ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen & DUTKOWSKI, Wilfried
Korschenbroich, Bad Godesberg

„Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ vor 25 Jahren und heute - Gedanken zum Buch von V. Hole

Vor 25 Jahren ist das Buch 'Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer' von Volker Hole erschienen; es ging um 'Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I'. In der schulpraktischen Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung war es damals ein viel genutztes Werk.

1. Phasen des Computereinsatzes

Hole identifizierte vier Phasen des Computereinsatzes (Hole, S. 12):

- Bis 1976: Beschäftigung "mit den logischen und technischen Grundlagen der Datenverarbeitung".
- Bis Ende 80-er Jahre: Schreiben eigener Programme in damaligen Programmiersprachen (Basic, Pascal, Logo).
- Danach Einsatz "von allgemeiner oder fachspezifischer Anwendungssoftware" (bei Hole vorwiegend Excel sowie Derive, Cabri II, Geolog, QuickBasic, …). In dieser Phase hat Hole sein Buch geschrieben.
- Vision: Hole sah damals voraus, dass "demnächst wohl eine vierte folgen wird, die wesentlich durch multimedial arrangierte Kursangebote und Lernumwelten und durch Formen des Telelearnings geprägt sein wird".

2. Didaktische Prinzipien

Laut Wikipedia sind didaktische Prinzipien "allgemeine Grundsätze zur Gestaltung von Erziehung und Unterricht. Als Regelsetzungen beanspruchen sie Gültigkeit für jedes organisierte Lehren und Lernen nach dem Erkenntnisstand der Zeit". Eine Recherche im mathematikdidaktischen Bereich ergab zu unserer Überraschung, dass es wenig Übereinstimmungen und keinen Standard gibt. Wir möchten hier aus unserer langjährigen Erfahrung in Schule und Studienseminar fünf didaktische Prinzipien benennen:

- Genetisches Prinzip (Wagenschein).
- Operatives Prinzip (Piaget).
- Spiralprinzip (Bruner).
- Prinzip der dynamischen Visualisierung.
- Prinzip der systematischen Variation.

Die ersten drei Prinzipien sind mit großen Pädagogen und Psychologen verbunden. Die beiden letzteren entstammen einer neueren Arbeit zu digitalen Werkzeugkompetenzen (Heintz, Elschenbroich et al, 2017, S. 170f). Eine

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

ausführlichere Beschreibung findet sich in Elschenbroich & Dutkowski (Elschenbroich & Dutkowski, 2023, S. 402f).

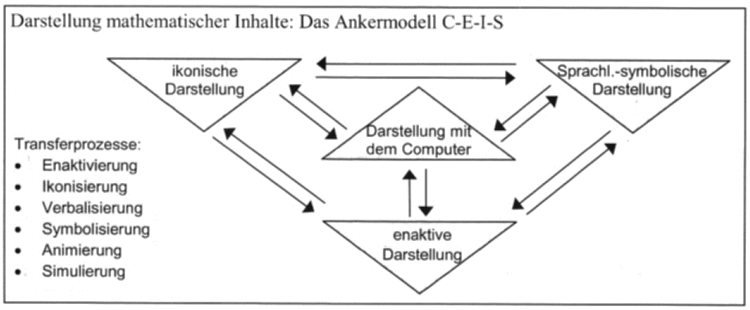
3. Das C-E-I-S Modell

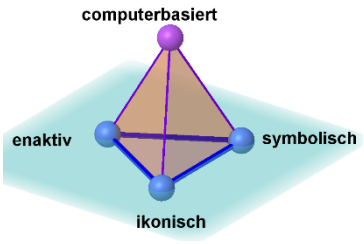
Hole hat von Bruner das als E-I-S bekannte Modell der Erkenntnisgewinnung übernommen, "daß man etwas auf drei verschiedene Weisen kennen kann: dadurch daß man es tut, dadurch, daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z.B. die Sprache verwendet" (Bruner, Olver & Greenfield, S. 27). In der Übersetzung von Aebli wurden die Adjektive "handlungsmäßig, bildhaft und symbolisch" benutzt, in der Literatur eingebürgert haben sich die Begriffe enaktiv, ikonisch, symbolisch. Es sei betont, dass für Bruner 'ikonisch' bedeutet, *sich selbst* etwas bildlich vorzustellen und 'symbolisch' bedeutet, *Sprache* zu verwenden und nicht vorrangig formale Algebra. Auch ist es nicht erforderlich, die drei Weisen der Erkenntnisgewinnung in einer strikten Reihenfolge zu durchlaufen.

