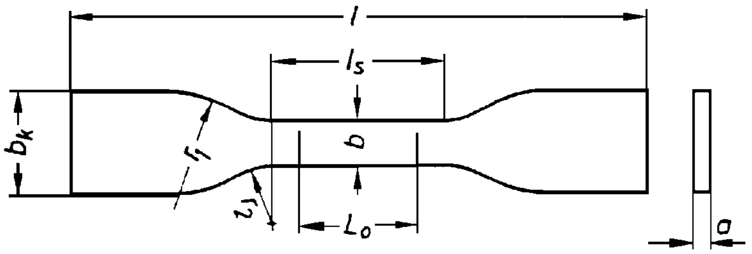
7.3 Formoptimierung einer Normprobe

7.3.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt wird die S2-Normprobe nach DIN 53504 betrachtet, siehe Abbildung 7.26. Der Übergangsbereich zwischen dem Kopf der Probe mit der Breite b_k und dem Steg mit der Breite b wird durch die Anordnung von zwei Kreisbögen mit den Radien r_1 und r_2 gebildet. Damit ergibt sich ein unstetiger Verlauf der Randlinienkrümmung.



Gesamtlänge	l	$75,0\ mm$
Breite der Köpfe	b_k	$12,5\ mm$
Länge des Stegs	l_s	$25,0\ mm$
Breite des Stegs	b	$4,0\ mm$
Übergangshalbmesser, innen	r_1	$12,5\ mm$
Übergangshalbmesser, außen	r_2	$8,0\ mm$
Dicke	a	$2,0\ mm$
Meßlänge	$L_\circ$	$20,0\ mm$
Querschnitt in Stegmitte	$A_\circ$	$8,0\ mm^2$

Abbildung 7.26: S2-Normprobe nach DIN 53504

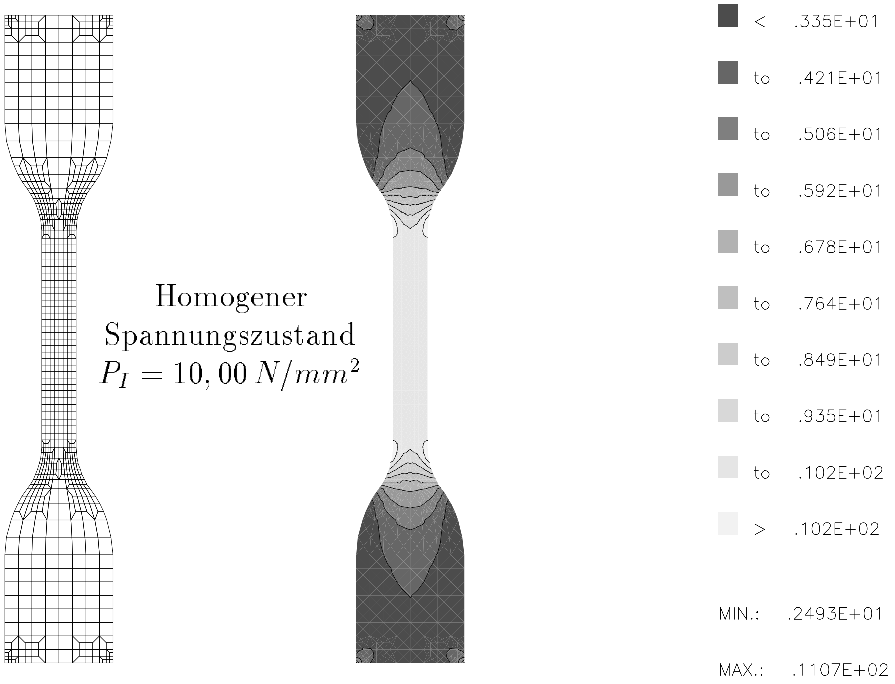
Die Berechnung der Normprobe zeigt bereits für kleine Verzerrungen unabhängig vom gewählten Materialgesetz Spannungskonzentrationen außerhalb des Bereichs homogener Deformationen. Aus diesem Grund wurde zunächst die Normprobe für einen Stahlquerschnitt *St* 37 mit dem Elastizitätsmodul von $E = 210000\ \frac{N}{mm^2}$ und der Querkontraktionszahl von $\nu = 0,3$ untersucht, dessen Materialverhalten durch das kompressible St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz (siehe auch *Ciarlet* [28]) beschrieben wurde[3]

$$W = \hat{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}\ (\mathrm{tr}\,\mathbf{E})^2 + \mu\ \mathrm{tr}\,\mathbf{E}^2.$$

