Diskussionen und die Unterstützung danke ich den Doktoranden Karsten Kötter, Matthias Woltering und Sparisoma Viridi, den Diplomanden Axel Gruhn, Alex Greilich, Oliver Schulz, Björn Maiworm, Patrick Grete, Björn Zelinski, Alexander Hasselhuhn und Jan Fasel in der Arbeitsgruppe "Markus" am Max–Planck–Institut. Sie gaben mir auch über die Arbeit hinaus Halt und Verständnis, forderten aber auch gerne ihren Teil meiner Mühe und Geduld. Besonders erwähnt werden soll auch Stefan Beckmann, der als Praktikant bis in die späten Abendstunden Dipolkugeln gebastelt und Kraftkurven mit Mikrometerschraube und Waage aufgenommen hat. Der Fakultät Elektrotechnik danke ich für die Leihgabe der elektronischen Geräte, die zum Betreiben des Experiments unerlässlich waren.

Auch meiner Familie und nicht zuletzt meiner Freundin Nicole danke ich von Herzen für ihren Platz in meinem Leben, ihre Unterstützung und ihre Mithilfe.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Projektes MA 629- sei für die Finanzierung dieser Arbeit gedankt.

Literaturverzeichnis

[1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel und R. P. Behringer: Granular solids, liquids and gases. *Reviews of Modern Physics* **68**(4), 1259–1273, 1996.

[2] J. Kakalios: Resource letter gp-1: Granular physics or nonlinear dynamics in a sandbox. *American Journal of Physics* **73**(1), 8–22, Jan 2005.

[3] L. Chu-heng: Spatial patterns of sound propagation in sand. *Phys. Rev. B* **50**, 782–794, 1994.

[4] A. Rosato, K. J. Strandburg, F. Prinz und R. H. Swendsen: Why the brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.* **58**(10), 1038–1040, Mar 1987.

[5] R. M. Nedderman: *Statics and Kinematics of Granular Materials.* Cambridge U.P., Cambridge, UK, 1992.

[6] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, W. D. McCormick und H. L. Swinney: Patterns in 3d vertically oscillated granular layers: simulation and experiment. *Phys. Rev. Lett.* **80**(1), 57–60, 1998.

[7] P. B. Umbanhowar, F. Melo und H. L. Swinney.: Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature* **382**, 793–796, 1996.

[8] G. Metcalfe, T. Shinbrot, J. J. McCarthy und J.M. Ottino.: Avalanche mixing of granular solids. *Nature* **374**, 39–41, 1995.

[9] O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shtrikman und J. Stavans.: Rotationally induced seggregation of granular materials. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 644–647, 1994.

[10] A. Q. Shen, E. Fried und S. T. Thoroddsen.: Is seggregation-by-particle type a generic mechanism underlying finger formation at fronts of flowing granular media ? *Particulate Science and Technology* **17**, 141–147, 1999.

[11] T. Shinbrot, A. Alexander und F. J. Muzzio.: Spontaneous chaotic granular mixing. *Nature* **397**, 675–678, 1999.

[12] M. Schmick: *Untersuchung von Intermittenz und 'intermingled basins' in einem periodisch kippenden Mehrteilchensystem.* Diplomarbeit, Universität Dortmund, Sep. 2001.

[13] K. Kötter, E. Goles und M. Markus.: Shell structures with 'magic numbers' of spheres in a swirled dish. *Phys. Rev. E* **60**, 7182–7185, 1999.

[14] M. A. Scherer, K. Kötter, M. Markus, E. Goles und I. Rehberg.: Swirling granular solidlike clusters. *Phys. Rev. E* **61**, 4069–4077, 2000.

[15] R. P. Behringer D. W. Howell und C. T. Veje: Fluctuations in granular media. *Chaos* **9**, 559–572, 1999.

[16] G. G. Batrouni, S. Dippel und L. Samson: Stochastic model for the motion of a particle on an inclined rough plane and the onset of viscous friction. *Phys. Rev. E* **53**(6), 6496–6503, Jun 1996.

[17] A. Puglisi, V. Loreto, V. Marini Bettolo Marconi und A. Vulpiani.: Kinetic approach to granular gases. *Phys. Rev. E* **59**, 5582–5595, 1999.

[18] D. R. M. Williams und F. C. MacKintosh.: Driven granular media in one dimension: correlations and equation of state. *Phys. Rev. E* **54**, R9–R12, 1996.

[19] M. R. Swift, M. Boamfa, S. J. Cornell und A. Marita.: Scale invariant correlations in a driven dissipative gas. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4410–4413, 1998.

[20] D. R. M. Williams.: Driven granular media and dissipative gases: correlations and liquid-gas phase transitions. *Physica A* **233**, 718–729, 1996.

[21] I. Ippolito, C. Annic, J. Lemaitre, L. Oger und D. Bideau.: Granular temperature: experimental analysis. *Phys. Rev. E* **52**, 2072–2075, 1995.

[22] R. Cafiero, S. Luding und H. J. Herrmann.: Rotationally driven gas of inelastic rough spheres. *Europhys. Lett.* **60**, 854–860, 2002.

[23] O. Herbst: A driven two-dimensional granular gas with coulomb friction. *Physics of fluids* **17**(10), 2005.