Dem Computer kam schon 1998 eine besondere Rolle zu, was Hole zu einer Erweiterung zu seinem C-E-I-S Modell veranlasste (Hole, S. 221f). Mit der Entwicklung der dynamischen Mathematik-Werkzeuge zu modularen Mathematiksystemen (MMS) wie GeoGebra ist noch deutlicher geworden, dass "durch die Möglichkeiten dynamischer Visualisierung in bislang nicht gekannter Form die Ebenen enaktiv und ikonisch, je nach Art und Qualität der Lernumgebung auch alle drei Ebenen" miteinander verbunden werden (Elschenbroich & Sträßer, 2022, S. 242).

Bemerkenswerterweise fand Bruner durch die PISA Studie wieder aktuelle Beachtung, weil sein Modell ein wesentlicher Bestandteil der *Singapore-Method* war, dort *CPA Approach (Concrete, Pictorial, Abstract)* genannt.

Hole veranschaulichte C-E-I-S mit einem dreieckigen Modell (Hole, S. 224). Wir haben dann die übergreifende und herausragende Bedeutung des Computers durch ein dreidimensionales Tetraeder visualisiert.





Dreieckiges Modell (Hole) und Tetraeder-Modell (Elschenbroich & Dutkowski)

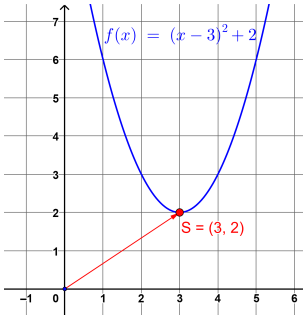
4. Beispiel Quadratische Funktion und Gleichung

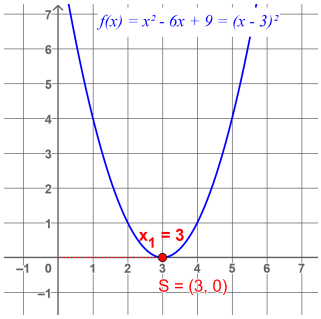
Im MNU-Artikel und im GeoGebra Book (siehe Literatur) werden 9 Aufgaben in der Formulierung von Hole und in neuer Interpretation vorgestellt, hier nur exemplarisch quadratische Funktionen und Gleichungen.

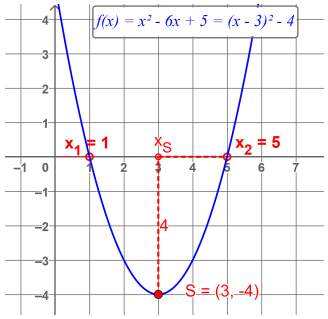
Quadratische Funktionen, Scheitelpunktform

Typische CAS, Funktionenplotter und Grafikrechner ermöglichen es schon seit Jahrzehnten, durch Eingabe eines Terms (ggf. mit Schieberegler-Variablen) den Funktionsgraphen zu zeichnen. Damit erhält der *Term*, also die Algebra eine herausragende Bedeutung. In der Regel erfolgt dabei die Termeingabe in Normalform, während die Darstellung in Scheitelpunktform algebraische Umformungen mit quadratischer Ergänzung und binomischen Formeln erfordert.

In GeoGebra kann man heute mit einer Normalparabel starten, am *Graphen* ziehen (!) und den aktuellen Term in Scheitelpunktform beobachten. Ein Paradebeispiel für *dynamische Visualisierung*. Für ein geleitetes Entdecken mit *systematischer Variation* wird dann die Aufgabenstellung zielgerichtet so eingeschränkt, dass beim Ziehen zuerst der Scheitelpunkt auf der y-Achse wandern soll, dann auf der x-Achse und erst zum Schluss frei durch das Koordinatensystem, mit Andocken an das ganzzahlige Gitternetz.