Für die gewählten kleinen Verzerrungen ergibt sich im homogenen Bereich die Hauptnormalspannung $P_I = 10\ \frac{N}{mm^2}$ des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstenors $\mathbf{P}$, den die Spannungskonzentration um 10% überschreitet (siehe Abbildung 7.27). Damit ist die Gefahr des unerwünschten Reißens der Probe außerhalb des homogenen Dehnungsbereiches erhöht gegeben.

[3]Die Wahl dieses geometrisch nichtlinearen Materialgesetzes erfolgte zur Verdeutlichung der Leistungsfähigkeit der realisierten analytischen Sensitivitätsanalyse.

FE-Netz und Spannungszustand der S2–Normprobe



Darstellung der Spannungskonzentration

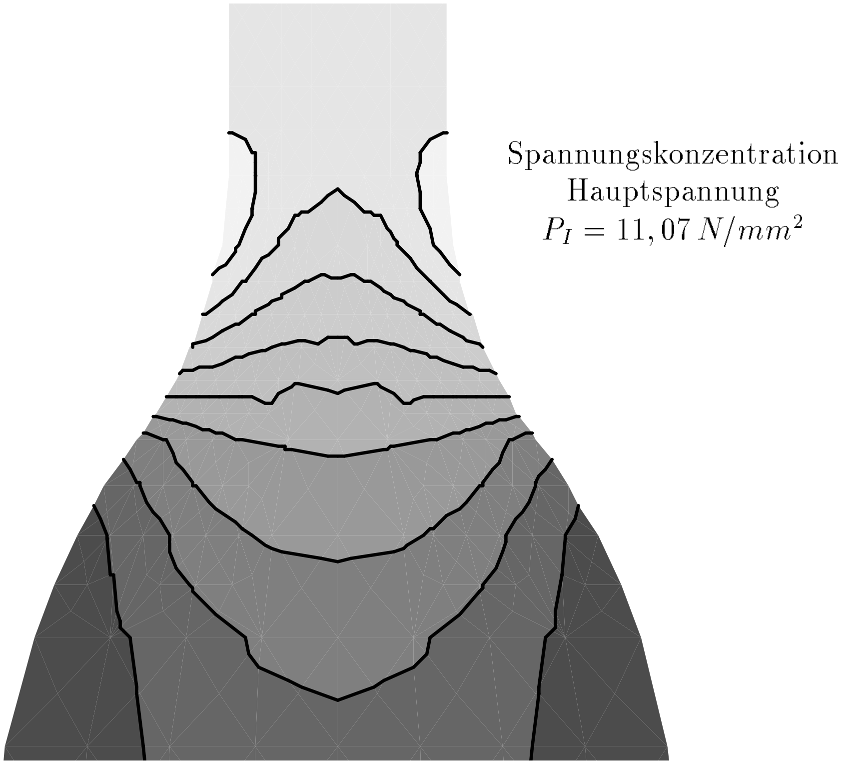


Abbildung 7.27: FE–Netz der Normprobe und Angabe des Spannungszustandes

7.3.2 Die Definition des Optimierungsproblems

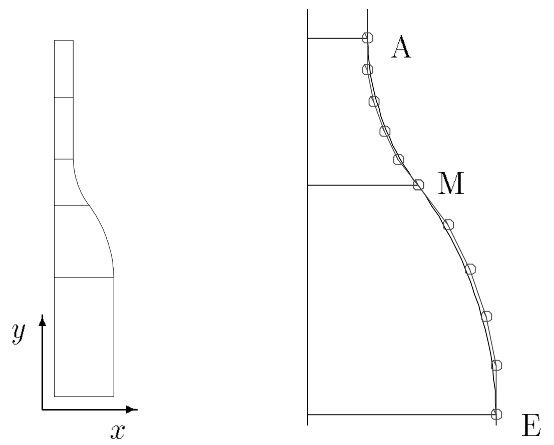
Das Ziel der folgenden Untersuchung ist die Reduktion der Spannungsspitzen außerhalb des homogenen Verzerrungsbereiches durch die Variation der Form der Randlinie. Erwünscht ist dabei die Reduktion der maximalen Hauptnormalspannung auf einen Wert unterhalb der maximalen Hauptnormalspannung im homogenen Bereich.