[24] D. L. Blair und A. Kudrolli: Clustering transitions in vibrofluidized magnetized granular materials. *Phys. Rev. E* **67**(2), 021302, Feb 2003.

[25] J. Stambaugh, D. P. Lathrop, E. Ott und W. Losert: Pattern formation in a monolayer of magnetic spheres. *Phys. Rev. E* **68**(2), 026207, Aug 2003.

[26] B. A. Grzybowski, H. A. Stone und G. M. Whitesides: Dynamic self-assembly of magnetized, millimetre-sized objects rotating at a liquid-air interface. *Nature* **405**, 1033–1036, 2000.

[27] O. Schulz: *Videoanalyse eines oberflächenaktiven Mehrteilchensystems.* Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, März 2007.

[28] I. P. Omelyan: On the numerical integration of motion for rigid polyatomics: The modified quaternion approach. *Computers in Physics* **12**, JAN 1998.

[29] M. P. Allen und D. J. Tidesley: *Computer simulation of liquids.* Oxford University Press, 1987.

[30] J. M. Haile: *Molecular dynamics simulation.* John Wiley, 1992.

[31] G. Kuwabara und K. Komo: Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Jap. J. Appl. Phys.* **26**, 1230, 1987.

[32] J. Schäfer, S. Dippel und D. E. Wolf: Force schemes in simulations of granular materials. *J. Phys. I France* **6**(1), 5–20, 1996.

[33] M. Schmick, E. Goles und M. Markus.: On-off intermittency and intermingled-like basins in a granular medium. *Phys. Rev. E* **066214**, 1–4, 2002.

[34] P. Manneville und Y. Pomeau: Intermittency and the lorenz model. *Phys. Lett. A* **75**, 1, 1979.

[35] M. Franaszek: Analyzing chaotic behaviour via multitransient chaos. *Phys. Rev. A* **46**, 6340–6343, 1992.

[36] M. Z. Ding und W. M. Yang.: Observation of intermingled basins in coupled oscillators exhibiting synchronized chaos. *Phys. Rev. E* **54**, 2489–2494, 1996.

[37] M. Markus und M. Schmick: Intermittency in connected hamiltonian systems. *Physica A* **328**, 335–340, 2003.

[38] I. M. Kyprianidis, M. L. Petrani, J. A. Kalomiros und A. N. Anagnostopoulos.: Crisis-induced intermittency in a third-order electrical circuit. *Phys. Rev. E* **52**, 2268–2273, 1995.

[39] M. Sauer und F. Kaiser.: Crisis-induced intermittency in a spatially extended nonlinear optical system. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **6**, 1481–1494, 1996.

[40] H. Y. Sun, L. X. Ma und L. Wang.: Multistability as an indicator of chaos in a discharge plasma. *Phys. Rev. E* **51**, 3475–3479, 1995.

[41] C. Huepe und M. Aldana: Intermittency and clustering in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.* **92**(16), 168701, Apr 2004.

[42] H. G. Schuster: *Deterministic Chaos – An Introduction.* VCH Verlag GmbH, Weinheim, 1989.

[43] N. Platt, E. A. Spiegel und C. Tresser: *Phys. Rev. Lett.* **70(3)**, 279–282, 1993.

[44] C. Grebogi, E. Ott und J. Yorke: *Physica D* **7**, 1–3, 1983.

[45] O. Schulz und M. Markus: Velocity distributions of camphor particle ensembles. *Journal of Physical Chemistry B* **111(28)**, 8175–8178, 2007.

[46] J. S. Olafsen und J. S. Urbach: Velocity distributions and density fluctuations in a granular gas. *Phys. Rev. E* **60**(3), R2468–R2471, Sep 1999.

[47] D. J. Evans, E. G. D. Cohen und G. P. Morriss: Probability of second law violations in shearing steady states. *Phys. Rev. Lett.* **71**(15), 2401–2404, Oct 1993.

[48] G. Gallavotti und E. G. D. Cohen: Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics. *Phys. Rev. Lett.* **74**(14), 2694–2697, Apr 1995.

[49] S. Lepri, R. Livi und A. Politi: *Physica D* **119**, 140, 1998.

[50] M. M. Sano: *Phys. Rev. E* **61**, 1144, 2000.

[51] S. Ciliberto und C. Laroche: *J. Phys. IV* **8**, 215, 1998.

[52] R. van Zon und E. G. D. Cohen: *Phys. Rev. E* **67**, 046102, 2003.

[53] M. Schmick und M. Markus: Fluctuation theorem for a deterministic one-particle system. *Phys. Rev. E* **70**(6), 065101, Dec 2004.

[54] M. Schmick, Qi Liu, Qi Ouyang und M. Markus: Fluctuation theorem for a single particle in a moving billiard: Experiments and simulations. *Phys. Rev. E* **76**(2), 021115, Aug 2007.

[55] K. Feitosa und N. Menon: *Phys. Rev. Lett.* **92**, 164301, 2004.

[56] M. Woltering und M. Markus.: Riddled basins of coupled elastic arches. *Phys. Lett. A* **260**, 453–461, 1999.

[57] Y.-C. Lai und C. Grebogi: Intermingled basins and two-state on-off intermittency. *Phys. Rev. E* **52**(4), 3313–3316, 1995.

Abbildungsverzeichnis