Scheitelpunktform entdecken Nullstellenformel entdecken

Damit wird ein graphischer, kalkülarmer Zugang zur Scheitelpunktform ermöglicht, in dem der Funktions*graph* gleichwertig zum Funktions*term* ist.

Quadratische Gleichung, Lösungsformel

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ werden in der Schule typischerweise anfangs mit quadratischer Ergänzung und binomischen Formeln gelöst und dann mit Anwendung der auswendig gelernten p-q-Formel.

Selbst wenn das algebraische Verfahren souverän beherrscht wird, ist damit erfahrungsgemäß selten eine graphische Vorstellung verbunden. *Dynamische Visualisierung* mit Ziehen am Graphen und sinnvolle Einschränkungen für eine *systematische Variation* führen dazu, dass die Normalparabel erst

mit dem Scheitelpunkt auf der y-Achse nach unten gezogen werden soll. Dabei kann entdeckt werden, dass die Nullstellen symmetrisch zur y-Achse liegen und den Wert $\pm\sqrt{-y_S}$ haben. Verschieben in x-Richtung führt zu der Erkenntnis, dass die Nullstellen jetzt symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitelpunkt liegen. Damit wird die Nullstellenformel $x_S \pm \sqrt{-y_S}$, in der der Zusammenhang von Scheitelpunkt und Nullstellen sichtbar und verstehbar. Das Andocken des Scheitelpunktes an ganzzahlige Gitterpunkte ermöglicht zunächst wieder eine sinnvolle Beschränkung der Variation. Da der Scheitelpunkt S die Koordinaten $S = \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$ hat, ergibt sich damit auch die p-q-Formel in ihrer klassischen Gestalt und kann ganzheitlich verstanden werden. Es gibt somit drei Fälle: Liegt der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse, gibt es keine Nullstellen. Liegt er auf der x-Achse, gibt es eine (doppelte) Nullstelle mit $x = -\frac{p}{2}$. Liegt er unter der x-Achse, gibt es zwei Nullstellen gemäß obiger Formel.

In diesen zwei Beispielen lassen sich die obigen fünf didaktischen Prinzipien und das C-E-I-S Modell identifizieren (siehe auch Dutkowski & Elschenbroich 2023):

- Direktes Ziehen am Graphen: genetisch, ikonisch, handlungsorientiert, dynamisch visualisiert und computerbasiert.
- Scheitelpunktform und Nullstellenformel: symbolisch (algebraisch und sprachlich), spiralig, dynamisch visualisiert und computerbasiert.
- Einschränkungen in x-Richtung, in y-Richtung und ganzzahliges Gitternetz: ermöglicht geleitetes Entdecken durch systematische Variation.

Literatur

Bruner, J. S., Olver, R. & Greenfield, P. (1971): *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Klett Cotta.

Dutkowski, W. & Elschenbroich, H.-J (2023): *Vortrag 25 Jahre 'Erfolgreicher MU mit dem Computer' GeoGebra-Book*. https://www.geogebra.org/m/pkjgtxpg

Elschenbroich, H.-J. & Dutkowski, W. (2023): 'Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer' vor 25 Jahren und heute. Teil 1. In *MNU journal* 05/2023.

Elschenbroich, Hans-Jürgen & Sträßer, Rudolf (2022): Geometrie und Digitalität. In: Pinkernell, Guido; Reinhold, F.; Schacht, Florian & Walter, Daniel (Hrsg.): *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule*. Springer Spektrum. Berlin.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rüsing, M., Schacht, F., Schmidt, R. & Tietz, C. (2017): *Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben*. MNU & T3. Verlag Medienstatt.

Hole, V. (1998): *Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I*. Auer.

Wikipedia: *Unterrichtsprinzipien*. https://de.wikipedia.org/wiki/Unterrichtsprinzipien