Eine direkte Formulierung, d.h. die Wahl der maximalen Hauptspannung als die zu minimierende Zielfunktion bei Veränderung des Randlinienverlaufes, führt zu einer unerwünschten Aufweitung der Probe im Übergangsbereich zwischen Steg und Kopf, die algorithmisch in einem lokalen Minimum mit einer nicht erwünschten Geometrie der Normprobe endet. Die Definition der Krümmung der Randlinie als Zielfunktion unter Beachtung der Beschränkungen in den Spannungen wurde bisher nicht betrachtet.

Als Zugang zur Lösung wurde in diesem Beispiel die glättenden Eigenschaft der Gewichtsminimierung benutzt. Hiermit ist die Tatsache gemeint, das sich bei Gewichtsminimierung im Übergangsbereich der gerade Randlinienverlauf des Steges einstellen wird. Als Nebenbedingungen werden die Hauptnormalspannungen in den Elementen des Übergangsbereiches betrachtet, die unterhalb der Spannung des homogenen Bereiches liegen sollen. Dabei werden die Gradienten durch die besonderen Eigenschaften des SQP-Verfahrens nur für aktive Nebenbedingungen berechnet, was den Berechnungsaufwand beträchtlich mindert. Weiterhin ist für die Beurteilung des algorithmischen Verlaufes zu beachten, das der Startpunkt der Iteration im unzulässigen Bereich liegt.

Die Geometrie der Normprobe, d.h. der Verlauf der äußeren Form der Probe in der dargestellten Form mit zwei Kreisbögen, wird approximativ durch die Angabe von zwei Bézierkurven mit jeweils vier inneren Kontrollpunkten modelliert (Linie 1 mit den Kontrollpunkte $A, 1, 2, 3, 4, M$ und Linie 2 mit den Kontrollpunkten $M, 5, 6, 7, 8, E$). Die Koordinaten der Kontrollpunkte der Bézierkurven stellen dabei die Designvariablen im Optimierungsproblem dar (siehe Abbildung 7.28). Damit kann sich die Randlinie als Freiformlinie entsprechend der Notwendigkeit der Spannungsreduktion einstellen.

Berechnungsmodell — Kontrollpunkte und deren Koordinaten



A: $(2,0000; 25,0000)$
1: $(2,0000; 23,9470)$
2: $(2,2066; 22,9083)$
3: $(2,5469; 21,9073)$
4: $(3,0152; 20,9595)$
M: $(3,6585; 20,1229)$
5: $(4,6637; 18,8157)$
6: $(5,3954; 17,3348)$
7: $(5,9272; 15,7708)$
8: $(6,2500; 14,1508)$
E: $(6,2500; 12,5025)$

Abbildung 7.28: Kontrollpunkte für die Randlinienbeschreibung der S2-Normprobe

7.3.3 Die Ermittlung einer optimaler Form für die Normprobe

Für diese Problemlösung sind die x-Koordinaten von insgesamt 9 Kontrollpunkten beider Randkurvenbeschreibungen, d.h. die x-Koordinaten der Kontrollpunkte $1, 2, 3, 4, M$, $5, 6, 7, 8$, als Designvariablen definiert worden. Damit sind innerhalb des gewählten Modells die maximalen Beschreibungsmöglichkeiten gegeben. Bei der Ermittlung der Lösungsgeometrie zeigte der Optimierungsalgorithmus das in Abbildung 7.29 angegebene Verhalten.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_\circ$	2.00
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	f^*	1.36
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	348
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	358
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	348
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.1 \cdot 10^{-3}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$2.6 \cdot 10^{-2}$

Abbildung 7.29: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Für die Spannungskonzentrationen wurde eine Beschränkung auf eine $0,5\%$-tige Überschreitung des Nominalwertes gewählt, die mit einer Genauigkeit (Abbruchgenauigkeit des SQP-Verfahrens) von $ACC = 10^{-4}$ eingehalten werden sollte. Nach Beendigung des Iterationsprozesses ergab sich hieraus eine maximale Hauptnormalspannung von $10,09\,\frac{N}{mm^2}$ und damit eine $0,9\%$-tige Überschreitung des Grenzwertes (siehe Abbildung 7.30).

Die große Anzahl der Iterationsschritte erklärt sich damit, daß durch den starken Einfluß der Zielfunktion (Gewichtsminimierung) ein Verlassen des Bereiches unzulässiger Iterationspunkte der Designvariablen (Nebenbedingungen sind verletzt) nicht erfolgte. Vielmehr verlief der gesamte Iterationsprozeß im unzulässigen Bereich und endete, als die Nebenbedingungen nur noch minimal (bezogen auf die vorgegebene Abbruchgenauigkeit) verletzt waren.

Das beschriebene Iterationsverhalten verdeutlicht, daß die Wahl der Zielfunktion zwar zum gewünschten Ergebnis führt, die Problembeschreibung über die glättende Eigenschaft der Gewichtsminimierung jedoch nicht optimal ist. Andererseits zeigt der Vergleich der Anzahl der Funktionsauswertungen und der Anzahl der Gradientenberechnungen, daß die algorithmische Umsetzung richtig erfolgt ist.

Neben der formal richtigen algorithmischen Umsetzung der Optimierungsaufgabe muß somit besonderer Wert auf eine problemgerechte Modellierung des Optimierungsziels gelegt werden.

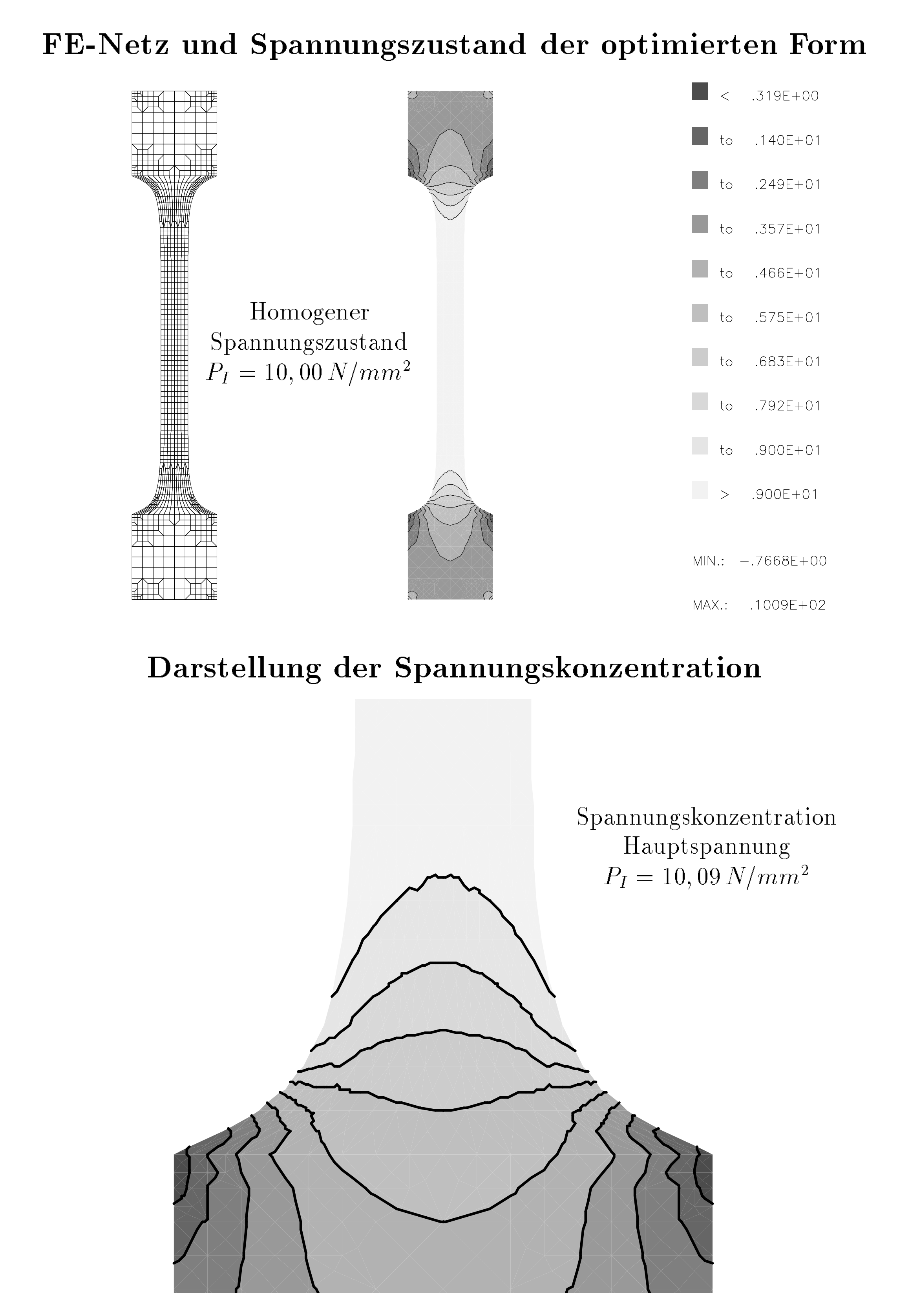


Abbildung 7.30: FE–Netz und Spannungszustand der ersten optimierten Form

7.3.4 Die Ermittlung einer optimaler Form für eine modifizierte Optimierungsaufgabe

In der zweiten Problemlösung wird die Normprobe für ein inkompressibles Mooney-Rivlin-Material

$$W = C_1\left(\bar{\mathrm{I}} - 3\right) + C_2\left(\bar{\mathrm{II}} - 3\right)$$

mit den Materialparametern $C_1 = 0,1838\,\frac{N}{mm^2}$, $C_2 = 0,2745\,\frac{N}{mm^2}$ und dem Schubmodul von $\mu = 2\,(C_1 + C_2) = 0,9166\,\frac{N}{mm^2}$ untersucht. Dieses Materialgesetz beschreibt einen Synthesekautschuk, der in der industriellen Fertigung von Dichtungen eingesetzt wird. Die aufgebrachte Dehnung im homogenen Bereich beträgt in diesem Fall 100% (d.h. $\lambda = 2,0$), so daß sich nach Auswertung des Spannungs- und Verzerrungszustandes eine maximale Hauptnormalspannung im homogenen Bereich von $T_I = 2,2474\,\frac{N}{mm^2}$ ergibt. Der Spannungsverlauf entspricht qualitativ der Darstellung nach Abbildung 7.27, so daß auf eine Dokumentation an dieser Stelle verzichtet wird. Die maximale Hauptnormalspannung der Cauchy-Spannungen außerhalb des homogenen Bereichs beträgt in diesem Fall $2,3440\,\frac{N}{mm^2}$, d.h. es tritt eine 4 %-tige Überschreitung der Spannungen des homogenen Deformationsbereiches auf. Die Optimierungsaufgabe unterscheidet sich von der vorherigen dadurch, daß nur noch die x-Koordinaten der Kontrollpunkte $1, 2, 3, 4, M$ als Designvariablen definiert wurden. Dies führt zu einem optisch gefälligeren Verlauf der Randlinie, vermindert durch die geringeren Freiheitsgrade der Randlinienausbildung jedoch die Reduktionsmöglichkeiten der Spannungsspitzen.

In diesem Beispiel wurden die Nebenbedingungen für die Hauptnormalspannungen des Cauchy-Spannungstensors der Momentankonfiguration derart gewählt, daß sich die Spannungskonzentrationen von einer unzulässigen 4%-igen Überschreitung der zulässigen Werte auf eine zulässige 0,1%-ige Überschreitung reduzierten (siehe Abbildung 7.32). Die Koordinaten der Kontrollpunkte im Lösungspunkt sind in Abbildung 7.31 angegeben.

	KP 1	KP 2	KP 3	KP 4	KP M	KP 5	KP 6	KP 7	KP 8
A	2,0000	2,2066	2,5469	3,0152	3,6585	4,6637	5,3954	5,9272	6,2500
B	2,0378	2,0088	2,0520	2,1020	2,1127	2,1293	2,1443	2,9340	2,0000
C	2,0427	2,0000	2,4628	2,2604	3,2029	4,6637	5,3954	5,9272	6,2500

Abbildung 7.31: Werte der x-Koordianten der Kontrollpunkte für die S2-Normprobe (A) sowie für die erste (B) und zweite (C) optimierte Form (Angaben in $[mm]$)

Die Untersuchung der S2-Normprobe zeigt, daß es durch die Variation der Probengeometrie möglich ist, unerwünschte Spannungskonzentrationen abzubauen. Die Formulierung der Optimierungsaufgabe über die Gewichtsminimierung unter Beachtung zusätzlicher Nebenbedingungen, die das eigentliche Ziel der Optimierungsaufgabe darstellen, hat sich als akzeptable Möglichkeit zur Behandlung komplexer Probleme herausgestellt. Dieser Weg ist insbesondere dann vielversprechend, falls aussagekräftige Zielfunktionen nicht direkt anzugeben sind.

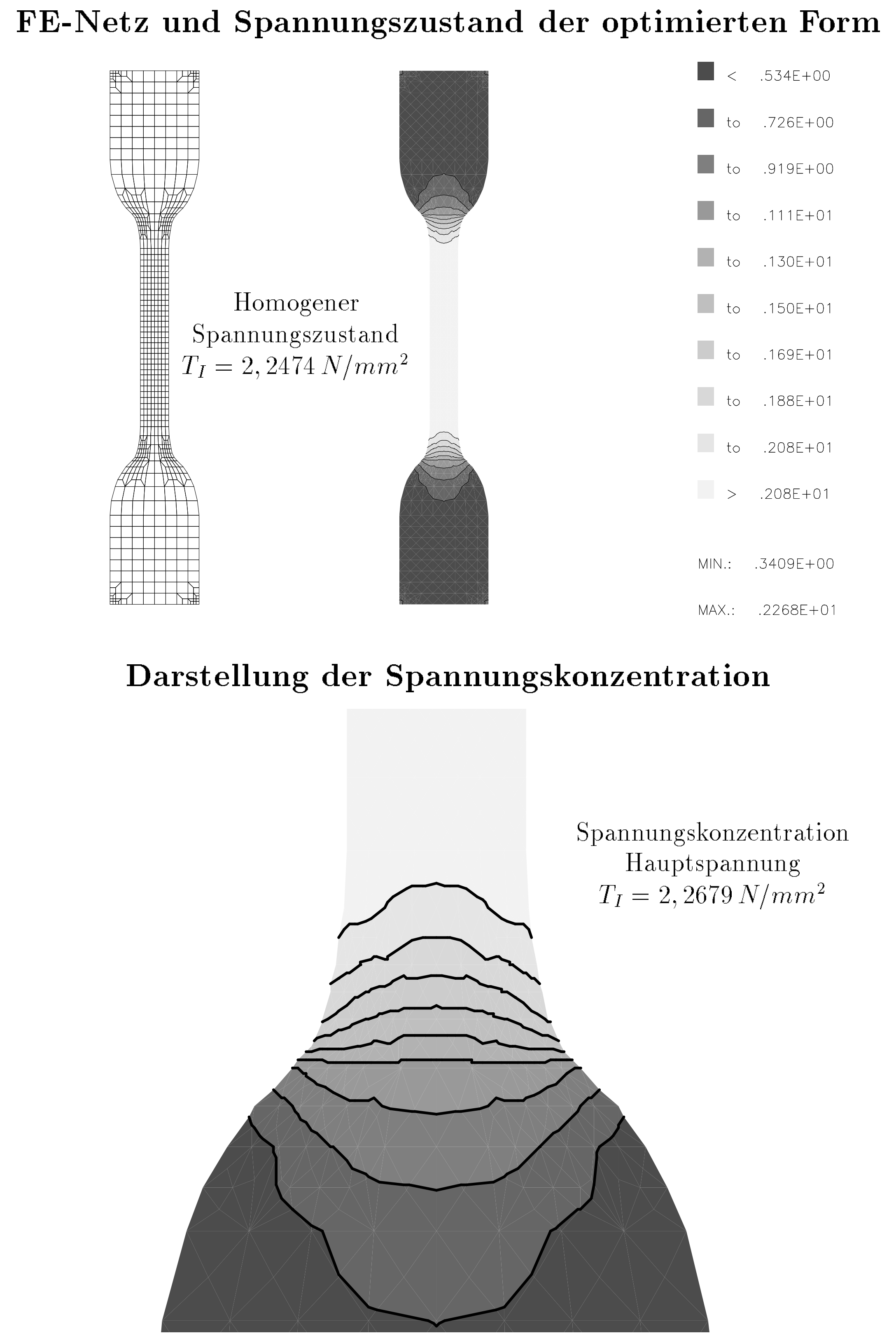


Abbildung 7.32: FE–Netz und Spannungszustand der zweiten optimierten Form